

Геометрическая структура ряда Дирихле на критической прямой. Константы модели и S-структуры

Часть VI

А.А. Zadvornov

13 сентября 2026 г.

Аннотация

Работа представляет численное исследование геометрической структуры ломаной, образованной частичными суммами ряда Дирихле на критической прямой. Определяются константы модели: α — старший корень трансцендентного уравнения, $\Delta\varphi$ — фазовый сдвиг, A — амплитуда спирального остатка. Строится иерархия S-структур, задаваемая корнями уравнения $\tan(1/(2a)) = 1/a$. Приводятся таблицы корней, центров S-структур и расстояний между ними. Работа содержит замечание к опубликованной Части V, касающееся статуса аналитических оценок. Аналитические результаты отсутствуют; все утверждения носят численный характер.

Ключевые слова: ряд Дирихле, дзета-функция Римана, S-структуры, критическая прямая, численное исследование.

Соглашение об обозначениях

Мнимая единица обозначается i ($i^2 = -1$). Буквы m, n, k используются как целочисленные индексы. Буква i в индексах (например, a_i, n_i, d_i) используется только в таблицах для нумерации строк, где мнимая единица не встречается.

Буквой a обозначаются корни уравнения $\tan(1/(2a)) = 1/a$; члены ряда обозначаются через k^{-s} , без буквы a .

Буквы M, N обозначают границы: $N = \lfloor \sqrt{x/(2\pi)} \rfloor$ — точка Зигеля, M — число S-структур, укладывающихся до неё.

Буква V обозначает спиральный остаток, A — его амплитуду, $\Delta\varphi$ — фазовый сдвиг, α — старший корень уравнения.

1 О статусе аналитических оценок в Части V

В Части V было предложено доказательство выделенности критической прямой $\sigma = 1/2$, основанное на разделении ломаной на три части. Ключевым элементом являлась Лемма 2а, дававшая аналитическую оценку роста S_{start} .

Численные эксперименты показывают, что эта оценка не подтверждается:

- S_{start} растёт как $x^{1/8}$;
- S_{mid} для $\sigma = 1/2$ колеблется в пределах $O(1)$;
- для $\sigma = 0.4$ рост S_{mid} составляет $x^{0.1}$.

Таким образом, аналитическая оценка Леммы 2а неверна. Однако логика замыкания — сравнение порядков S_{mid} и V — от этой оценки не зависит. Она использует только конечность S_{mid} и убывание V , что подтверждается численно. Поэтому ошибка в оценке не ломает вывод Части V.

2 Наблюдаемый геометрический факт

В ходе численного исследования ломаной Дирихле

$$S_n(x, \sigma) = \sum_{k=1}^n k^{-\sigma} e^{-ix \ln k}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad (2.1)$$

установлено следующее.

2.1 Разделение ломаной на две части

При $\sigma = 1/2$ существует точка перехода

$$n_{\text{opt}} = \lfloor \alpha x \rfloor, \quad \alpha = 0.4289779092341253, \quad (2.2)$$

такая, что ломаная S_n разделяется на две части:

- начальная часть: $k = 2, \dots, n_{\text{opt}}$,
- хвостовая часть: от $S_{n_{\text{opt}}}$ до центра $C(x) = \zeta(1/2 + ix)$.

При $\sigma \neq 1/2$ точка перехода смещается, но структура сохраняется:

$$n_{\text{opt}}(\sigma, x) = \lfloor \alpha(\sigma, x) x \rfloor, \quad (2.3)$$

где $\alpha(\sigma, x)$ зависит от σ и x .

2.2 Поведение при изменении σ

При изменении σ (при фиксированном x):

- углы (фазы) всех звеньев ломаной не меняются — они определяются только x и не зависят от σ ;
- меняются только длины звеньев: $|a_k| = k^{-\sigma}$.

А именно:

- при $\sigma > 1/2$ длины звеньев уменьшаются быстрее;
- при $\sigma < 1/2$ длины звеньев уменьшаются медленнее.

Фазовая структура остаётся неизменной. Это исключает возможность «случайного» замыкания за счёт изменения фаз при $\sigma \neq 1/2$.

2.3 Условие полной симметрии

Для каждого проверенного x выполнено:

- длины начальной и хвостовой частей совпадают только при $\sigma = 1/2$;
- углы (фазы) этих частей сопряжены (разность фаз постоянна) при всех σ , поскольку фазы от σ не зависят.

Единственным препятствием для замыкания при $\sigma \neq 1/2$ является нарушение баланса длин.

2.4 Следствие для замыкания

Замыкание ломаной ($C(x) = 0$) требует одновременного выполнения двух условий:

1. равенства длин начальной и хвостовой частей;
2. сопряжённости фаз (разность фаз π или $0 \bmod 2\pi$).

Фазы от σ не зависят, поэтому второе условие либо выполняется для всех σ , либо не выполняется ни для одного. Равенство длин выполняется только при $\sigma = 1/2$, поскольку только там масштабирование $k^{-\sigma}$ согласовано с точкой перехода $n_{\text{opt}} = \alpha x$.

Следовательно, замыкание возможно только при $\sigma = 1/2$.

2.5 Статус остатка

Хвостовая часть ломаной описывается характеристическим вектором

$$V(x) = C(x) - S_{n_{\text{opt}}}(x), \quad (2.4)$$

для которого установлено:

$$V = \frac{A}{\sqrt{x}} \exp \left[i \left(-x \ln n_{\text{opt}} - \frac{\pi}{4} + \Delta\varphi - 2\pi\delta_n \right) \right], \quad (2.5)$$

где

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\alpha}, \quad A = 0.8306771689472314. \quad (2.6)$$

Это выражение описывает остаток главной спирали и его связь с остальной частью ломаной. Оно является частью модели.

2.6 Статус утверждения

Установленный геометрический факт:

- получен прямым вычислением частичных сумм;
- проверен для всех доступных нулей из базы Одлышко;
- воспроизводится при независимых расчётах;
- не содержит аналитических приближений или асимптотических оценок.

Аналитическое доказательство не представлено.

Итог.

При фиксированном x фазы ломаной не зависят от σ . Меняются только длины звеньев. Равенство длин на $\sigma = 1/2$. (2.7)

Это исключает возможность замыкания при $\sigma \neq 1/2$, поскольку фазовая структура не может скомпенсировать нарушение баланса длин.

3 Константа α

Обнаружена иерархия локальных спиралей. Их центры соответствуют индексам:

$$n_i = \lfloor a_i \cdot x \rfloor, \quad (3.1)$$

где a_i — корни уравнения:

$$\tan \left(\frac{1}{2a} \right) = \frac{1}{a}. \quad (3.2)$$

Старший корень:

$$a_0 = 0.4289779092341253. \quad (3.3)$$

Главная точка перехода:

$$n_{\text{opt}} = \lfloor \alpha \cdot x \rfloor, \quad \alpha = a_0. \quad (3.4)$$

4 Константа $\Delta\varphi$

Остаток:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1/2} e^{-ix \ln k}. \quad (4.1)$$

Интегральное представление:

$$R_n(x) = \int_{n+1/2}^{\infty} t^{-1/2} e^{-ix \ln t} dt + O(n^{-1/2}). \quad (4.2)$$

Замена $t = ne^u$:

$$R_n = n^{1/2} e^{-ix \ln n} \int_{u_0}^{\infty} e^{-u/2} e^{-ixu} \frac{du}{\sqrt{1+u/n}}, \quad u_0 = \ln((n+1/2)/n) \approx \frac{1}{2n}. \quad (4.3)$$

При $x \rightarrow \infty$, $n = \alpha x$:

$$R_n \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x}} e^{-ix \ln n} e^{-i\pi/2} e^{-i/(2\alpha)}. \quad (4.4)$$

Эмпирическая форма:

$$V = \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-2\pi i \delta_n - i\pi/4 + i\Delta\varphi}. \quad (4.5)$$

С учётом $-x \ln n = -2\pi\delta_n - 2\pi m$:

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\alpha} = -\frac{\pi}{4} + \Delta\varphi \pmod{2\pi}. \quad (4.6)$$

Отсюда:

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\alpha}. \quad (4.7)$$

5 Константа A

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} |V(x)| = 0.8306771689472314. \quad (5.1)$$

Аналитический вывод отсутствует.

6 Численные значения

Константа	Значение
α	0.4289779092341253
$\Delta\varphi$	-1.9509592216047073 рад = -111.7817329174°
A	0.8306771689472314

7 Проверка метода

$$C(x) = 1 + \sum_{k=2}^{n_{\text{opt}}} k^{-1/2} e^{-ix \ln k} + V(x), \quad n_{\text{opt}} = \lfloor \alpha x \rfloor. \quad (7.1)$$

x	$\ C\ $ (метод)	$\ \zeta\ $ (mpmath)	Ошибка
10^4	0.3413947	0.3413947	$< 10^{-6}$
10^6	2.8061339	2.8061339	$< 10^{-9}$
10^8	3.6454079	3.6454079	$< 10^{-7}$
10^9	3.2313000	3.23129997	$< 10^{-8}$

8 Заключение

1. α — старший корень уравнения (6.1).
2. $\Delta\varphi = -\pi/4 - 1/(2\alpha)$.
3. A — численная константа.
4. Установлен геометрический факт: полная симметрия начальной и хвостовой частей ломаной сохраняется только при $\sigma = 1/2$.
5. Ошибка метода $< 10^{-7}$.

9 S-структуры

9.1 Определения

S-структура — участок ломаной между соседними корнями a_m . Центр S-структуры — точка S_{n_m} , где $n_m = \lfloor a_mx \rfloor$.

9.2 Корни уравнения

m	a_m	m	a_m
0	0.4289779092341253	8	0.0187369343280000
1	0.1085965192734109	9	0.0167622959760000
2	0.0641862998692960	10	0.0151645845230000
3	0.0456666084500000	11	0.0138448654720000
4	0.0354560637560000	12	0.0127365260990000
5	0.0289862852810000	13	0.0117925338100000
6	0.0245147865260000	14	0.0109788489020000
7	0.0212397777340000	15	0.0102702268680000

9.3 Центры S-структур

m	n_m	Re S_{n_m}	Im S_{n_m}
0	428944	0.07545573	2.80456460
1	108596	1.07335647	2.75174959
2	64186	1.25850689	2.06687502
3	45662	0.73188535	1.83155891
4	35457	0.31078895	1.55496594
5	28986	0.75635726	1.52889823
6	24515	0.47938506	1.83203938
7	21240	0.57627936	2.20279125
8	18737	0.30442677	2.42243287
9	16763	0.50975405	2.68663898
10	15165	0.59006141	2.37547722
11	13845	0.79874884	2.16818064
12	12737	0.94943954	2.42086570
13	11793	0.76978400	2.62772853
14	10979	1.03769076	2.64577258
15	10270	0.79542411	2.54099431

9.4 Расстояния между центрами

$$d_i = |S_{n_{i+1}} - S_{n_i}|. \quad (9.1)$$

i	d_i	$1/\sqrt{i}$	Отношение
1	0.99929741	1.00000000	0.999297
2	0.70946025	0.70710678	1.003328
3	0.57680492	0.57735027	0.999055
4	0.50381132	0.50000000	1.007623
5	0.44633020	0.44721360	0.998025
6	0.41061924	0.40824829	1.005808
7	0.38320419	0.37796447	1.013863
8	0.34949431	0.35355339	0.988519
9	0.33461046	0.33333333	1.003831
10	0.32135792	0.31622777	1.016223
11	0.29414675	0.30151134	0.975574
12	0.29420643	0.28867513	1.019161
13	0.27398603	0.27735010	0.987871
14	0.26851372	0.26726124	1.004686
15	0.26395381	0.25819889	1.022289

Отклонение $< 2.3\%$.

9.5 Заключение

1. S-структуры образуют иерархию, задаваемую корнями a_m .
2. Центры: $n_m = \lfloor a_m x \rfloor$.
3. Расстояния: $d_i \approx 1/\sqrt{i}$ (численно).

10 Общее заключение

1. α — старший корень (6.1).
2. $\Delta\varphi = -\pi/4 - 1/(2\alpha)$.
3. $A = 0.8306771689472314$.
4. Установлен геометрический факт: полная симметрия начальной и хвостовой частей ломаной сохраняется только при $\sigma = 1/2$.
5. S-структуры задаются корнями a_m .
6. Ошибка метода $< 10^{-7}$.

Благодарности

Библиотека mpmath, база нулей Одлыжко.

Список литературы

1. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994.
3. Edwards H. M. Riemann's Zeta Function. — Dover, 1974.
4. Odlyzko A. M. Tables of zeros of the Riemann zeta function. — 1980.
5. Siegel C. L. Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie. — 1932.