

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН СЛОЁВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Селюгин С.В.

e-mail: *selyugin@rambler.ru*

Рассмотрена задача максимизации жесткости (минимизации податливости) тонких композитных пластин за счёт выбора наилучшей локальной ориентации волокон слоёв. Пластины – линейно-упруги, находятся в условиях изгиба и растяжения-сдвига (при положительных главных мембранных усилиях), подчиняются гипотезе Кирхгоффа и описываются геометрически нелинейным приближением фон Кармана. На основе использования экстремальных кинематического и статического вариационных принципов построена эволюционная методика оптимизации углов ориентации волокон слоев таких пластин. Приведен и проанализирован иллюстративный численный пример определения локальных ориентаций осей ортотропии ортотропной пластины.

Ключевые слова: композитная пластина, геометрическая нелинейность, приближение фон Кармана, углы укладки волокон слоёв, максимизация жесткости.

1. Введение

Конструкции из композиционных материалов широко используются в различных областях техники. Так, например, в конструкции самолетов B787 и A350, из композиционных материалов изготавливается (по весу) около 50% силовых конструкций. При этом следует отметить, что композитные крылья являются значительно более гибкими, чем алюминиевые. Это означает, что в процессе проектирования необходимо учитывать так называемую геометрическую нелинейность, то есть, использовать, в качестве первого приближения, модель деформирования фон Кармана.

Нижние панели композитных крыльев находятся в условиях растяжения-сдвига и изгиба. Настоящая работа посвящена построению методики жесткостной оптимизации углов ориентации волокон слоёв пластин и панелей, имеющих положительные главные мембранные усилия и деформируемых в приближении фон Кармана.

Работа состоит из Введения и пяти Разделов.

В Разделе 2 приведены основные предположения.

В Разделе 3 обсуждаются теоретические основы механики деформирования композитных пластин фон Кармана.

В Разделе 4 описано построение эволюционного алгоритма жесткостной оптимизации укладки композитных пластин фон Кармана.

Раздел 5 приведен иллюстративный пример жесткостной оптимизации ортотропной пластины.

В Разделе 6 представлено заключение работы.

2. Предположения

В работе приняты следующие предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины. Пластина нагружена изгибом распределенной нагрузкой $q(x,y)$, растяжением и сдвигом, и деформируется в соответствии с приближением фон Кармана. Главные значения мембранных усилий при этом предполагаются положительными. Толщина пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 заданы силы, действующие в плоскости, а на C_2 – перемещения по x , y , z .

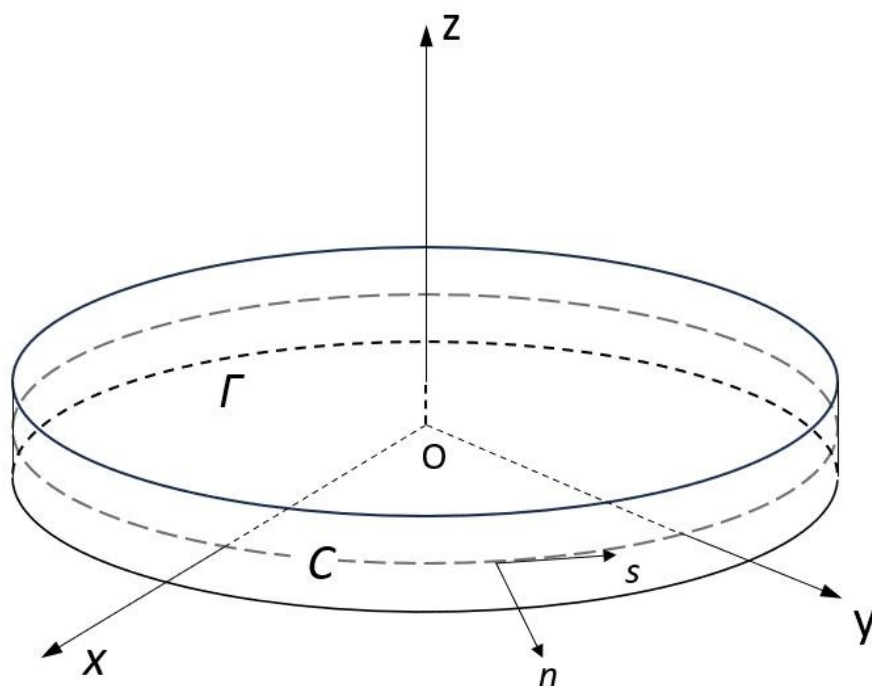


Рис. 1. Тонкая пластина.

Волокна слоев композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Приняты гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали к поверхности Γ , означающие равенство нулю xz , yz , zz компонент тензора деформаций Грина.

Приняты краевые условия защемления по контуру C_2 .

Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

3. Теоретические основы

Компоненты тензора деформаций Грина ε_{ij} точек внутри пластины как функции x - y - z перемещений u , v , w в срединной плоскости записываются в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - zw_{,xx} \\ \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 - zw_{,yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy} \end{cases} \quad (1)$$

Вводятся векторы-столбцы

$$\vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Также нам потребуются векторы-столбцы погонных сил $\vec{N}$ и погонных моментов $\vec{M}$:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \end{pmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \end{pmatrix} \quad (3)$$

которые выражаются через деформации, кривизны и матрицы жесткости композитной пластины A и D (см. Gibson 1994):

$$\vec{N} = A\vec{\varepsilon}_0, \quad \vec{M} = D\vec{k} \quad (4)$$

Как известно (Васильев 1988, Reddy 2004), кинематика деформирования рассматриваемой консервативно нагруженной пластины описывается кинематическим вариационным принципом. В соответствии с этим принципом разность U функционалов общей потенциальной энергии деформации пластины Π и потенциала внешних сил W стационарна по x, y, z перемещениям u, v, w точек пластины. Имеем

$$\delta U = \delta \Pi - \delta W = 0$$

(δ – символ вариации), где общая потенциальная энергия деформации пластины

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] \quad (5)$$

а потенциал внешних сил

$$W = \iint qwd\Gamma + \int dC_1 [N_{xv}u + N_{yv}v] \quad (6)$$

где интегрирование ведется по всей недеформированной срединной поверхности Γ пластины, A и D – соответственно матрицы мембранной и изгибной жесткости пластины, а N_{xv}, N_{yv} – заданные нагрузки - потоки сил в плоскости пластины, действующие соответственно в направлении x, y на части C_1 внешнего контура C .

Функционал общей потенциальной энергии U пластины запишется в виде:

$$U = \frac{1}{2} \iint d\Gamma [\vec{\varepsilon}_0^T A \vec{\varepsilon}_0 + \vec{k}^T D \vec{k}] - \iint qwd\Gamma - \int dC_1 [N_{xv}u + N_{yv}v] \quad (7)$$

Как известно, первая вариация функционала (7) по переменным u, v, w приводит к уравнениям равновесия по соответствующим степеням свободы.

Соответствующие кинематический и статический вариационные принципы описаны в (Селюгин 2024a, b, 2025).

Так называемый дополнительный вариационный функционал U_c записывается в виде:

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \text{члены с интегралами по контуру } C_2 \quad (8)$$

(где π_c - плотность дополнительной энергии на единицу площади недеформированной пластины), к которому надо добавить интегралы по поверхности пластины от произведений уравнений равновесия по x , y , z и некоторых множителей Лагранжа.

Плотность дополнительной энергии на единицу площади пластины π_c в (8) дается выражением:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} + \frac{1}{2} N_{xz}^2 \frac{N_y}{N_x N_y - N_{xy}^2} + \frac{1}{2} N_{yz}^2 \frac{N_x}{N_x N_y - N_{xy}^2} - \frac{N_{xz} N_{yz} N_{xy}}{N_x N_y - N_{xy}^2} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} N_{xz} &= N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} \\ N_{yz} &= N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y} \end{aligned} \quad (10)$$

В соответствии со статическим вариационным принципом дополнительный вариационный функционал U_c достигает максимума по статически возможным усилиям и моментам. С учетом знака у дополнительной энергии в (8) это говорит о минимуме общей дополнительной энергии в этих условиях.

Условия оптимальности 1-го порядка углов укладки волокон слоёв для композитной пластины фон Кармана при закритическом деформировании приведены в (Селюгин 2024а). Анализ их вывода (базирующегося на кинематическом вариационном принципе для общей потенциальной энергии пластины) приводит к заключению, что эти условия справедливы и для рассматриваемой задачи оптимизации укладки растянуто-изогнутой композитной пластины фон Кармана при умеренных, но не малых прогибах.

Общая потенциальная энергия пластины U (7) рассматривается как мера её жёсткости, а общая дополнительная энергия

$$\Pi_c = \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma \quad (11)$$

рассматривается как мера податливости пластины. Эта жёсткость (податливость) и является величиной, которая должна быть максимизирована (минимизирована) за счёт выбора наилучшей укладки.

Условия оптимальности в рассматриваемой задаче представлены в работе Селюгин (2024а).

4. Построение методики жесткостной оптимизации пластины

Перейдем к построению алгоритма оптимизации углов укладки волокон слоев, в смысле максимизации обобщенной жесткости пластины или минимизации ее обобщенной податливости. В качестве меры обобщенной жесткости пластины примем ее общую потенциальную энергию U , а в качестве меры обобщенной податливости пластины примем ее общую дополнительную энергию P_c .

При построении алгоритма будем основываться на использовании конечно-элементной (КЭ) модели пластины, предполагая положительность мембранных усилий. Важно отметить, что разрабатываемый алгоритм, как будет доказано ниже, обладает свойствами монотонности. Этот алгоритм основан на идеях подобных алгоритмов для изотропных конструкций (Selyugin 2001).

Алгоритм заключается в итерационном выполнении двух последовательных шагов:

1. Для фиксированного поля внутренних усилий отыскиваются углы укладки волокон слоев, приводящие к минимуму дополнительной энергии $(P_c)_{elem}$ каждого КЭ конструкции с площадью S_{elem} , усилиями в центре элемента $N_x, N_y, N_{xy}, N_{xz}, N_{yz}$ и моментами $\vec{M}$ и обратными матрицами жесткости в центре элемента A^{-1}, D^{-1} , зависящими известным образом (Gibson 1994) от углов укладки волокон слоев:

$$(P_c)_{elem} = S_{elem} \left(\frac{1}{2} \vec{N}^T A^{-1} \vec{N} + \frac{1}{2} \vec{M}^T D^{-1} \vec{M} \right) +$$

члены, не зависящие от углов укладки (12)

2. Пересчет деформированного состояния всей конструкции для углов укладки волокон, полученных на шаге 1.

На шаге 1, по построению алгоритма, дополнительная энергия - уменьшается в каждом КЭ, и общая дополнительная энергия (как сумма этих энергий) - во всей конструкции. На шаге 2 общая дополнительная энергия также уменьшается, вследствие статического вариационного принципа.

5. Пример

Рассматривается квадратная ортотропная пластина 400×400 мм, толщиной 2 мм, безмоментно опертая по контуру. Пластина нагружена давлением 0.035 Н/кв.мм. Характеристики ортотропного материала (соответственно, модули Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона): $E_1 = 66000$ МПа, $E_2 = 22000$ МПа, $G = 11000$ МПа, $\mu = 0.25$.

На Рис. 2 показана левая нижняя четверть пластины (20×20 КЭ), ее центр соответствует правому верхнему углу. Рис. 2 иллюстрирует результаты расчета наилучшей ориентации при начальном приближении 0° (слева) и 45° (справа).

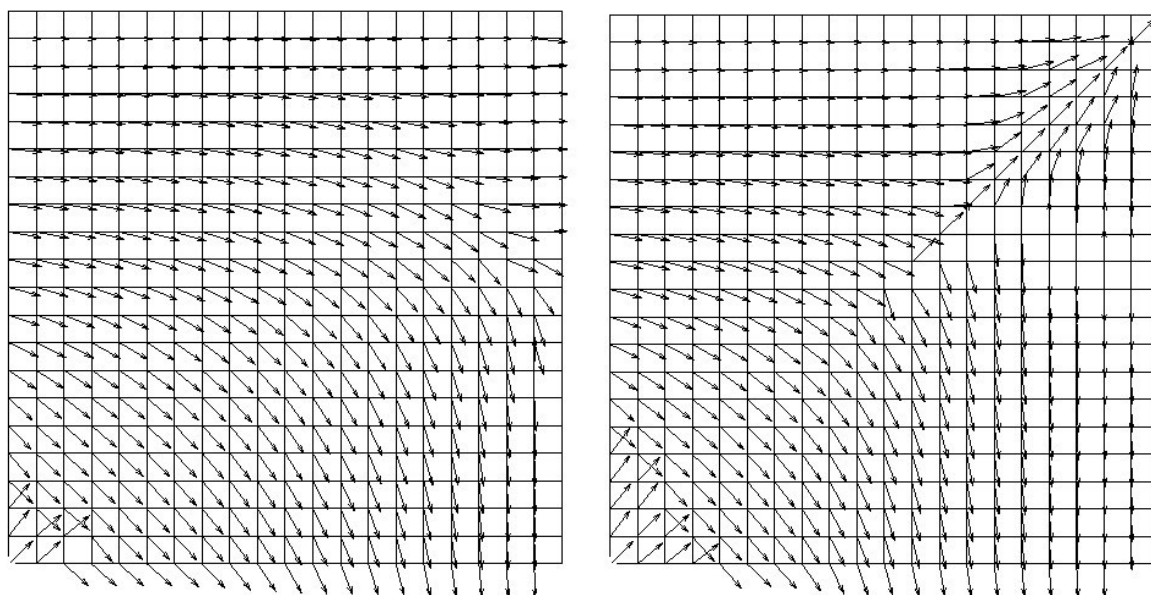


Рис. 2. Полученные ориентации направлений ортотропии пластины при начальном приближении 0° (слева) и 45° (справа)..

Результаты ориентаций (направлений, соответствующих модулю ортотропии E_1) в конечных элементах здесь и далее показаны для левого нижнего угла каждого элемента. Полученные различные конфигурации имеют очень близкие значения (до долей %) общей дополнительной энергии (2989.4 Н*мм и 2987.5 Н*мм, соответственно) и прогиба в центре пластины (6.39 мм и 6.31 мм, соответственно). Эти результаты говорят о наличии не менее чем двух наилучших решений для ориентаций ортотропии. Отмечается, что для полученных решений общая дополнительная энергия пластины более чем в два раза превосходит общую потенциальную энергию деформации, что говорит о развитом геометрически нелинейном деформировании.

Из Рис. 2 видно, что для обоих решений характерно появление области с ориентацией -45° вблизи угла пластины.

Рис. 3 иллюстрирует изменение (последовательное снижение) энергетических характеристик пластины по итерациям, для начального приближения 45° .

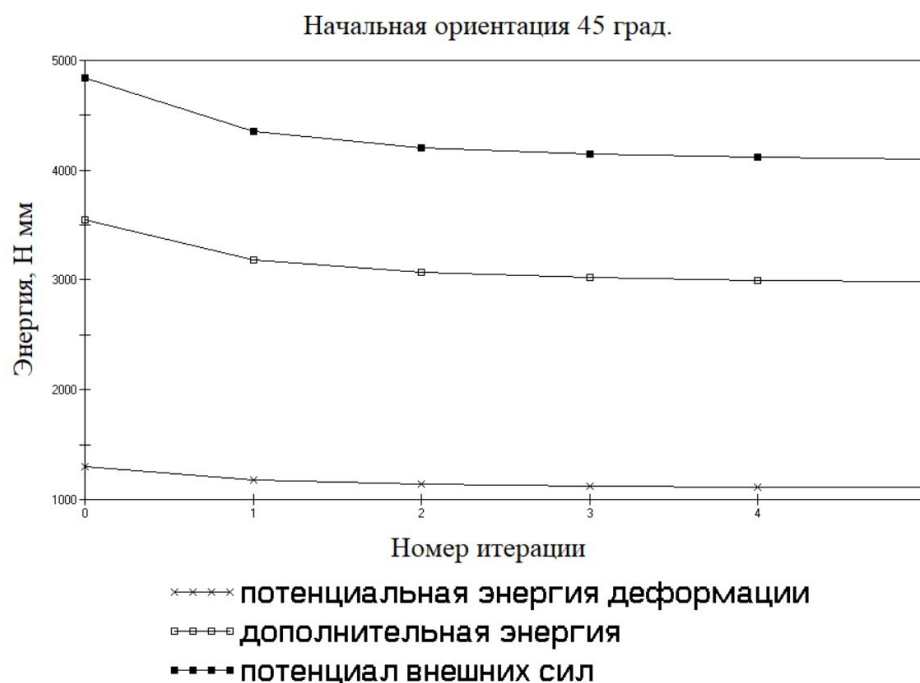


Рис. 3. Изменение энергетических характеристик по итерациям (для начального приближения 45°).

Инфинитезимальное (используя SOL101 Настрана) решение иллюстрирует Рис. 4 (только прогибы, нет мембранных сил): 0° (слева) и 45° (справа). Конечные значения общей потенциальной энергии деформации 3137. и 3341., соответственно. То есть, полученные решения заметно различаются по энергии, и решение слева (для начального приближения 0°) - более жесткое. Отметим, что перемещения в центре пластины превосходят их значения с Рис. 2 более чем в 10 раз, что практически при такой нагрузке давления - нереалистично.

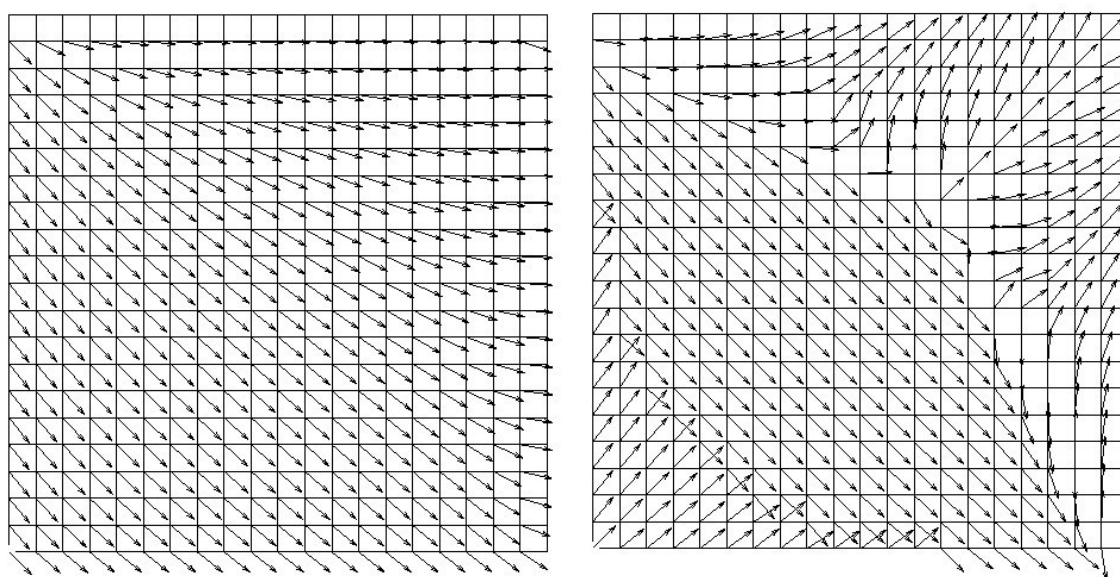


Рис. 4. Полученные ориентации для инфинитезимального случая, начальное приближение 0° (слева) и 45° (справа).

В обоих решениях Рис. 4 присутствуют области значительной величины с ориентацией -45° , тяготеющие к углам пластины.

6. Заключение

Предложена эволюционная методика оптимизации углов ориентации волокон слоёв композитных пластин фон Кармана.

Доказано и показано на примере, что использование разработанного подхода ведет к монотонному уменьшению общей дополнительной энергии пластины.

Возможно обобщение методики на случай мембранных сил любых знаков, в отсутствие потери устойчивости.

Возможно обобщение методики на случай несимметричной укладки слоев, в отсутствие потери устойчивости.

Литература

Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.:

Селюгин С. В. 2024(а) Анализ и проектирование пластин и панелей из композиционных материалов. М.: МАИ, 155 с.

Селюгин С. В. 2024(в) Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин, Известия РАН, Механика Твердого Тела, 2024, N3, 148-163.

Селюгин С. В. 2025. О двойственных вариационных принципах для композитных пластин фон Кармана. PREPRINTS.RU.
<https://doi.org/10.24108/preprints-3113661>

Gibson R. Principles of composite material mechanics. McGraw-Hill, 1994.

Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis, 2nd Edition. CRC Presss, N-Y, 2004.

Selyugin S. Optimization algorithms for physically non-linear structures. March 2001, International Journal for Numerical Methods in Engineering 50(9): 2211 - 2232, DOI: [10.1002/nme.121](https://doi.org/10.1002/nme.121)