

ИНВАРИАНТНОЕ УСРЕДНЕНИЕ СЕМЕЙСТВА РЕШЕНИЙ КОТTLERA ВАКУУМНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА С $\pm\Lambda$ -ЧЛЕНОМ

Михаил Батанов-Гаухман¹

(1) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Институт № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки”,
ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993
(e-mail: alsignat@yandex.ru)
20 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

В статье предлагается использовать семейство Коттлера из 10 метрик-решений вакуумного уравнения Эйнштейна с $\pm\Lambda$ -членом в рамках построения одной системы. Для этого предлагается использовать инвариантное усреднение скаляров, связанных с каждым решением данного семейства Коттлера. В результате получены усредненные скаляры инварианты кривизны исследуемого участка пространства: $\langle C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \rangle = 12r_b^2/r^6$, $\langle R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle = 36/r_a^4$, $\langle g_{00} \rangle = 1$, $\langle R \rangle = 0$, $\langle R_{00} \rangle = 3c^2 r^2/r_a^4$, $\langle K \rangle = 12r_b^2/r^6 + 24/r_a^4$, $\langle l_r^{(+)} \rangle = \langle \frac{\Delta r}{r} \rangle = \langle \sqrt{g_{11}} - 1 \rangle$ и другие. На основании полученных результатов усреднения рассмотрены математические модели двух взаимно-противоположных стабильных сферических вакуумных образований, и выявлены противоречия данной методики. Для преодоления возникших сложностей предложено использовать расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна с конечной разностью большого количества положительных и отрицательных $\pm\Lambda$ -членов. Такой подход может быть предложен для создания Иерархической космологической модели, как части единого исследования под общим названием «Геометризованная физика вакуума на основе Алгебры сигнатур», нацеленного на развитие программы Клиффорда - Эйнштейна - Уилера по полной геометризации физики.

ABSTRACT

This article proposes treating the Kottler family of 10 metric solutions of the Einstein vacuum equation with a $\pm\Lambda$ -term within a single system. To this end, we propose the invariant averaging of the scalars associated with each solution of this Kottler family. As a result, averaged scalars and curvature invariants of the region of space under study are obtained: $\langle C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \rangle = 12r_b^2/r^6$, $\langle R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle = 36/r_a^4$, $\langle g_{00} \rangle = 1$, $\langle R \rangle = 0$, $\langle R_{00} \rangle = 3c^2 r^2/r_a^4$, $\langle K \rangle = 12r_b^2/r^6 + 24/r_a^4$, $\langle l_r^{(+)} \rangle = \langle \frac{\Delta r}{r} \rangle = \langle \sqrt{g_{11}} - 1 \rangle$ and others. On the basis of these averaging results, mathematical models of two mutually opposite stable spherical vacuum formations are considered, and contradictions of this method are identified. To overcome the resulting difficulties, an extended Einstein vacuum equation with a finite difference of a large number of positive and negative $\pm\Lambda$ -terms is proposed. This approach may serve as a basis for a Hierarchical Cosmological Model, as part of a unified study entitled “Geometrized Vacuum Physics Based on the Algebra of Signatures”, aimed at the development of the Clifford–Einstein–Wheeler program for the complete geometrization of physics.

Ключевые слова: проблема усреднения, метрика Коттлера, многообразие Эйнштейна, пространство де Ситтера / анти-де Ситтера, сигнатура метрики, вакуум, метрические решения, вакуумное уравнение, космологическая модель, относительное удлинение вакуума

Keywords: averaging problem, Kottler metric, Einstein manifold, de Sitter / anti-de Sitter space, metric signature, vacuum, metric solutions, vacuum equation, cosmological model, relative elongation of the vacuum

1 Введение

*Математика подводит нас к Вратам
Истины, но этих Врат не открывает.
В. Одоевский*

Вакуумное уравнение Эйнштейна с Λ -членом (или многообразие Эйнштейна) имеет вид:

$$R_{ik} = \Lambda g_{ik}, \quad (1)$$

где g_{ik} – компоненты метрического тензора гладкого 4-мерного пространства с псевдоримановой метрикой $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$;

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l - \text{тензор Риччи}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{ik}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) - \text{символы Кристоффеля}, \quad (3)$$

$$T_{ik} = 0 - \text{нулевой тензор энергии-импульса внешнего материального источника (источник отсутствует)}, \quad (4)$$

$$\Lambda = 3/r_a^2 - \text{постоянная величина (где } r_a - \text{радиус сферы, или радиус де Ситтера)}. \quad (5)$$

Вакуумное уравнение (1), как результат решения вариационной задачи Эйнштейна–Гильберта, базируется на следующих фундаментальных принципах и аксиомах, лежащих в основе современной физики [1–14]*: общей ковариантности, координатной инвариантности, эквивалентности, независимости скорости света от системы отсчета, причинности, экстремума действия, относительности, квазилинейности, диффеоморфной инвариантности, масштабной инвариантности и самосогласованности.

*1] Принцип общей ковариантности (т.е. независимость вида уравнений и инвариантов от выбора системы координат или системы отсчета; в сущности, тензорный характер уравнений) [1];

2] Принцип координатной инвариантности (т.е. независимость законов физики от выбора системы координат). Различие между общей ковариантностью и координатной инвариантностью заключается в том, на какой объект направлено требование неизменности: на форму записи уравнений или на значение физической величины;

3] Принцип эквивалентности (т.е. локальные искривления, движения и ускорения ставятся в соответствие локальным системам отсчета). Понятие «силы» заменено на движение по инерции в искривленном пространстве-времени;

4] Принцип независимости скорости света от системы отсчета (т.е. объединение пространства и времени в единый пространственно-временной континуум с метрикой вида $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$);

5] Принцип причинности (т.е. любое событие может оказать причинно-следственное влияние только на те события, которые происходят позже него, т.е. внутри светового конуса с радиусом не более $l = cdt$, где dt – промежуток времени между событиями);

6] Принцип экстремума действия (геодезические линии искривленного 4-мерного пространства экстремальны). Давид Гильберт показал, что тензор $R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik}$, входящий в основное уравнение ОТО Альберта Эйнштейна, может быть получен на основании вариационного принципа наименьшего действия из лагранжиана $L = R\sqrt{-g}$ (где $R = g^{ik}R_{ik}$ – скалярная кривизна (т.е. инвариант Римана), $g = |g_{ik}|$ – детерминант матрицы g_{ik});

7] Принцип симметрии (условия неизменчивости, из которых вытекают законы сохранения);

8] Принцип относительности (в уравнение (1) входят только относительные величины, включая время);

9] Квазилинейность: Несмотря на нелинейность, уравнение (1) является квазилинейным, поскольку старшие (вторые) производные входят в него линейно. Это гарантирует, что задача Коши (эволюция во времени) корректно поставлена при гладких начальных условиях;

10] Диффеоморфная инвариантность (калибровочная свобода): Если g_{ik} является решением, то любое решение, полученное применением произвольной замены координат (диффеоморфизма), также будет решением. Это означает, что система содержит 4 степени свободы (физических) из 10 компонент метрики. Остальные 6 – это калибровочные (ограниченные) степени свободы;

11] При $T_{\mu\nu} = 0$ условие $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ выполняется тривиально. Поэтому любые пробные частицы в таком пространстве движутся по геодезическим линиям;

12] Отсутствие выделенного масштаба (масштабная инвариантность): в вакуумное уравнение (1) входит только одна фундаментальная константа c – скорость света; масштаб (радиус) появляется только при введении граничных условий;

13] Вакуумное уравнение (1) инвариантно относительно замены $t \rightarrow -t$ (отсутствие стрелы времени);

14] Самосогласованность: при выполнении условия глобальной гиперболичности вакуумное уравнение (1) гарантирует, что геодезические линии не пересекаются хаотично, сохраняя причинность;

15] В каждой точке риманова пространства-времени всегда можно выбрать локально инерциальную систему, такую, что ее метрика становится плоской в первом порядке, и это свойство встроено в само уравнение (1);

16] Главное свойство вакуумного уравнения (1) – это парадокс пустоты. Оно представляет собой жесткую, самодостаточную систему, которая при отсутствии вещества (материи) не исключает существования стабильных деформаций пространства-времени и волновых вакуумных возмущений, распространяющихся со скоростью света и подчиняющиеся строгим геометрическим законам сохранения.

Кроме того, в результате 3+1 ADM-разложения уравнение вакуума (1) представляется как набор из 4-х уравнений связей и 6-и уравнений эволюции, которые напоминают законы сохранения, поскольку

$$\nabla_j [R_{ik} - \Lambda g_{ik}] = 0. \quad (6)$$

Причина в том, что рассматриваемый тензор тождественно равен нулю ($R_{ik} - \Lambda g_{ik} = 0$):

$$\nabla_j 0 = \frac{\partial 0}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^l 0 - \Gamma_{kj}^l 0 = 0.$$

Однако в искривленном пространстве-времени для получения интегралов движения из дивергенции нужно проинтегрировать по объему, но ковариантная производная содержит символы Кристоффеля, которые мешают применять теорему Гаусса–Остроградского для тензоров ранга два и выше (в частности, $\Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^n - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^n$). Тем не менее, вакуумное уравнение (1) пригодно для выявления стабильных вакуумных образований.

При детальном изучении можно показать, что в вакуумном уравнении Эйнштейна (1) латентно присутствует вся «Аналитика» (т.е. формальная логика) Аристотеля, «Геометрии» Евклида и Римана, Альмагест (Almagest) Птолемея, «Натуральная философия» Ньютона, «Критика чистого разума» Канта, «Феноменология и Диалектика» Гегеля и многое другое. То есть, в уравнении (1) сконцентрирован весь багаж человеческих знаний, накопленный к 20-у столетию от начала нашей эры. Здесь парадоксально пересекаются многие исходные философские дихотомии такие как: «Бесконечность и Конечность», «Присутствие и Отсутствие», «Порядок и Хаос», «Покой и Движение», «Свет и Тьма», «Бытие и Небытие», «Общее и Частное», «Непрерывное и Дискретное», «Детерминизм и Стохастичность», «Четное и Нечетное», «Абсолютное и Относительное», «Имманентное и Трансцендентное», «Сознание и Бытие», «Добро и зло».

Такое сочетание основополагающих принципов в одном уравнении (1) придает его решениям особое значение.

2 Решения вакуумного уравнения Эйнштейна с Λ -членом

Обобщенная теорема Биркгофа* гласит, что единственными сферически симметричными решениями уравнения (1)

$$R_{ik} - \Lambda g_{ik} = 0 \quad (7)$$

является семейство лоренцевых метрик Коттлера* [1,2,5,13]

$$ds_1^2 = \pm f(r) c^2 dt^2 \mp \frac{dr^2}{f(r)} \mp r^2 d\theta^2 \mp r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8)$$

Из них пять метрик-решений с сигнатурой $(+---)$ в одной координатной карте (t, r, θ, φ) :

$$\text{I} \quad ds_1^{(+)^2} = \left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (9)$$

$$\text{H} \quad ds_2^{(+)^2} = \left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (10)$$

$$\text{V} \quad ds_3^{(+)^2} = \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (11)$$

$$\text{H}' \quad ds_4^{(+)^2} = \left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (12)$$

$$i \quad ds_5^{(+)^2} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2; \quad (13)$$

и пять аналогичных метрик-решений с противоположной сигнатурой $(-+++)$ в аналогичной карте

$$\text{H}' \quad ds_1^{(-)^2} = -\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (14)$$

$$\text{V} \quad ds_2^{(-)^2} = -\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (15)$$

$$\text{H} \quad ds_3^{(-)^2} = -\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (16)$$

$$\text{I} \quad ds_4^{(-)^2} = -\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (17)$$

$$i \quad ds_5^{(-)^2} = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (18)$$

где r_b – радиус Шварцшильда.

*Обобщенная теорема Биркгофа утверждает, что любое сферически-симметричное решение уравнения (7) с непостоянным радиусом площади локально изометрично одному из решений семейства Коттлера (9) – (18); исключительный случай постоянного радиуса площади приводит к пространству-времени Нариаи (Nariai) [24], которое здесь не рассматривается.

Считается, что метрики с сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$ при прочих равных условиях описывают одно и то же пространство-время в разной записи. Поэтому в современных научных работах обычно используют только одну сигнатуру $(+---)$ или $(-+++)$.

Кроме того, в основном метрики-решения, например, (9) – (13) рассматриваются по отдельности для различных космологических задач (табл. 1).

Таблица 1 – Метрики-решения вакуумного уравнения (7) при сигнатуре (+ – – –)

№	$f(r)$	Метрика, Λ^{**}
1	$1 - r_b/r + r^2/r_a^2$	$\Lambda > 0$ Шварцшильда – анти-де Ситтера (Sch-AdS)
2	$1 + r_b/r - r^2/r_a^2$	$\Lambda < 0$ анти-Шварцшильда – де Ситтера (ASch-dS)
3	$1 - r_b/r - r^2/r_a^2$	$\Lambda < 0$ Коттлера – Шварцшильда – де Ситтера*** (стандартная метрика Kott-Sch-dS)
4	$1 + r_b/r + r^2/r_a^2$	$\Lambda > 0$ анти-Шварцшильда – анти-де Ситтера (ASch-AdS) (отталкивающее центральное решение)
5	1	$\Lambda = 0$ Минковского (плоское пространство-время Минковского)

**Знак Λ относится к уравнению (1) с тензором Риччи (2) и сигнатурой (+ – – –); согласно наиболее распространенному в литературе соглашению, решения типа де Ситтера соответствуют $\Lambda > 0$.

*** Впервые метрику вида (11) Фридрих Коттлер записал в статье [3], опубликованной в марте 1918 г. В предельном случае $r_a \neq \infty$ и $r_b = 0$ метрика Коттлера (11) становится метрикой де Ситтера. В противоположном пределе $r_a = \infty$ и $r_b \neq 0$ она становится метрикой Шварцшильда. Когда оба $r_a = \infty$ и $r_b = 0$, метрики (9) – (12) сводятся к метрике Минковского плоского пространства-времени. Поэтому метрики-решения (9) – (12) обычно называют метриками Шварцшильда–де Ситтера и Шварцшильда–анти-де Ситтера (сокращенно Sch-dS и Sch-AdS).

В этой статье предпринята попытка объединить метрики-решения семейства Коттлера (9) – (18) в рамках одной системы. Для этого мы пытаемся рассмотреть несколько вариантов такого объединения.

3 Асимптотические нулевые метрики

Суммирование всех 10-и метрик-решений (9) – (18) в одной координатной карте

$$ds_0^{(\pm)2} = \sum_{i=1}^5 ds_i^{(+2)} + \sum_{j=1}^5 ds_j^{(-2)} = 0 \quad (19)$$

это запрещенная операция из-за нелинейности уравнения (7), но она приводит к двум нулевым метрикам с суммарной сигнатурой (+ – – –) + (– + + +) = (0 0 0 0):

$$ds_0^{(\pm)2} = \pm 0 \cdot c^2 dt^2 \mp 0 \cdot dr^2 \mp 0 \cdot r^2 d\theta^2 \mp 0 \cdot r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = 0. \quad (20)$$

Считается доказанным, что нулевые метрики (20) не являются решениями уравнения (7), поскольку символы Кристоффеля (3) в этом случае не определены

$$\lim_{g_{fl} \rightarrow 0} \Gamma_{ik}^\lambda = \lim_{g_{fl} \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \right] \rightarrow \frac{0}{0} = 0 \cdot \infty, \text{ где индексы } f \text{ и } l \text{ пробегает все значения } \lambda, \mu, i, k,$$

так как запись $g^{\lambda\mu} = 1/g_{i\mu} = 1/0$ некорректна. Кроме того, обратная метрика $g^{\lambda\mu}$ – это обращение матрицы $g_{i\mu}$, а не поэлементное деление и предельный переход « $1/0 \rightarrow \infty$ ».

Однако не исключено, что в некоторых случаях тензор Риччи (2) может оказаться равным нулю, если при определенных условиях неопределенности компенсируют друг друга за счет их разностей:

$$\lim_{g_{fl} \rightarrow 0} R_{ik} = \lim_{g_{fl} \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l \right] \rightarrow \left[\frac{\partial(0 \cdot \infty)}{\partial x^l} - \frac{\partial(0 \cdot \infty)}{\partial x^k} + (0 \cdot \infty)^2 - (0 \cdot \infty)^2 \right] \rightarrow [0 + 0] = 0.$$

Предлагаем вернуться к рассмотрению данного важного предельного случая, например, рассмотреть вырожденный предел однопараметрического семейства $g_{i\mu}(\varepsilon)$ с контролируемым пределом $\varepsilon \rightarrow 0$, для которого $R_{i\mu}(\varepsilon)$

вычисляется явно. Это выходит за рамки данной статьи, но решение этой проблемы позволит ввести нулевую сигнатуру (т.е. нейтральный элемент) в группу Алгебры сигнатур по операции сложения [16,17].

4 Проблемы объединения метрик-решений вакуумного уравнения

Уравнение (7) определяет метрико-динамическое состояние некоторой области пространства-времени (т.е. вакуума Эйнштейна) и не исключено, что все его лоренцевы метрики-решения (9) – (13) и (14) – (18) в одной координатной карте взаимосвязаны. Возникает вопрос: возможно ли объединить эти решения в рамках одной системы?

Из-за нелинейности уравнения (7) операции сложения и вычитания метрик-решений (9) – (18) не являются решениями этого уравнения, за исключением, возможно, нулевых операций типа (19) (требующих доказательства).

Вместе с тем допустимо предположить, что каждая метрика-решение уравнения (7) относится к общей системе с определенной вероятностью. В этом случае можно попытаться применить операцию усреднения.

Как было показано в предыдущем пункте, усреднение всех 10-и метрик (9) – (18) приводит к нулевому результату (20), при этом метрики (13) и (18) характеризуют не искривленное, а исходное состояние вакуума (т.е. *плоское пространство-время Минковского*). Поэтому усреднять предлагается по отдельности метрики (9) – (12) и (14) – (17), поскольку они заданы в одной карте и имеют один и тот же ареальный радиус r .

Однако операция усреднения метрик – это одна из самых трудных задач в общей теории относительности, известная под названием «averaging problem» Исааксона–Бухерта, в отношении которой сложилась большая литература, в частности [21–23,26,27]. Основной вопрос: как усреднять тензоры, сохраняя их закон преобразования при замене координат? Общего ответа до сих пор нет.

В обзорах на эту тему указывают, что простой процедуры усреднения векторных и тензорных величин в ОТО на сегодня не существует. Дело в том, что усреднение компонент метрики привязано к выбранным координатам. Если сделать замену координат, усреднить преобразованные компоненты и сравнить с предшествующим результатом усреднения компонент исходной метрики, то результаты не совпадают. Усреднение и преобразование координат не коммутируют.

Zalaletdinov, Buchert, Green и Wald в статьях [21–23] показали, что усреднение компонент метрического тензора по области пространства-времени является неинвариантной операцией, однако при этом допускается усреднять инварианты кривизны и скаляры, связанные с этими метриками.

Здесь мы сталкиваемся с аналогичной проблемой, так как если, например, выполнить покомпонентное усреднение ансамблей из четырех метрик (9) – (12) или (14) – (17), то соответственно получим усредненные метрики

$$\langle ds_{\Sigma}^{(\pm)2} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 ds_i^{(\pm)2} = \pm c^2 dt^2 \mp \langle g_{rr}^{(\pm)} \rangle dr^2 \mp r^2 d\theta^2 \mp r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (21)$$

$$\text{где } \langle g_{rr}^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} \right]. \quad (22)$$

Данные метрики не являются решением вакуумного уравнения (7), что влечет за собой нарушение инвариантности при смене координатной карты (t, r, θ, φ) .

Для конечного ансамбля метрик, заданных на одном и том же многообразии с фиксированной идентификацией точек, поточечное среднее само по себе является тензором; реальная трудность заключается в неединственности этой идентификации между разными решениями (в данной модели эта идентификация фиксируется принятием одной и той же карты Коттлера для всех членов ансамбля с общим радиусом площади и нормировкой статического поля Киллинга) и в усреднении по протяженным областям пространства-времени [21–23].

5 Пути решения «проблемы усреднения» лоренцевых метрик

Рассмотрим несколько возможностей решения «проблемы усреднения» семейства Коттлера лоренцевых метрик-решений (9) – (18) вакуумного уравнения (7).

5.1 Неинвариантное усреднение (гипотеза сплошной среды)

Введем аксиоматический запрет на переход от сферической системы координат (t, r, θ, φ) к другим системам. Это означает, что наблюдение за исследуемым участком вакуума происходит только снаружи. При этом усредненные геодезические линии жестко связаны с усредненной протяженностью упругопластического вакуума и повторяют его деформации, подобно искривлению линий, нанесенных на поверхность согнутого листа резины.

В этом случае допускается рассматривать усредненную метрику (21), но в этом случае гипотеза перестает быть релятивистски-инвариантной, и больше относится к механике сплошных сред с применением параметров и математического аппарата ОТО.

Подставим компоненты $\langle g_{ii}^{(+)} \rangle$ из усредненных метрик (21) в выражения для компонент 4-вектора относительного удлинения вакуума [15]

$$l_i^{(\pm)} = \sqrt{1 + \frac{g_{ii}^{(\pm)} - g_{ii0}^{(\pm)}}{g_{ii0}^{(\pm)}}} - 1, \quad (23)$$

где компоненты $g_{ii0}^{(+)}$ и $g_{ii0}^{(-)}$ взяты соответственно из плоских (исходных) метрик (13) и (18). В результате получим

$$\begin{aligned} l_r^{(\pm)} &= \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{1 + \frac{\langle g_{rr}^{(\pm)} \rangle - g_{rr0}^{(\pm)}}{g_{rr0}^{(\pm)}}} - 1 = \sqrt{\langle g_{11}^{(\pm)} \rangle} - 1 = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r_b^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r_b^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r_b^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r_b^2}{r_a^2}\right)} \right]} - 1 = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{r_b}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_b^2}{r_a^2}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{r_b}{r} + \frac{r_b^2}{r_a^2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{r_b}{r} - \frac{r_b^2}{r_a^2}\right)^2\right)}} - 1, \end{aligned} \quad (24)$$

$$l_t^{(\pm)} = 0, \quad l_\theta^{(\pm)} = 0, \quad l_\phi^{(\pm)} = 0.$$

Функция $l_r^{(\pm)}$ (24) показывает усредненное относительное удлинение упругопластического вакуума в радиальном направлении на открытом участке $r_b < r < r_a$ (размерность r_a и r_b метр, из-за масштабной инвариантности уравнения (7), они могут быть любого масштаба). График рассматриваемой функции (24) при условно принятых для иллюстрации $r_a = 90$ м и $r_b = 1.5$ м обращается в бесконечность на горизонте Шварцшильда вблизи $r \approx r_b$ и на горизонте де Ситтера вблизи $r \approx r_a$, поэтому данная функция определена на интервале значений $r \in (1.5004; 89.2404)$ (смотрите рис. 1а).

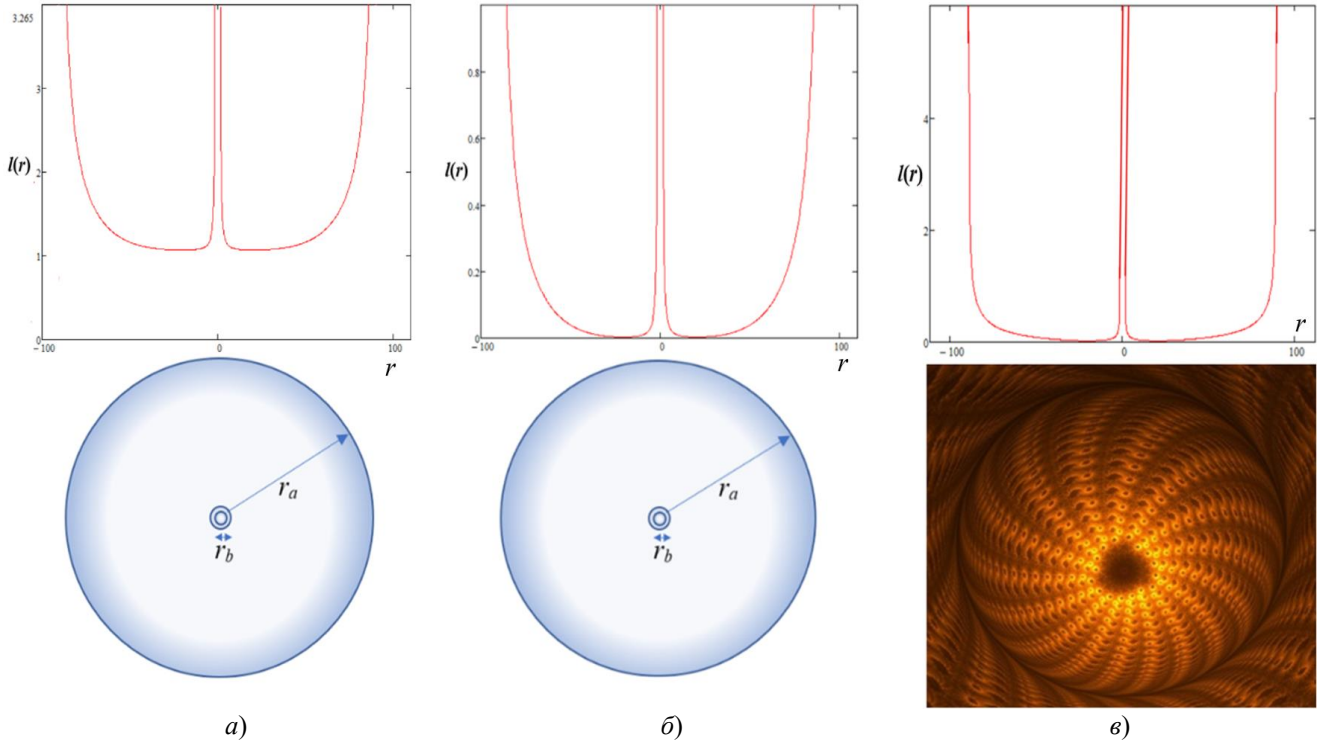


Рис. 1: Графики функций относительного удлинения (носят иллюстративный характер) а) $l_r^{(\pm)}$ (24), б) $l_r^{(\pm)}$ (25), в) $RMS(l_{rf}^{(\pm)})$ (32), при условно принятых: радиус де Ситтера $r_a = 90$ м и радиус Шварцшильда $r_b = 1.5$ м. Функции $l_r^{(\pm)}$ и $RMS(l_{rf}^{(\pm)})$ определяют относительное удлинение усредненного по ансамблям лоренцевых метрик (9) – (12) и (14) – (17) пространства-времени (т.е. вакуума Эйнштейна) в радиальном направлении. Аналитическая область всех трех графиков $r_b < r < r_a$, левые половины этих графиков – это их зеркальные отражения для удобства восприятия сферических объектов. Расчеты проводились с использованием программного обеспечения Mathcad. Нижняя часть рис. 1в – это не результат расчета по формулам, а художественная иллюстрация

5.2 Инвариантное арифметическое усреднение

Как предложено в [21–23], будем отдельно усреднять инварианты кривизны и скаляры, связанные с ансамблями метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17).

Например, радиальная составляющая из выражения (23) $l_{ri}^{(\pm)} = \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{g_{11i}^{(\pm)}} - 1$ есть отношение дифференциала площадного радиуса к собственной радиальной длине, то есть скаляр карты*, но не инвариант кривизны, так как зависит от радиальной калибровки. Ареальный радиус r геометричен; разложение на «собственную радиальную длину» не единственно, если у четырех метрик (9) – (12) или (14) – (17) допускается различное $f(r)$. Поэтому мы постулируем, что все четыре метрики заданы на одной координатной карте. Тогда угловая часть во всех четырех метриках (9) – (12) и четырех метриках (14) – (17) одинакова $r^2 d\Omega^2$, поэтому r везде означает одно и то же и определено геометрически через площадь сферы $A = 4\pi r^2$. В этом случае усреднению подлежат инвариантные величины (23), посчитанные отдельно для каждой метрики из ансамбля (9) – (12) и ансамбля (14) – (17)*:

$$\langle l_r^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{4} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) \right], \quad (25)$$

$$l_t^{(\pm)} = 0, \quad l_\theta^{(\pm)} = 0, \quad l_\phi^{(\pm)} = 0. \quad (26)$$

*Пусть R_A обозначает радиальную координату, определяемую геометрически через площадь $4\pi R_A^2$ орбит сферической симметрии. Для каждой лоренцевой метрики, например, ансамбля (9) – (12) $g(i)$ определим скаляр $X_i = |g(i)_{\mu\nu} \partial^\mu R_A \partial^\nu R_A|$ и величину $l_{ri} = X_i^{-1/2} - 1$. В координатах (9)–(12) имеем $R_A = r$, а в рассматриваемой здесь области, где $f_i(r) > 0$, выполняется $X_i = f_i(r)$, так что $l_{ri} = 1/f_i^{1/2} - 1$, при этом $l_{ri}^{(\pm)}$ является не только скаляром карты, но истинным скаляром, не зависящим от выбора системы координат.

*В этой статье мы также постулируем, что каждая из четырех метрик ансамблей (9) – (12) и (14) – (17) участвует в общей системе с одинаковым весом $1/4$. Но это не следует из уравнения (7), поэтому выражение (25) – это невзвешенное арифметическое среднее четырех лоренцевых метрик, заданных на одной карте.

Расчеты по формуле (25), одинаковые для ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), показаны на рис. 1б. График функции (25) при условно принятых $r_a = 90$ м и $r_b = 1.5$ м стремится к бесконечности вблизи горизонтов $r \approx r_b$ и $r \approx r_a$, поэтому она определена на интервале значений $r \in (1.5003; 89.2395)$.

В этом случае аксиоматический запрет на замену системы отсчета можно снять. Это говорит в пользу данного подхода, так как результаты усреднения остаются инвариантными.

Очевидно, что расчеты по формулам (24) и (25) отличаются, т.е. усреднение компонент метрических тензоров и усреднение скаляров не совпадают.

Полный список всех скаляров и полиномиальных инвариантов кривизны метрик-решений практически бесконечен. Ниже приведены: стандартный независимый базис скаляров и инвариантов до второго порядка по кривизне ансамбля метрик (9) – (12) (табл. 2) и ансамбля метрик (14) – (17) (табл. 3)

Таблица 2 – Скаляры и инварианты кривизны ансамбля метрик (9) – (12) с сигнатурой (+ – – –)

Квадрат интервала	Норма вектора Киллинга $\xi_\mu \xi^\mu = g_{00}$	Скаляр Кречмана, $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$	Временная компонента тензора Риччи*, R_{00}	Скалярная кривизна, $R = 4\Lambda$	Инвариант Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$	$R_0^0 = g^{00} R_{00}$	Квадрат тензора Риччи $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$ds_1^{(+2)}$	$1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2} \right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_2^{(+2)}$	$1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2} \right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_3^{(+2)}$	$1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2} \right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_4^{(+2)}$	$1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2} \right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$

* В общем случае компонента R_{00} зависит от выбора координаты t . Но в силу $R_{00} = \Lambda g_{00}$, R_{00} это свёртка $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ с полем Киллинга $\xi = \partial_t$, через которое определена норма $\xi_\mu\xi^\mu$. Поэтому здесь R_{00} – это скаляр статического поля Киллинга $\xi = \partial_t$, причем нормировка ξ зафиксирована в соответствии с общепринятой картой Коттлера, используемой в данной работе. Таким образом строго говоря R_{00} – это скаляр, связанный с полем Киллинга, а не инвариант кривизны.

Таблица 3 – Скаляры и инварианты кривизны ансамбля метрик (14) – (17) с сигнатурой $(-+++)$

Квадрат интервала	Норма вектора Киллинга $\xi_\mu\xi^\mu = g_{00}$	Скаляр Кречмана, $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$	Временная компонента тензора Риччи, R_{00}	Скалярная кривизна, $R = 4\Lambda$	Инвариант Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$	$R^0_0 = g^{00}R_{00}$	Квадрат тензора Риччи $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$
$ds_1^{(-)2}$	$-\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2}\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_2^{(-)2}$	$-\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2}\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_3^{(-)2}$	$-\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2}\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_4^{(-)2}$	$-\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2}\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$

Сравнительный анализ таблиц 2 и 3 показывает, что некоторые скаляры и инварианты для метрик с разными сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$ совпадают только с точностью до знака, например, $\xi_\mu\xi^\mu$, R и R^0_0 . В рамках данной модели мы принимаем различие между этими двумя ветвями, связанными со знаком, в качестве дополнительной гипотезы, что метрики-решения (9) – (12) и (14) – (17) с взаимно-противоположными сигнатурами описывают разные объекты. Кроме того, в [17,18] показано, что метрические пространства с взаимно противоположными сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$ повернуты относительно друг друга 90° .

Отметим также, что такие скаляры и инварианты кривизны как: полная кривизна (т.е. скаляр Кречмана) $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, инвариант Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ и квадрат тензора Риччи $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ для всех метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17) одинаковые.

При средневзвешенной гипотезе $1/4$, арифметическое среднее скаляров и инвариантов кривизны лоренцевых метрик (9) – (12) (из табл. 2) практически полностью совпадает с арифметическим средним скаляров и инвариантов кривизны метрик (14) – (17) (из табл. 3), смотрите табл. 4.

Таблица 4 – Средние скаляры и инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17)

Средний (интервал) ²	Норма вектора Киллинга $\langle\xi_\mu\xi^\mu\rangle = \langle g_{00}\rangle$	Скаляр Кречмана, $\langle K\rangle = \langle R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\rangle$	Временная компонента тензора Риччи, $\langle R_{00}\rangle$	Скалярная кривизна, $\langle R\rangle = \langle 4\Lambda\rangle$	Инвариант Вейля $\langle C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}\rangle$	$\langle R^0_0\rangle = \langle g^{00}R_{00}\rangle$	Квадрат тензора Риччи $\langle R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\rangle$
$\langle ds_i^{(\pm)2}\rangle$	± 1 + при $(+---)$ – при $(-+++)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2r^2}{r_a^4}$	0	$\frac{12r_b^2}{r^6}$	0	$\frac{36}{r_a^4}$

Усредненные скаляры и инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), представленные в таблице 4, это величины, которые не меняются при изменении системы координат, поэтому они отражают внутренние геометрические свойства исследуемой искривленной области усредненного вакуума с усредненными относительными удлинениями (25) (рис. 1б).

Отметим следующую особенность. Нормы вектора Киллинга $\xi_\mu\xi^\mu$ для метрик (9) – (12) и (14) – (17) равны их нулевым (т.е. временным) компонентам (смотрите табл. 2 и 3). Эти нормы, как известно, являются скалярными функциями r . Они зависят от радиальной координаты, но сами значения $\xi_\mu\xi^\mu$ являются скалярами в каждой точке исследуемой области при фиксированном поле Киллинга ξ_μ . В этом случае усреднение скаляров $\xi_\mu\xi^\mu$ является инвариантной операцией, равной $\langle g_{00}\rangle = \langle g_{tt}^{(\pm)}\rangle = \pm 1$. Таким образом, в данной карте в области допустимых значений

функции (25) в среднем по ансамблям решений (9) – (12) и (14) – (17) гравитационное замедление времени (т.е. усредненный фактор красного смещения) компенсируется.

5.3 Инвариантное среднеквадратичное усреднение (тканевая гипотеза)

Рассмотрим еще один инвариантный способ объединения семейства метрик-решений вакуумного уравнения (7) в единую пространственно-временную систему.

Лоренцевы метрики $ds_i^{(+2)}$ (9) – (12) и $ds_i^{(-2)}$ (14) – (17) являются инвариантами, поэтому их усреднение является инвариантными операциями:

$$\langle s_{1-4}^{(+2)} \rangle = \frac{1}{4} (ds_1^{(+2)} + ds_2^{(+2)} + ds_3^{(+2)} + ds_4^{(+2)}), \quad (27)$$

$$\langle s_{1-4}^{(-2)} \rangle = \frac{1}{4} (ds_1^{(-2)} + ds_2^{(-2)} + ds_3^{(-2)} + ds_4^{(-2)}). \quad (28)$$

Выражения (27) и (28) можно представить в виде скалярного произведения комплексно-сопряженных полу-кватернионов (т.е. кватернионов, поделенных на $\frac{1}{2}$) [17,18]

$$\langle s_{1-4}^{(\pm 2)} \rangle = \frac{1}{2} (ds_1^{(\pm)} + i ds_2^{(\pm)} + j ds_3^{(\pm)} + k ds_4^{(\pm)}) \frac{1}{2} (ds_1^{(\pm)} - i ds_2^{(\pm)} - j ds_3^{(\pm)} - k ds_4^{(\pm)}), \quad (29)$$

где $ds_i^{(\pm)}$ – абсолютные инварианты;

i, j, k – мнимые единицы, которые являются ортонормированным базисом алгебры кватернионов H , которая изоморфна четной подалгебре Клиффорда $\mathbb{C}\ell^0(3)$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (30)$$

Свойства кватернионов позволяют предположить, что условно «цветные» отрезки линий (т.е. «цветных нитей») $ds_1^{(\pm)}, ds_2^{(\pm)}, ds_3^{(\pm)}, ds_4^{(\pm)}$ везде взаимно перпендикулярны по отношению друг к другу $ds_1^{(\pm)} \perp ds_2^{(\pm)} \perp ds_3^{(\pm)} \perp ds_4^{(\pm)}$.

Такое возможно, если «цветные» нити-инварианты $s_1^{(\pm)}, s_2^{(\pm)}, s_3^{(\pm)}, s_4^{(\pm)}$ (где $s_{nd}^{(\pm)} = \sqrt{g_{ikd}^{(\pm)}} dx^i dx^k$, $d = 1, 2, 3, 4$) переплетены в 4-нитевые спирали, образующие упругопластическую вакуумную ткань [16,17,18,19] (смотрите фрактальные иллюстрации на рис. 2).

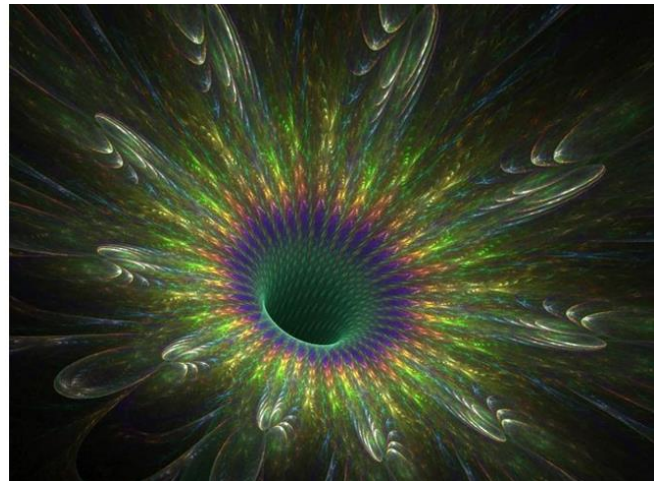
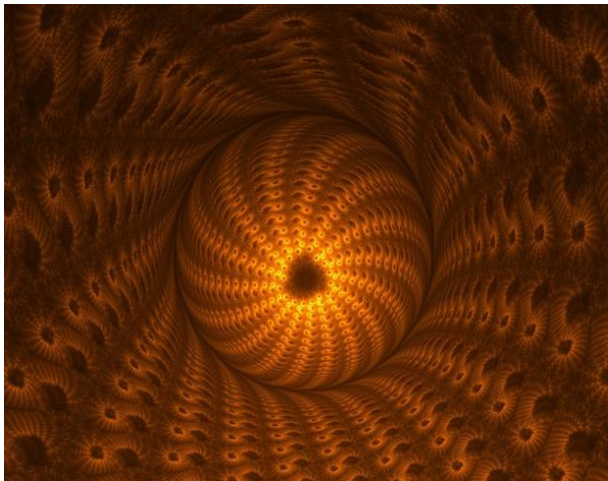


Рис. 2: Художественные фрактальные иллюстрации гибкой упругопластической ткани пространства, сплетенной из условно «цветных» инвариантных нитей $s_1^{(+)}, s_2^{(+)}, s_3^{(+)}, s_4^{(+)}$. Данные иллюстрации – это не результат расчетов по приведенным здесь формулам, а попытка визуализировать индуцируемую математикой ткань пространства с помощью фрактальных изображений, взятых из открытых источников Интернета

Условное представление вакуума в виде гибкой упругопластической ткани влечет за собой следующие последствия. Усредненные относительные удлинения для ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17) приобретают вид полукватернионов (т.е. кватернионов, деленных на 2)

$$l_{rf}^{(\pm)} = \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) + i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) + j \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) + k \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) \right], \quad (31)$$

а скалярами могут являться модули этих кватернионов, которые в данном случае совпадают со среднеквадратическими значениями

$$|l_{rf}^{(\pm)}| = \text{RMS}(l_{rf}^{(\pm)}) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2}. \quad (32)$$

Графики функций (32) совпадают при условно принятых $r_a = 90$ м и $r_b = 1.5$ м, они представлены на рис. 1в. На границах интервала допустимых значений $r \in (r_b \approx 1.5004; r_a \approx 89.2405)$ функции (32) стремятся к бесконечности (∞).

Используя данные из табл. 2 и 3, аналогично рассчитаем среднеквадратические (RMS – root mean square) значения скаляров и инвариантов кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (9) – (12) по формуле

$$\text{RMS}(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}.$$

Результаты вычислений представлены в табл. 5.

Таблица 5 – Одинаковые среднеквадратические инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17)

RMS (интервала) ² $ds_1^{(+2)}$	RMS нормы вектора Киллинга $\xi_\mu \xi^\mu = g_{00}$	RMS скаляра Кречмана, $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$	RMS временной компонента тензора Риччи, R_{00}	RMS скалярной кривизны, $R = 4\Lambda$	RMS инварианта Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$	RMS $R_0^0 = g^{00} R_{00}$	RMS квадрата тензора Риччи $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$ds_\Sigma^{(+2)}$	$\sqrt{1 + \frac{r_b^2}{r^2} + \frac{r^4}{r_a^4}}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \sqrt{1 + \frac{r_b^2}{r^2} + \frac{r^4}{r_a^4}}$	$\frac{12}{r_a^2}$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$

Еще раз отметим, что среднеквадратические скаляры и инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), представленные в табл. 5, полностью совпадают.

При сравнении данных в табл. 2, 3 и 5 обнаруживаем, что с точностью до знака совпадают следующие параметры: $\text{RMS}(K) = K$, $\text{RMS}(R) = \pm R$, $\text{RMS}(R_0^0) = \pm R_0^0$ и $\text{RMS}(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$.

Среднеквадратические инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), представленные в таблице 5, это величины, которые не меняются при изменении системы координат, поэтому они отражают внутренние геометрические свойства исследуемой искривленной ткани вакуума со среднеквадратическим относительным удлинением (32) (рис. 1в).

В рамках изложенной здесь «тканевой гипотезы», допустимо предположить, что метрики (9) – (12) имеют одну общую временную координату t и по три различных пространственных координаты $(t, r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $\alpha = 1, 2, 3, 4$ при условии, что квадраты их дифференциалов равны $dr_1 = dr_2 = dr_3 = dr_4$, а сами дифференциалы взаимно перпендикулярны $dr_1 \perp dr_2 \perp dr_3 \perp dr_4$. Тогда получается всего $12 + 1 = 13$ координат. При комплексном сопряжении метрик (9) – (12), дополнительные координаты компактифицируются до 4-х (t, r, θ, φ) , а каждый узел упругопластической ткани вакуума в некоторой степени напоминает одну из реализаций комплексного многообразия Калаби-Яу (рис. 2) [17].

6 «Корпускулы» и «анти-корпускулы» Коттлера–Шварцшильда–де Ситтера

В современных теориях, основанных на общей теории относительности, принято считать, что смена знаков части скаляров при изменении сигнатуры $(+ - - -) \rightarrow (- + + +)$ (сравните табл. 2 и 3) – является стандартным следствием смены конвенции. Однако, по мнению автора, нельзя безапелляционно отвергнуть гипотезу о том, что ансамбли лоренцевых метрик (9) – (12) и (14) – (17) с взаимно-противоположными сигнатурами определяют метрико-динамические модели двух разных противоположных объектов.

Кроме того, в § 5.2 [18] на двухмерном примере показано, что если координатные карты с противоположными сигнатурами находятся на разных сторонах листа, то они повернуты относительно друг друга на 90^0 .

Совокупность собранных выше сведений показывает, что ансамбли метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17) вакуумного уравнения Эйнштейна (7) описывают, с одной стороны, одинаковые, а, с другой стороны, взаимно противоположные замкнутые сферические объекты, повернутые относительно друг друга на 90^0 (однако, в силу сферической симметрии данный поворот, или фазовый сдвиг между этими объектами, практически не заметен).

Учитывая противоположность знаков некоторых скаляров (табл. 2 и 3) и другие свойства, мы условно приняли, что ансамбль метрик (9) – (12) описывает усредненную замкнутую выпуклость* пространства-времени (т.е. усредненного вакуума Эйнштейна), при этом ансамбль метрик (14) – (17) описывает противоположную усредненную замкнутую вогнутость* усредненного вакуума.

**Представить 3-мерную (и тем более 4-мерную) выпуклость или вогнутость пространства-времени невозможно, здесь предпринята попытка синтезировать язык описания двух противоположных стабильных сферических искривлений многослойного вакуума Эйнштейна на вспомогательной, бинарно-образной лингвистической основе.*

Из графиков на рис. 1б и 1в видно, что в любом случае инвариантного арифметического или среднеквадратического усреднения по ансамблю метрик (9) – (12) с сигнатурой $(+ - - -)$, получается модель практически полого шара, напоминающего статический мир де Ситтера, с сильно растянутой периферией. При этом внутри большого шара де Ситтера находится сильно растянутое окружение малой по размерам сферической полости, которую будем называть ядрышко (или косточка) Шварцшильда. Такое стабильное замкнутое сферическое вакуумное образование условно назовем выпуклой «корпускулой» (или «яблоком») Коттлера–Шварцшильда–де Ситтера (сокращенно *KSdS* – «корпускула»)*.

**Расходимость функции $\sqrt{(1/f)} - 1$ на корнях $f(r) = 0$ – это горизонты каждой отдельной метрики Коттлера, а не стенка усредненной корпускулы тела, а полученные результаты – это только набор средних скаляров на интервале $r_b < r < r_a$. Тем не менее, исследуемый объект имеют явно выраженную шарообразную форму и сферическую границу. Поэтому иллюстративный термин «корпускула» адекватен усредненной математической модели.*

При этом ансамбль метрик-решений (14) – (17) с противоположной сигнатурой $(- + + +)$ позволяет построить точно также устроенную усредненную, но антиподную, замкнутую сферическую вогнутость вакуума (т.е. *KSdS* – «анти-корпускулу»).

KSdS -корпускулу с сигнатурой $(+ - - -)$ и *KSdS* -анти-корпускулу с сигнатурой $(- + + +)$ мы называем сферической выпуклостью и сферической вогнутостью вакуума поэтому, что они полностью компенсируют проявления друг друга: $(+ - - -) + (- + + +) = (0\ 0\ 0\ 0)$, подобно частице и античастице.

Сотканная из вакуумной ткани корпускула (рис. 1в и 2), со среднеквадратическим относительным удлинением (32), отличается от в среднем линейно деформированной корпускулы (рис. 1б), тем, что сотканная больше похожа на мыльный пузырь с тонкими стенками (рис. 3).



Рис. 3: Художественная иллюстрация пространства, заполненного сферическими корпускулами и анти-корпускулами различного масштаба (взята из открытых источников Интернета). Данная иллюстрация – это не результат расчетов по приведенным здесь формулам, а попытка облегчить восприятие перспектив развития математической модели

Радиусы r_b и r_a изначально не определены. То есть, вакуумное уравнение (7) из-за масштабной инвариантности допускает любое их значение при условии $r_b \ll r_a$, точнее при $\frac{r_b}{r_a} < \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$. Поэтому вышеупомянутые $KSdS$ - корпускула и $KSdS$ -анти-корпускула могут быть любого размера. Это позволило развить Иерархическую космологическую модель [19,20], в рамках которой мир заполнен большим множеством корпускул и анти-корпускул различного масштаба с дискретным набором радиусов r_{ai} и r_{bj} (смотрите рис. 3).

7 Расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна

В предыдущих пунктах было показано, что вакуумное уравнение Эйнштейна с Λ -членом (7) содержит потенциал описания одной $KSdS$ -корпускулы (т.е. замкнутой сферической выпуклости вакуума) и одной $KSdS$ -анти-корпускулы (т.е. замкнутой сферической вогнутости вакуума).

При этом возникли следующие проблемы:

1) Масштабная инвариантность уравнения (7) допускает, что $KSdS$ -корпускула и $KSdS$ -анти-корпускулы могут быть любого размера, но их только две. Где огромное многообразие колоссального количества корпускул (т.е. ядер частиц) и анти-корпускул (т.е. ядер античастиц)?

2) В рамках рассматриваемой модели, основанной на инвариантном усреднении скаляров и инвариантов кривизны ансамблей лоренцевых метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17) вакуумного уравнения (7), невозможно описать взаимодействие изолированных друг от друга $KSdS$ -корпускулы и $KSdS$ -анти-корпускулы;

3) У $KSdS$ -корпускулы и $KSdS$ -анти-корпускулы усредненное относительное удлинение на их сферической периферии и возле малой центральной сферической полости стремится к бесконечности (рис. 1б и 1в);

4) Не ясно, что находится за пределами внешней сферической границы де Ситтера у $KSdS$ -корпускулы и $KSdS$ -анти-корпускулы, и что внутри их центральной сферической полости Шварцшильда? В рамках рассматриваемой математической модели там ничего нет, даже искривленного вакуума (рис. 1б и 1в). Это недопустимо.

5) Согласно современным представлениям, метрики с противоположными сигнатурами $(+ - - -)$ и $(- + + +)$ взаимно заменяемы и описывают одно и то же многообразие в разных обозначениях. В рамках такой аксиоматики совокупности метрик (9) – (13) с сигнатурой $(+ - - -)$ и метрик (14) – (18) с сигнатурой $(- + + +)$ описывают одну и ту же сферическую область вакуума. То есть имеет место двукратная вырожденность. Однако разница между ними имеется, в частности, противоположные знаки некоторых инвариантов, смотрите табл. 2 и 3. Кроме того, такая вырожденность расщепляется на два взаимно противоположных объекта, повернутых относительно друг друга на 90° .

В результате возникла следующая дилемма: С одной стороны, семейство метрик Коттлера (9) – (18) чрезвычайно значимо, т.к. является взаимосвязанной совокупностью решений одного из самых основополагающих уравнений современной физики (7). С другой стороны, инвариантное усреднение двух взаимно противоположных ансамблей из этих метрик привело к вышеуказанным проблемам. Вакуумное уравнение (7) не содержит возможности выхода из этой ситуации.

С целью попытки решения этих проблем и многих других задач в статье [19] в качестве гипотезы предложено расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна с большим числом положительных и отрицательных Λ -членов

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m + \sum_{n=1}^N -\Lambda_n) = 0, \quad (33)$$

где $\Lambda_m = \frac{3}{r_m^2}$, $\Lambda_n = \frac{3}{r_n^2}$, здесь r_m – радиус ядра m -ой корпускулы, r_n – радиус ядра n -ой анти-корпускулы;

M – количество корпускул, стремится к ∞ ; N – количество анти-корпускул, стремится к ∞ .

Даже если радиусы r_m и r_n убывают к малым масштабам, ряды $\sum_{m=1}^M \Lambda_m$ и $\sum_{n=1}^N \Lambda_n$ расходятся (т.е. не имеют конечного предела), но их разность может быть конечной. Это позволяет наложить на расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна (33) условие*

$$\frac{1}{2} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m + \sum_{n=1}^N -\Lambda_n) = \frac{1}{2} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m - \sum_{n=1}^N \Lambda_n) = \Lambda_0 = constant. \quad (34)$$

*Разность в (34) понимается как предел разностей частичных сумм при определенном правиле введения общего обрезания – при условии, что этот предел существует; в рассматриваемой модели существование и значение этого регуляризованного предела постулируются в рамках условия (34). При выполнении этого условия уравнение (33) сводится к уравнению (7) с $\Lambda = \Lambda_0$, а его роль заключается в разложении Λ_0 на вклады отдельных корпускул, что приводит к интерпретации (38)–(39), связывающей величину с источниками.

Если на связном многообразии размерности $n > 2$ выполняется соотношение $R_{ik} = \Lambda_0 g_{ik}$, то из свертки тождества Бианки следует, что Λ_0 – постоянная величина (лемма Шура [25]); таким образом, условие (34) согласуется с уравнением поля и не является дополнительным допущением. Взятие следа дает $R = 4\Lambda_0$.

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{ik} g_{ik} \Lambda_0 = n \Lambda_0 = 4 \Lambda_0. \quad (35)$$

При выполнении условия (34) расширенное вакуумное уравнение (33) обладает теми же свойствами, что и вакуумное уравнение Эйнштейна (7), поскольку в этом случае ковариантная производная от его левой части также равна нулю, подобно выражению (6):

$$\nabla_j [R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_m + \sum_{n=1}^{\infty} -\Lambda_n)] = \nabla_j [R_{ik} - g_{ik} \Lambda_0] = 0. \quad (36)$$

Расширенное вакуумное уравнение (33) представляет широкие возможности, например, если представить это уравнение в следующем виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{h=1}^H \Lambda_h + \sum_{p=1}^P -\Lambda_p) - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{a=1}^A \Lambda_a + \sum_{b=1}^B -\Lambda_b) = 0, \quad (37)$$

где

$$\frac{1}{2} (\sum_{k=1}^K \Lambda_k + \sum_{p=1}^P -\Lambda_p) = T_s \text{ для корпускул и анти-корпускул микромира,} \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} (\sum_{a=1}^A \Lambda_a + \sum_{b=1}^B -\Lambda_b) = \Lambda_B \text{ для корпускул и анти-корпускул макромира,}$$

при этом $(\Lambda_B + T_s) = \Lambda_0$.

Тогда уравнение вида (37), с учетом постоянства скалярной кривизны (35) $R = 4\Lambda_0 = 4(\Lambda_B + T_s)$, принимает вид

$$R_{ik} - \Lambda_0 g_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda_0 g_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + (T_s + \Lambda_B) g_{ik} = 0.$$

В результате получим уравнение с источниками (38):

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda_B g_{ik} = -T_s g_{ik}, \quad (39)$$

которое, при $\Lambda_s = 1,089 \cdot 10^{-52} \text{ м}^{-2}$, имеет вид уравнения, пригодного для обсуждения космологических проблем.

Перенос постоянного члена $T_s g_{ik}$ в правую часть уравнения (39) соответствует стандартной интерпретации части космологического члена как тензора энергии-импульса вакуума, пропорционального g_{ik} [28, 29].

Выводы

*Не то, что мните вы, Природа:
Не слепок, не бездушный лик —
В Ней есть Душа, в Ней есть Свобода,
В Ней есть Любовь, в Ней есть Язык...*
Ф. Тютчев

Ожидаемо, что различные решения одного нелинейного дифференциального уравнения при одних и тех же граничных условиях могут быть связаны между собой, и относиться к описанию одной системы.

Всякий раз, когда мы выводим за рамки рассмотрения те или иные решения уравнений математической физики, это в итоге неизбежно приводит к тупиковым ситуациям, парадоксам, сингулярностям, расходямостям и другим негативным последствиям. Напротив, полнота учета всех возможностей, предоставляемых математикой, неуклонно ведет к построению логически завершенных моделей.

Цель этого сообщения: показать, что учет всех 10-и возможных лоренцевых метрик-решений семейства Котлера (9) – (18) вакуумного уравнения Эйнштейна (7) в рамках одной системы приводит к осмысленным результатам.

Основными трудностями на пути объединения этих метрик в одну систему являются: 1) общепринятое утверждение, что сумма решений нелинейного уравнения не является его решением; 2) «проблема усреднения», которая заключается в том, что усреднение компонент метрического тензора g_{ik} , как по области пространства, так и по ансамблю метрик-решений, является неинвариантной операцией.

В этой статье предлагается считать, что метрики-решения (9) – (18) в одной координатной карте реализуются как части единой системы с определенной вероятностью. В этом случае неинвариантную операцию сложения и усреднения компонент метрического тензора метрик-решений уравнения (7) мы, ссылаясь на статьи [21–23], заменили на арифметическое и среднеквадратическое усреднение скаляров и инвариантов кривизны, относящихся к ансамблям метрик (9) – (12) и (14) – (17) (смотрите табл. 4 и 5). При таком подходе усредненные скаляры и инварианты кривизны соответствуют усредненным по ансамблям метрик участкам пространства-времени (т.е. вакуума Эйнштейна).

В статье рассмотрены четыре операции с метриками-решениями семейства Котлера (9) – (18): 1) формальная нулевая сумма интервалов (19); 2) неинвариантное покомпонентное среднее (21); 3) инвариантное арифметическое

среднее скаляров (25)–(26); 4) инвариантное полу-кватернионно-RMS среднее (29)–(32). Мы отдаем предпочтение четвертой, однако остальные операции, требуют дополнительного детального рассмотрения.

В результате инвариантного усреднения ансамблей метрик (9) – (12) с сигнатурой $(+ - - -)$ и (14) – (17) с противоположной сигнатурой $(- + + +)$, получены модели стабильной сферически-замкнутой выпуклости вакуума и стабильной сферически-замкнутой вогнутости вакуума, которые мы условно назвали *KSdS*-корпускула и *KSdS*-анти-корпускула с усредненными относительными удлинениями вакуума (25) или (32) (смотрите рис. 1б или 1в).

Из-за того, что координатные карты с противоположными сигнатурами, находящимися с двух сторон метрического листа, перпендикулярны друг к другу, корпускула (частица) и анти-корпускула (античастица) так же повернуты относительно друг друга на 90^0 (смотрите, на примере двухстороннего случая §5.2 в [18]). Не исключено, что данный фазовый сдвиг лежит в основе ответов на условия Сахарова в отношении барионной асимметрии материи.

Полученные модели *KSdS*-корпускулы и *KSdS*-анти-корпускулы имеют ряд вышеперечисленных недостатков и проблем, для решения которых, в статье [19] предложено расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна (EVE) с большим числом $\pm\Lambda_i$ -членов (33):

$$R_{ik} + \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m + \sum_{n=1}^N -\Lambda_n) = 0, \quad (33')$$

которое с учетом всех возможных 16-и сигнатур 4-мерных метрических пространств

$$\text{sign}(ds^2) = \begin{pmatrix} (+ + + +) & (+ + + -) & (- + + -) & (+ + - +) \\ (- - - +) & (- + + +) & (- - + +) & (- + - +) \\ (+ - - +) & (+ + - -) & (+ - - -) & (+ - + +) \\ (- - + -) & (+ - + -) & (- + - -) & (- - - -) \end{pmatrix} \quad (40)$$

на наш взгляд, обладает потенциалом, чтобы обозначить пути развития Иерархической космологической модели (“EVE project”) [16 – 20], направленной на развитие программы Клиффорда-Эйнштейна-Уилера по геометризации многих разделов физики.

Author contributions

The author did all the research work for this study.

Competing interests

The author has declared that no competing interests exist.

Data access statement

Materials are available on request.

Ethics statement

All ethical standards are observed. Links to articles by other researchers are provided.

Funding statement

This research received no external funding.

Благодарности

Искренне благодарю Дэвида Рида (David Reid), Татьяну Леви, Георгия Усачева и Евгения Этингина за помощь, а также выражаю признательность академикам РАЕН Геннадию Ивановичу Шипову и Евгению Алексеевичу Губову за содержательные обсуждения рассматриваемых здесь вопросов.

При подготовке данной рукописи использовались инструменты генеративного искусственного интеллекта: Claude Opus 5 (Anthropic) — для перевода с русского на английский язык, языковой правки и формулирования ряда технических уточнений; GPT-5.6 Sol (OpenAI) — для независимой проверки рукописи и этих уточнений. Автор изучил все материалы, подготовленные с помощью ИИ, и несет полную ответственность за окончательный текст.

Список литературы

- [1] Stephani, H.; Kramer, D.; MacCallum, M.; Hoenselaers, C.; Herlt, E. (2003). Exact Solutions of Einstein’s Field Equations, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge).
- [2] Griffiths, J. B. & Podolský, J. (2009). Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- [3] Kottler, F. (1918). Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Annalen der Physik, Vol. 56, pp. 401 – 462. doi:10.1002/andp.19183611402.

- [4] Alexanian, M. (2026). Effective de Sitter-Schwarzschild Metrics. *Armenian Journal of Physics*, vol. 19, issue 2, pp. 107–112, arXiv:2607.09707.
- [5] Shen, M. & Zhuang, O. (2016). A New Class of Solutions of Vacuum Einstein's Field Equations with Cosmological Constant. *Annals of Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 1, pp. 36 – 41.
- [6] Cha, Ye Sle, & Marcus Khuri (2018). Transformations of asymptotically AdS hyperbolic initial data and associated geometric inequalities. *General Relativity and Gravitation* 50.1: 3.
- [7] Chruściel, Piotr T., Daniel Maerten, and Paul Tod (2006). Rigid upper bounds for the angular momentum and center of mass of non-singular asymptotically anti-de Sitter space-times. *Journal of High Energy Physics* 2006.11: 084-084.
- [8] Ashraf Azman, M. (2026). Dark Energy Stars in Finch-Skea Spacetime with a Schwarzschild-(Anti)-de Sitter Exterior arXiv:2605.30398.
- [9] Tullini, A. (2026). Boundedness and decay for the conformal wave equation in Schwarzschild-AdS under dissipative boundary conditions. arXiv:2604.02084.
- [10] Friedrich, H. (1995). Einstein equations and conformal structure: existence of anti-de Sitter-type space-times. *Journal of Geometry and Physics* 17.2, pp. 125–184.
- [11] Graf, O. & Holzegel, G. (2024). "Linear Stability of Schwarzschild-Anti-de Sitter spacetimes I: The system of gravitational perturbations". arXiv:2408.02251.
- [12] Moschidis, G. (2020). A proof of the instability of AdS for the Einstein-null dust system with an inner mirror, *Analysis & PDE* 13, no. 6, 1671–1754.
- [13] Landau L.D., Lifshitz E.M. (1971). *The Classical Theory of Fields / Course of theoretical physics, V. 2* Translated from the Russian by Hamermesh M. University of Minnesota – Pergamon Press Ltd. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig, p. 387.
- [14] Shipov, G. (1998). *The Theory of Physical Vacuum*. Moscow ST-Center, Russia ISBN 5 7273-0011-8.
- [15] Sedov, L.I. (1994). *Continuum Mechanics*. Vol. 1. – Moscow: Nauka.
- [16] Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part I. Algebra of Stignatures. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, 14 (1), 1-26.
- [17] Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part II. Algebra of Signatures. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, 14 (1), 27-55.
- [18] Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part III. Curved Vacuum Area. *Avances en Ciencias e Ingeniería* Vol. 14 nro 2 año 2023 Artículo 5.
- [19] Batanov-Gaukhman, M. (2024). Geometrized Vacuum Physics Part VI: Hierarchical Cosmological Model, *Avances en Ciencias e Ingeniería* Vol. 14 nro 4 año 2023.
- [20] Batanov-Gaukhman, M. (2025). Geometrized Vacuum Physics Part VII: "Electron" and "Positron", *Avances en Ciencias e Ingeniería* Vol. 15 nro 1 año 2024 Artículo 3.
- [21] Zalaletdinov R. (2008). Averaging Problem in Cosmology and Macroscopic Gravity. *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 23, No. 08, pp. 1173-1181 (2008) and arXiv:0801.3256.
- [22] Buchert, T.; van Elst, H.; Heinesen, A. (2023). The averaging problem on the past null cone in inhomogeneous dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* V. 55, 7 or arXiv:2202.10798v2.
- [23] Green, R. S.; Wald R. M. (2011). A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology. *Phys. Rev. D* 83, 084020 or arXiv:1011.4920v2.
- [24] Schleich, K. & Witt, D. M. (2009). A simple proof of Birkhoff's theorem for cosmological constant. *J. Math. Phys.* 51, 112502 (2010), arXiv:0908.4110.
- [25] Schur, F. (1886) Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projektiven Räuraen. *Mathematische Annalen*, 1886. 27, p. 537-567.
- [26] Isaacson, R. A. (1968). Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics. *Physical Review*, 166(5), 1263–1271. DOI: 10.1103/PhysRev.166.1263.
- [27] Isaacson, R. A. (1968). Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor. *Physical Review*, 166(5), 1272–1279. DOI: 10.1103/PhysRev.166.1272.
- [28] Zel'dovich, Ya. B. (1968). The cosmological constant and the theory of elementary particles. *Sov. Phys. Usp.* 11, 381–393.
- [29] Weinberg, S. (1989). The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.* 61, 1–23.