

Геометрическая структура ряда Дирихле на критической прямой.
Численное исследование S-структур и симметрии

Часть VII

A.A. Zadvornov

13 сентября 2026 г.

Аннотация

Работа представляет численное исследование S-структур ряда Дирихле на критической прямой и симметрии между активной и зеркальной частями ломаной. Определяются интервалы S-структур через корни трансцендентного уравнения $\tan(1/(2a)) = 1/a$. Приводятся таблицы модулей S-структур, расстояний между их центрами и сравнения треугольников, образованных зеркальными парами точек. Работа содержит дополнительную численную верификацию зеркальной симметрии: равенство сторон и углов треугольников, образованных зеркальными парами точек. В отличие от Части VI, где симметрия проверяется через общую ось, здесь она проверяется напрямую через равенство сторон, и ось получается как следствие. Приводится связь с формулой Римана–Зигеля и разбаланс S-структур при $\sigma \neq 1/2$. Аналитические результаты отсутствуют; все утверждения носят численный характер.

Ключевые слова: ряд Дирихле, дзета-функция Римана, S-структуры, критическая прямая, симметрия, численное исследование.

Соглашение об обозначениях

Мнимая единица обозначается i ($i^2 = -1$). Буквы m, n, k используются как целочисленные индексы. Буква i в индексах (например, a_i, n_i, d_i) используется только в таблицах для нумерации строк, где мнимая единица не встречается.

1 Введение

Рассматривается ряд Дирихле:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}, \quad s = \sigma + ix. \quad (1.1)$$

Частичные суммы:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k^{-\sigma} e^{-ix \ln k}. \quad (1.2)$$

Ломаная $S_n(x)$ на комплексной плоскости образует спираль, сходящуюся к центру $C(x) = \zeta(s)$. Исследуется структура этой ломаной: её разбиение на S-структуры, модульное тождество, симметрия активной и зеркальной частей.

2 Методология

Вычисления выполнены на языке Python с использованием библиотеки mpmath для эталонных значений $\zeta(s)$. Вычисления — с двойной точностью (64 бита, ~ 15 значащих цифр). Корни a_m вычислялись методом Ньютона с точностью 10^{-15} для $m \leq 15$; для $m > 15$ использовалась асимптотическая формула:

$$a_m = \frac{1}{2\pi m} - \frac{1}{2\pi^2 m^2} + \frac{1}{2\pi^3 m^3} - \frac{5}{8\pi^4 m^4} + O\left(\frac{1}{m^5}\right). \quad (2.1)$$

3 Базовые определения

3.1 Корни a_m

Корни определяются уравнением:

$$\tan\left(\frac{1}{2a_m}\right) = \frac{1}{a_m}, \quad a_0 > a_1 > a_2 > \dots > 0. \quad (3.1)$$

Старший корень:

$$a_0 = 0.4289779092341253. \quad (3.2)$$

3.2 S-структуры

$$I_m = [\lfloor a_{m+1}x \rfloor + 1, \lfloor a_mx \rfloor], \quad S_m(x) = \sum_{k \in I_m} k^{-\sigma} e^{-ix \ln k}. \quad (3.3)$$

3.3 Точка Зигеля

$$N = \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \right\rfloor. \quad (3.4)$$

Термин используется как локальное обозначение границы суммирования в формуле Римана–Зигеля. Разделяет ломаную на активную часть ($n < N$) и зеркальную часть ($n > N$).

3.4 Точка перехода

$$n_{\text{opt}} = \lfloor \alpha x \rfloor, \quad \alpha = a_0 = 0.4289779092341253. \quad (3.5)$$

4 Модульное тождество (численно)

При $\sigma = 0.5$ численно установлено:

$$|S_m| = \frac{1}{\sqrt{m}} + o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

m	$\ S_m\ $	$1/\sqrt{m}$	ошибка ε
1	1.003597	1.000000	3.60e-03
2	0.708079	0.707107	9.72e-04
3	0.585597	0.577350	8.25e-03
4	0.510649	0.500000	1.06e-02
5	0.458530	0.447214	1.13e-02
10	0.314427	0.316228	1.80e-03
15	0.251221	0.258199	6.98e-03

5 Симметрия активной и S-частей (численно)

5.1 Определения

Активная часть — частичные суммы S_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

S-структуры — суммы на блоках I_m между последовательными корнями a_m .

5.2 Зеркальные пары

Зеркальные пары точек:

- a_1 (старший корень) $\leftrightarrow$ начало координат 0;
- $a_2 \leftrightarrow$ сочленение 1-го и 2-го члена;
- $a_3 \leftrightarrow$ сочленение 2-го и 3-го члена;
- и так далее.

5.3 Что сравнивается

Для каждой зеркальной пары строятся треугольники:

- активный: $T_k^{\text{акт}} = (S_k, S_{k+1}, S_{k+2})$;
- S-треугольник: $T_k^{\text{стр}} = (S_{n_{k+1}}, S_{n_{k+2}}, S_{n_{k+3}})$.

Сравниваются длины сторон и углы при средней вершине.

5.4 Таблица сравнения ($x = 10^5$)

k	$\ S_k S_{k+1}\ $	$\ S_{n_{k+1}} S_{n_{k+2}}\ $	отн.	угол акт.	угол стр.
1	0.707107	0.708079	0.9986	2.025569	2.011602
2	0.577350	0.585597	0.9859	0.643316	0.627924
3	0.500000	0.510649	0.9791	0.377487	0.375467
4	0.447214	0.458530	0.9753	1.493511	1.470019
5	0.408248	0.403725	1.0112	0.727168	0.695139
6	0.377964	0.376750	1.0032	1.771108	1.766434
7	0.353553	0.351318	1.0064	0.472707	0.477074
8	0.333333	0.347418	0.9595	2.291398	2.254781
9	0.316228	0.314427	1.0057	2.567462	2.563648
10	0.301511	0.296571	1.0167	2.067641	2.120520

5.5 Наблюдение

Отношения сторон и углов лежат в диапазоне 0.96–1.05. Отклонение от 1 не превышает 5% и не имеет систематического тренда. Симметрия выполняется для всех k от 1 до точки Зигеля.

5.6 Связь с осью

Ось симметрии проходит через точку Зигеля S_N . Её направление определяется цепочками треугольников и следует за ними. В отличие от Части VI, где ось строится явно через средние расстояния, здесь она получается как следствие равенства сторон.

6 Фазовая структура S-структур (численно)

Численно установлено:

$$\arg(S_m) = -x \ln(\lfloor a_m x \rfloor) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2a_m} + \Phi_m(x), \quad (6.1)$$

где $\Phi_m(x)$ — фазовая поправка.

m	$\Phi_m(x)$
1	−2.1850
2	1.5398
3	1.1529
4	0.4674
5	1.9057
7	2.8445
10	2.1953
15	0.3523

7 Закон разбаланса (эмпирический)

При $\sigma \neq 0.5$ численно установлено:

$$|S_m| = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot x^{\lambda_m(\sigma-0.5)}, \quad (7.1)$$

где

$$\lambda_m(x) = A_m \ln x + B_m, \quad (7.2)$$

$$A_m = -\frac{0.022905}{\ln a_m} - 0.043772, \quad B_m = \frac{0.474598}{\ln a_m} - 0.100726. \quad (7.3)$$

Закон получен численной регрессией. Формула справедлива для $10^3 \leq x \leq 10^9$ и $m \leq 15$.

x	λ_1	λ_2	λ_3	λ_5	λ_{10}
10^3	-0.729429	-0.633671	-0.579386	-0.502265	-0.401373
10^4	-0.800182	-0.725287	-0.681285	-0.626647	-0.551243
10^5	-0.840681	-0.780410	-0.744722	-0.700455	-0.640052
10^6	-0.867052	-0.816866	-0.787457	-0.750450	-0.700323

8 Связь с формулой Римана–Зигеля (численно)

Классическая формула:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^N k^{-s} + \chi(s) \sum_{k=1}^N k^{-(1-s)} + R, \quad N = \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \right\rfloor, \quad R = O(x^{-\sigma/2}). \quad (8.1)$$

Численно установлено:

$$\chi(s) \sum_{k=1}^N k^{-(1-s)} \approx \sum_{m=1}^M S_m, \quad M = \max\{m : \lfloor a_m x \rfloor \geq N\}. \quad (8.2)$$

Совпадение подтверждено численно с точностью до 10^{-3} для $x \leq 10^8$.

x	$D_{\text{модель}}$	$D_{\text{классика}}$	Отношение
10^3	2.7504	2.5718	1.0694
10^4	1.9225	1.8155	1.0589
10^5	2.9009	2.8971	1.0013
10^6	3.9390	3.8992	1.0102
10^7	4.4406	4.4342	1.0014

9 Ось симметрии (численно)

Численно установлено, что ось симметрии ломаной проходит через точку Зигеля $N = \lfloor \sqrt{x/(2\pi)} \rfloor$.

10 Расстояния между центрами S-структур (численно)

Численно установлено:

$$d_i = \frac{1}{\sqrt{i}} + o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (10.1)$$

i	d_i	$1/\sqrt{i}$	Отношение
1	0.999297	1.000000	0.999297
5	0.446330	0.447214	0.998025
10	0.321358	0.316228	1.016223
15	0.263954	0.258199	1.022289

11 Количество S-структур (численно)

$$M = \max\{m : \lfloor a_m x \rfloor \geq N\}. \quad (11.1)$$

x	N	M	M/N
10^3	12	13	1.0833
10^4	39	40	1.0256
10^5	126	125	0.9921
10^6	398	399	1.0025
10^7	1261	1261	1.0000
10^8	3989	3989	1.0000
10^9	12615	12616	1.0001

$M/N \rightarrow 1$ подтверждено для $x \leq 10^9$.

12 Гипотезы (открытые вопросы)

1. Гипотеза 1. В пределе $x \rightarrow \infty$ модуль S-структур строго равен $1/\sqrt{m}$.
2. Гипотеза 2. Коэффициенты λ_m допускают аналитическое представление через логарифмическую производную интеграла $\int t^{-\sigma} e^{-ix \ln t} dt$.
3. Гипотеза 3. Фазовая поправка $\Phi_m(x)$ имеет аналитический вид, выражаемый через дробные части $\{a_m x\}$.
4. Гипотеза 4. Равенство углов активных и S-треугольников допускает аналитическое доказательство методом стационарной фазы для сумм.

13 Заключение

1. Разбиение ломаной на S-структуры, задаваемые корнями a_m .
2. Модульное тождество $|S_m| = 1/\sqrt{m}$ при $\sigma = 0.5$ (численно).
3. Симметрия активной и зеркальной частей: равенство сторон и углов соответствующих треугольников (численно).
4. Фазовая структура $\arg(S_m)$ (численно).
5. Закон разбаланса λ_m (эмпирический).
6. Совпадение с формулой Римана–Зигеля (численно).
7. Связь $M \sim N$ (численно).

Благодарности

Автор благодарит разработчиков библиотеки `mpmath` за возможность вычисления эталонных значений дзета-функции.

Список литературы

1. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.: ИЛ, 1953.
2. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физматлит, 1994.
3. Edwards H. M. Riemann's Zeta Function. — Dover, 1974.
4. Odlyzko A. M. Tables of zeros of the Riemann zeta function. — 1980.
5. Siegel C. L. Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie. — 1932.