

ГИПОТЕЗА КОЛЛАТЦА-часть1.
Доказательство отсутствия в алгоритме «3Х+1»
закольцованных фрагментов.

Автор: Трушников Владимир Владимирович

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ _____	3
ВВЕДЕНИЕ _____	4
ЧАСТЬ 1:	
1.1 Концепция успешного решения в алгоритме Коллатца _____	5
1.2 Обоснование возможности существования закольцованного фрагмента в последовательности «нечётных» Коллатца _____	6
1.3 Цикл 4-2-1: _____	6
1.4 Условия возникновения закольцованных фрагментов в последовательностях, подобных алгоритму Коллатца _____	6
1.5 Доказательство отсутствия в алгоритме « $3X+1$ » закольцованных фрагментов _____	16
ВЫВОД _____	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК _____	17

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КОЛЛАТЦА – часть 1

Доказательство отсутствия в алгоритме « $3X+1$ » закольцованных фрагментов.

Ключевые слова: Алгоритм; натуральное число; Гипотеза Коллатца; сиракузская последовательность.

Key words: Algorithm; natural number; Collatz conjecture; Syracuse sequence.

Аннотация: Статья посвящена анализу условий существования закольцованных фрагментов в алгоритмах, которые их содержат. Применение индуктивно-дедуктивного метода к алгоритмам вида « $3X+d$ » (аналогичным алгоритму Коллатца) показало, что формирование таких фрагментов определяется отношением X_n/d . От того, является ли X_n кратным d , зависит, завершится ли последовательность кольцом, состоящим из нескольких нечетных чисел, или циклом типа « $d \Rightarrow d$ ».

Abstract: This article analyzes the conditions under which cyclic fragments occur in algorithms containing them. Applying an inductive-deductive method to " $3X+d$ " type algorithms (analogous to the Collatz algorithm) revealed that the formation of such fragments is determined by the ratio X_n/d . Whether the sequence terminates in a ring consisting of several odd numbers or in a cycle of the " $d \Rightarrow d$ " type depends on whether X_n is a multiple of d .

УДК 511.12; УДК 511.13

Актуальность: Гипотеза находится в списке нерешённых проблем математики.

Цель: Доказать гипотезу.

ВВЕДЕНИЕ: Гипотеза Коллатца, известная также как « $3X+1$ »-гипотеза или как сиракузская последовательность, относится к алгоритмам управления натуральными числами, утверждает, что с какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге придём к единице.

Какой интерес был у Лотара Коллатца заниматься вообще алгоритмами, подобными « $3X+1$ ». Вероятно были и другие, но именно алгоритм « $3X+1$ » стал проблемой. При этом, с начальными числами из натурального ряда такими, как 1, 2, 3 ... 1 000 ... 1 000 000 ... и т.д., очевидно проблем не было. Они были проверены простым перебором. Нет сомнений в том, что Коллатц исследуя простые алгоритмы, искал ответы на волнующие его вопросы далеко за пределами чистой математики. Многие закономерные процессы в физическом мире, какими бы сложными они не были на первый взгляд, содержат внутри себя повторяющиеся простые алгоритмы. Число в подобных алгоритмах символизирует состояние объекта, субъекта, системы, набор их количественных и качественных характеристик. Переход из одного неустойчивого состояния в другое осуществляется алгоритмически, с множеством промежуточных состояний, до наступления устойчивого состояния. Формула алгоритма Коллатца напрямую не содержит параметра времени, но, сам факт последовательных действий, в результате которых происходят необратимые изменения - очередное число никогда не повторяет предыдущее, наводит на определённые философские размышления.

Удивительная по своей простоте формулировки гипотеза привлекает к себе внимание. Существует множество попыток её доказательства от простых до невероятно сложных, но пока не признанных математическим сообществом. Исследователи всегда отмечают одну особенность в доказательстве гипотезы; добившись определённых результатов, сделав очередной шаг в доказательстве они сталкиваются с новой проблемой. Доказательство постоянно ускользает. Создаётся иллюзия недостижимости поставленной цели.

В 2019 появилось сообщение, отмеченное в [1], что Теренс Тао с помощью теории вероятностей доказал, что почти все орбиты Коллатца ограничены любой функцией, уходящей в бесконечность. Но, строгим доказательством для всех чисел это не является. В рецензии на эту работу, журнал Quanta Magazine написал, что «это один из самых значительных результатов по гипотезе Коллатца, достигнутых за последние десятилетия». Сам Теренс Тао позднее говорил, что изначально в своём доказательстве он не рассчитывал поставить точку. А целью было сделать ещё один шаг в том, чтобы приблизиться к доказательству.

Много работ, к сожалению, остаются в тени. Тем не менее, среди этих многих, своей доступностью и информативностью выделяется [2], по теме, как важный вклад в поиске пути решения гипотезы. Видеоролик, длительностью около 20 минут, на первый взгляд является развлекательным научно-популярным контентом канала Vert Dider, но представленная в нём информация в великолепном изложении ведущего Дерек Мюллера, является в буквальном смысле руководством к действию, способствует тому, чтобы приобщить и других равнодушных к поиску ответов на поставленные гипотезой вопросы. С большим Уважением и огромной благодарностью к несравненному Дереку Мюллеру.

Во всех известных, но непризнанных доказательствах гипотезы Коллатца, остаются нерешёнными два принципиальных вопроса:

- 1) Не доказано и не опровергнуто существование в последовательностях Коллатца фрагментов, замкнутых в кольцо.
- 2) Не доказано и не опровергнуто существование последовательностей, уходящих в бесконечность;

Из этих нерешённых вопросов выделим два утверждения, те, которые подтверждают гипотезу. Если они будут доказаны: доказывать какое-либо другое уже не имеет смысла. Выводы построенные на других утверждениях всегда будут вызывать сомнения, если не будут доказаны эти:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей замкнутых в кольцо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2: в алгоритме Коллатца не существует последовательностей, уходящих в бесконечность.

ЧАСТЬ 1.

1.1 Концепция успешного решения в последовательности Коллатца.

Интуитивно мы приходим к пониманию концепции успешного решения уже на первых шагах исследования алгоритма Коллатца. Интуиция подсказывает, что если число постоянно меняет направление своего движения, а для этого формулой алгоритма созданы все условия, попадание в успешное решение с большой вероятностью становится неизбежно. Тем более, что оказаться в успешном решении можно как при движении назад, так и при движении вперёд.

Если в алгоритме Коллатца последовательность завершается 1, то перед тем как к ней прийти мы обязательно выйдем на одно из значений из ряда 2^n . Для ряда 2^n выполним действия обратные алгоритму «3X+1», тем самым выясним, при достижении каких значений 2^n алгоритм завершается 1. Оказывается не при всех, а только с чётным показателем степени. Результаты сведены в таблицу обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца (Табл. 1)

N	2^{2n}	$2^{2n}-1$	$\frac{2^{2n}-1}{3}$
1	4	3	1
2	16	15	5
3	64	63	21
4	256	255	85
5	1024	1023	341
6	4096	4095	1365
И т.д.	...	...	...

Таблица1. Таблица обратных преобразований ряда 2^{2n} по алгоритму Коллатца.

Существует бесконечное количество значений натурального ряда, определяемые формулой:

$$\frac{2^{2n}-1}{3}$$

(1)

которые в итоге приводят к значению 2^{2n} и сворачиванию числа в 1.

Будем называть эти значения, и маршруты к ним приводящие, **успешными решениями алгоритма**. Можно показать, что делитель 3 в приведённой формуле не является помехой для нашего вывода, т.е. число $2^{2n}-1$ при всех $n \geq 1$ кратно 3. Решения для соседних чисел различаются между собой значением:

$$\frac{2^{2(n+1)}-1}{3} - \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n}$$

(2)

Это значит, зная решение для предыдущего числа n, решение для следующего n+1 можно определить по формуле:

$$\frac{2^{2n}-1}{3} + 2^{2n} = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3}$$

(3)

И так далее, до бесконечности. Куда бы мы не двигались, вперёд-назад, мы всегда будем находиться между двух, тех или иных, успешных решений алгоритма. И хотя нам уже достаточно утверждения, что количество успешных решений бесконечное множество, мы всегда можем его усилить. Например, каждое значение натурального ряда, определяемое (1) можно дополнительно умножить на 2^n . Например, число 5 умножить на 2^n , число 7 умножить на 2^n . Каждое число, из уже известных, ранее пройденных и завершённых единицей маршрутов, умножить на 2^n . Как только мы окажемся на одном из ранее пройденных и завершённых единиц маршрутов, можно считать завершённым и текущий.

Предположим, между успешными решениями всё же существуют значения, не относящиеся к успешным. Сколько их. Определённо, должно быть ограниченное количество, значит мы простым перебором, в очередном повторении сценария вперёд-назад, неизбежно их преодолеем. Тогда каждое новое число на пути алгоритма становится очередным шагом к цели. Успешное решение алгоритма - это просто один из очередных шагов.

Формула $(3X+1)/2$ производит движение ВПЕРЁД, в сторону увеличения текущего числа, а формула $(3X+1)/2^n$, где $n > 1$, НАЗАД, в сторону его уменьшения. Действие «+1» в алгоритме «3X+1» гарантирует его непрерывность, способствует непрерывности движения числа к успешному решению. Для того, чтобы этот процесс движения не прерывался также

необходимо, чтобы каждое очередное число последовательности отличалось от любого из предыдущих, иначе: будет образовано так называемое кольцо – бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности.

В концепции успешного решения не рассматривается бесконечным непрерывное движение только вперёд, так как периодическое возвращение назад также неотъемлемая часть алгоритма. Однако, в этой концепции есть одно слабое место: с увеличением натурального, значения 2^{2^n} в последовательности встречаются реже, а интервалы между ними, соответственно, увеличиваются. Это приводит к тому, что процесс движения к успешному решению становится неопределённо затянутым, если не сказать бесконечным.

Тем не менее, фактом является то, что успешных решений в гипотезе Коллатца бесконечное множество, и мы всегда находимся между двух, тех или иных успешных решений. В любом случае, мы всегда находимся на пути к успешному решению. Тем более, что возможность оказаться в успешном решении не зависит от того, в каком направлении происходит движение.

1.2 Обоснование возможности существования закольцованного фрагмента в последовательности Коллатца.

В условиях, когда число периодически возвращается: существование в последовательности Коллатца закольцованного фрагмента становится также логично, как и попадание в успешное решение.

1.3 Цикл 4-2-1:

Так называемый цикл 4-2-1, часто упоминаемый в связи с гипотезой Коллатца, кольцом не является, если гипотезу рассматривать в концепции последовательности «нечётных». Алгоритм « $3X+1$ », или « $3n+1$ » – гипотеза: есть сокращённое название гипотезы Коллатца, сокращённая запись алгоритма, а полный алгоритм перехода из одного состояния в другое, от одного «нечётного» к другому «нечётному», включает ещё и деление на два, в общем виде выражается формулой (4):

$X_{n+1} = \frac{3X_n + 1}{2^m}$	(4)
----------------------------------	-----

Здесь: X_n - исходное (или предыдущее) нечётное,
 X_{n+1} - очередное нечётное,
 m – количество делений на два до очередного нечётного.

Запись алгоритма в виде одной универсальной формулы (4) предполагает начинать именно с «нечётного». С какого бы числа, целого и положительного, мы не начали, двигаясь, в случае нечётного по формуле $3X+1$, а в случае чётного следуя формуле $X/2$, мы в итоге придём к единице.

Известны и другие формулировки гипотезы, не меняющие её сути. Например такая: “Берём любое натуральное число. Если оно чётное, разделим его на два, а если нечётное, то умножаем на три и прибавляем единицу. Над полученным числом выполняем те же действия, и так далее. Какое бы начальное число мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу”.

Повторив несколько раз эти действия, становится понятно, что чётные состояния являются промежуточными, а нечётные результирующими очередного шага. После того, как пришли к единице, алгоритм завершается. Дальнейшие действия уже ничего не меняют. Мы оказались в замкнутом нулевом цикле « $1 \Rightarrow 1$ ».

Есть принципиальное отличие нулевого цикла от кольца «нечётных». Цикл называем нулевым потому, что в нём разница между очередным и предыдущим «нечётным» равна нулю. Один полный шаг алгоритма не меняет значения предыдущего числа. А одно единственное нечётное никак не может называться кольцом «нечётных».

В отличие от нулевого цикла кольцом «нечётных» в алгоритме Коллатца может называться бесконечное чередование одного и того же фрагмента последовательности, состоящего из нескольких «нечётных». Здесь каждый шаг алгоритма изменяет значение предыдущего числа.

1.4 Условия возникновения закольцованных фрагментов в последовательностях, подобных алгоритму Коллатца

Алгоритм Коллатца « $3X+1$ » является частным случаем алгоритма « $3X+d$ »

$X_{n+1} = \frac{3X_n + d}{2^m}$	(5)
----------------------------------	-----

где « d »-нечётное положительное приращение 1, 3, 5, 7... и т.д.
Известно, что для алгоритма с приращением «+1» простым перебором большого числа натуральных не нашлось пока ни одного закольцованного фрагмента. В отличие от «+1», алгоритмы с приращениями +5, 7, 11, 13 ... и т.д., (см. Рис. 1 ... 5) имеют кольца уже в самом начале натурального ряда, как само собой разумеющееся явление.

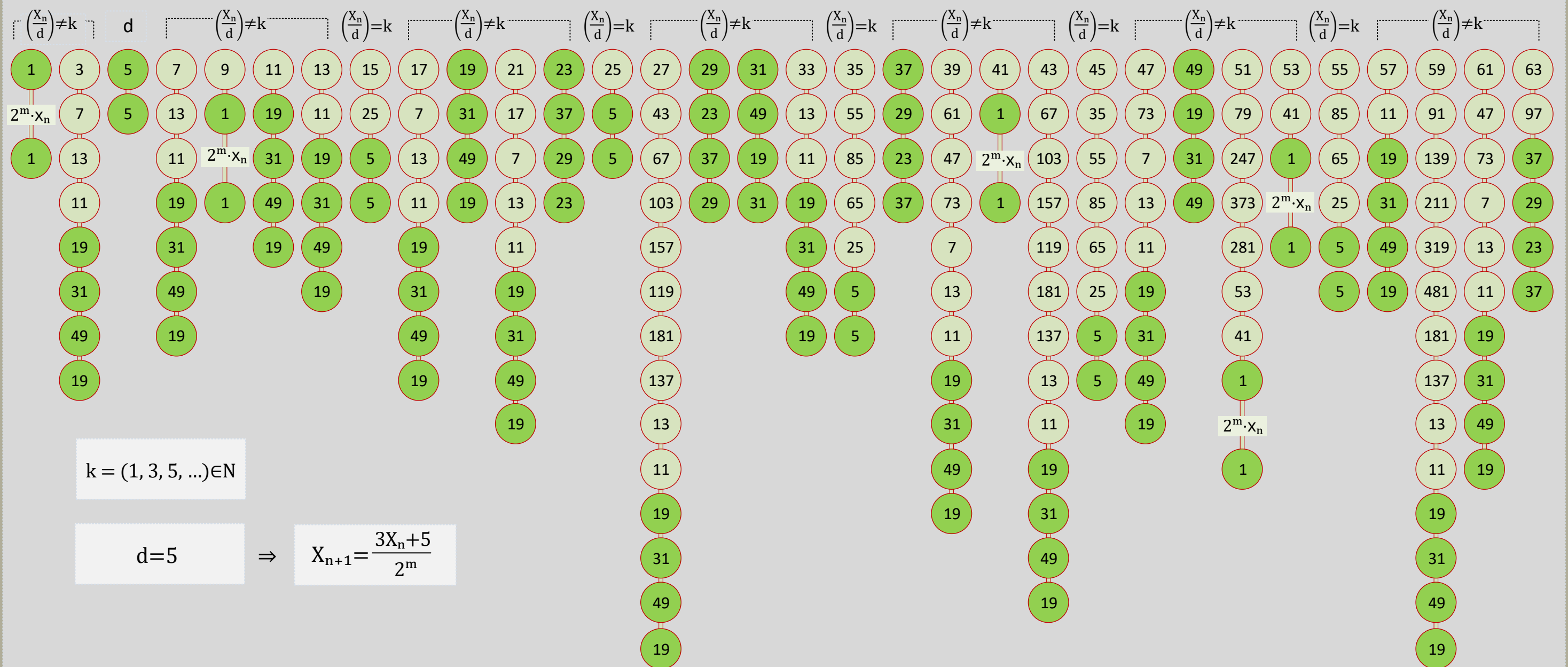


Рис.1 Ряд последовательностей в алгоритме $(3X+d)/2^m$ с приращением $d=5$

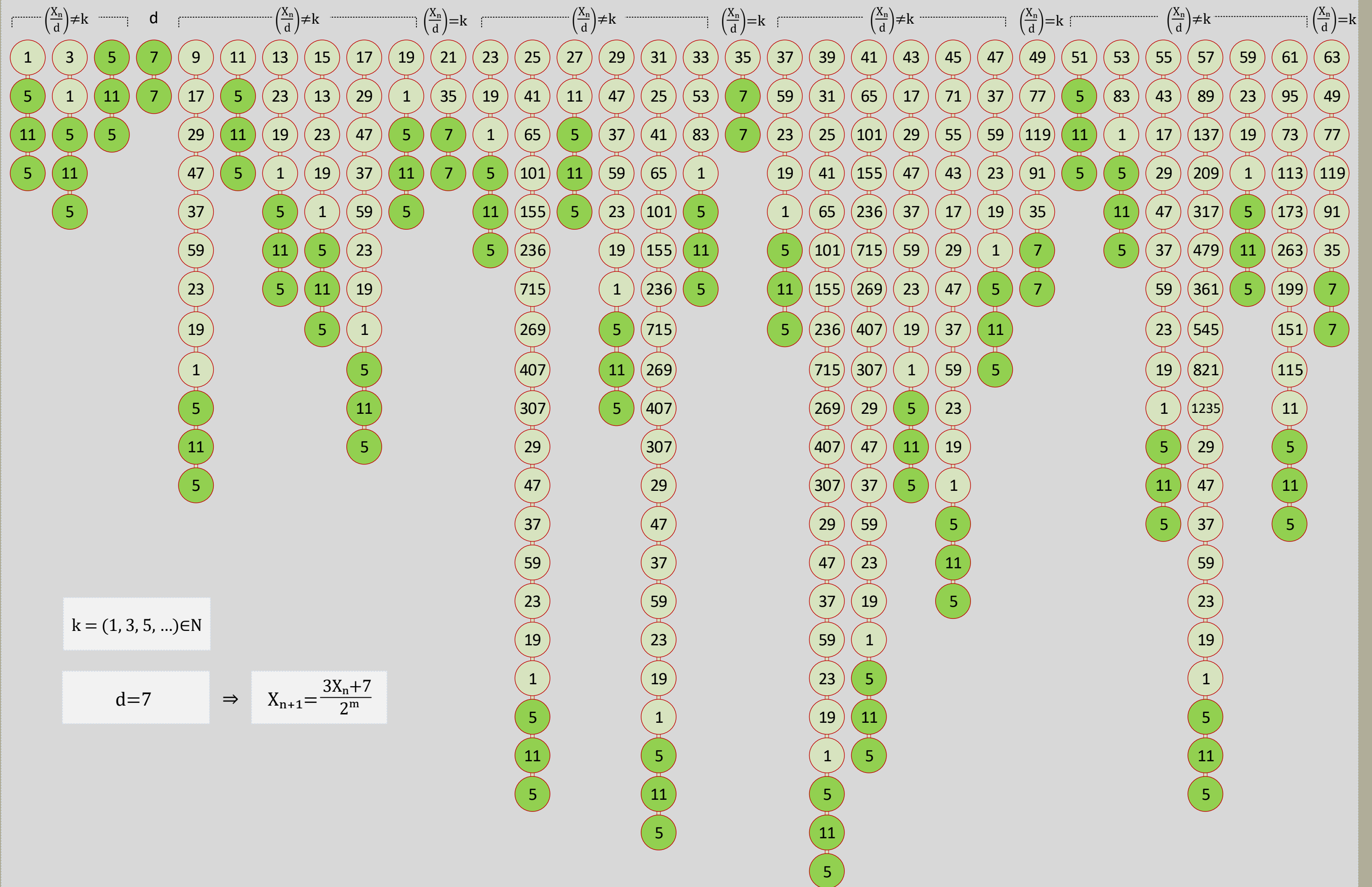


Рис.2 Ряд последовательностей в алгоритме $(3X+d)/2^m$ с приращением $d=7$

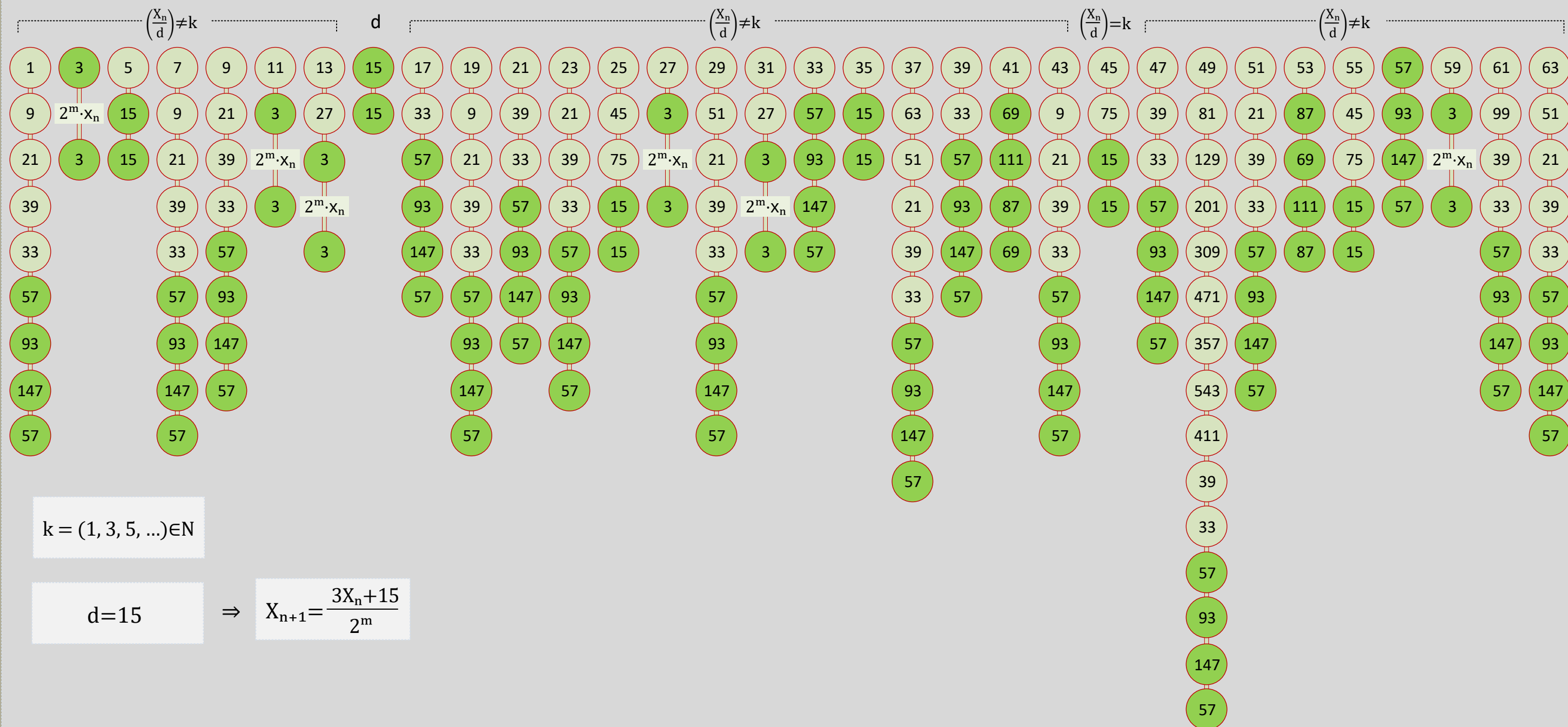


Рис.5 Ряд последовательностей в алгоритме $(3X+d)/2^m$ с приращением $d=15$

d=1	1 ⇒ 1
d=3	3 ⇒ 3
d=5	1 ⇒ 1 5 ⇒ 5 19 ⇒ 31 ⇒ 49 ⇒ 19 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=1) 23 ⇒ 37 ⇒ 29 ⇒ 23 ; - Кольцо 2 (k=1, Q=1) ...
d=7	7 ⇒ 7 5 ⇒ 11 ⇒ 5 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=1) ...
d=9	9 ⇒ 9
d=11	11 ⇒ 11 1 ⇒ 7 ⇒ 1 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=5) 13 ⇒ 25 ⇒ 43 ⇒ 35 ⇒ 29 ⇒ 49 ⇒ 79 ⇒ 31 ⇒ 13 ; - Кольцо 2 (k=1, Q=893) ...
d=13	1 ⇒ 1 13 ⇒ 13 179 ⇒ 275 ⇒ 419 ⇒ 635 ⇒ 959 ⇒ 1445 ⇒ 1087 ⇒ 1637 ⇒ 1231 ⇒ 1853 ⇒ ⇒ 1393 ⇒ 131 ⇒ 203 ⇒ 311 ⇒ 473 ⇒ 179 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=186793) ...
d=15	3 ⇒ 3 15 ⇒ 15 57 ⇒ 93 ⇒ 147 ⇒ 57 ; - Кольцо 1 (k=3, Q=1) 69 ⇒ 111 ⇒ 87 ⇒ 69 ; - Кольцо 2 (k=3, Q=1) ...
d=17	17 ⇒ 17 1 ⇒ 5 ⇒ 1 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=1) 25 ⇒ 23 ⇒ 43 ⇒ 73 ⇒ 59 ⇒ 97 ⇒ 77 ⇒ 31 ⇒ 55 ⇒ 91 ⇒ 145 ⇒ 113 ⇒ 89 ⇒ ⇒ 71 ⇒ 115 ⇒ 181 ⇒ 35 ⇒ 61 ⇒ 25 ; - Кольцо 2 (k=1, Q=103533127) ...
d=19	19 ⇒ 19 7 ⇒ 5 ⇒ 17 ⇒ 35 ⇒ 31 ⇒ 7 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=95) ...
d=21	21 ⇒ 21 15 ⇒ 33 ⇒ 15 ; - Кольцо 1 (k=3, Q=2) ...

d=23	23 ⇒ 23 5 ⇒ 19 ⇒ 5 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=1) 7 ⇒ 11 ⇒ 7 ; - Кольцо 2 (k=1, Q=1) 41 ⇒ 73 ⇒ 121 ⇒ 193 ⇒ 301 ⇒ 463 ⇒ 353 ⇒ 541 ⇒ 823 ⇒ 623 ⇒ 473 ⇒ ⇒ 721 ⇒ 1093 ⇒ 1651 ⇒ 311 ⇒ 239 ⇒ 185 ⇒ 289 ⇒ 445 ⇒ 679 ⇒ 515 ⇒ ⇒ 49 ⇒ 85 ⇒ 139 ⇒ 55 ⇒ 47 ⇒ 41 ; - Кольцо 3 (k=1, Q=271922921473) ...
d=25	5 ⇒ 5 25 ⇒ 25 7 ⇒ 23 ⇒ 47 ⇒ 83 ⇒ 137 ⇒ 109 ⇒ 11 ⇒ 29 ⇒ 7 ; - Кольцо 1 (k=5, Q=11795) 17 ⇒ 19 ⇒ 41 ⇒ 37 ⇒ 17 ; - Кольцо 2 (k=5, Q=35) 95 ⇒ 155 ⇒ 245 ⇒ 95 ; - Кольцо 3 (k=5, Q=1) 115 ⇒ 185 ⇒ 145 ⇒ 115 ; - Кольцо 4 (k=5, Q=1) ...
d=27	27 ⇒ 27
d=29	1 ⇒ 1 29 ⇒ 29 11 ⇒ 31 ⇒ 61 ⇒ 53 ⇒ 47 ⇒ 85 ⇒ 71 ⇒ 121 ⇒ 49 ⇒ 11 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=3841) ...
d=31	31 ⇒ 31 17 ⇒ 41 ⇒ 77 ⇒ 131 ⇒ 53 ⇒ 95 ⇒ 79 ⇒ 67 ⇒ ⇒ 29 ⇒ 59 ⇒ 13 ⇒ 35 ⇒ 17 ; - Кольцо 1 (k=1, Q=253457) ...
d=33	33 ⇒ 33 3 ⇒ 21 ⇒ 3 ; - Кольцо 1 (k=3, Q=5) 39 ⇒ 75 ⇒ 129 ⇒ 105 ⇒ 87 ⇒ 147 ⇒ 237 ⇒ 93 ⇒ 39 ; - Кольцо 2 (k=3, Q=893) ...
d=35	7 ⇒ 7 35 ⇒ 35 13 ⇒ 37 ⇒ 73 ⇒ 127 ⇒ 13 ; - Кольцо 1 (k=5, Q=25); (k=7, Q=35) 17 ⇒ 43 ⇒ 41 ⇒ 79 ⇒ 17 ; - Кольцо 2 (k=5, Q=25); (k=7, Q=35) 25 ⇒ 55 ⇒ 25 ; - Кольцо 1 (k=5, Q=1) 133 ⇒ 217 ⇒ 343 ⇒ 133 ; - Кольцо 3 (k=7, Q=1) 161 ⇒ 259 ⇒ 203 ⇒ 161 ; - Кольцо 4 (k=7, Q=1) ...

Таблица 2 Перечень нулевых циклов, типа «d⇒d» и колец в алгоритме $X_{n+1} = \frac{3X_n + d}{2^m}$, для d=1, 3, 5 ... 35, где: Q-константа кольца, k-множитель в d=k·{p}, {p}-простое.

Из анализа закольцованных фрагментов, представленных Рис.1...5 делаем вывод:

В алгоритмах вида «3X+d», любая конечная последовательность, поскольку конечная, завершается или в кольце или в нулевом цикле типа «d⇒d». Результат зависит от отношения (X_n/d), от того, является ли X_n кратным d.

В случае кратного отношения (X_n/d)=k, где k∈N, последовательность завершается в нулевом цикле «d⇒d».

Если X_n=kd:

$X_{n+1} = \frac{3 \cdot X_n + d}{2^m}$	$\Rightarrow$	$X_{n+1} = \frac{3 \cdot kd + d}{2^m}$	$\Rightarrow$	$X_{n+1} = \frac{(3k+1) \cdot d}{2^m} = kd$	(6)
---	---------------	--	---------------	---	-----

Нечётное X_n кратное «d» перешло в очередное X_{n+1} кратное «d». Конечная последовательность, состоящая из «нечётных» кратных «d» продолжается, и «kd»⇒«kd», пока промежуточное чётное (3k+1)·d не примет значения 2^m·d, также кратное «d».

$\forall ((3k+1)d) \in (2^m \cdot d)$	$\Rightarrow$	$X_n = \frac{2^m \cdot d}{2^m} = d$	(7)
---------------------------------------	---------------	-------------------------------------	-----

$X_{n+1} = \frac{3 \cdot d + d}{2^m}$	$\Rightarrow$	$X_{n+1} = \frac{(3+1) \cdot d}{2^m} = d$	(8)
---------------------------------------	---------------	---	-----

$d \Rightarrow d$	(9)
-------------------	-----

Поэтому:

$\forall \left(\frac{X_n}{d} \right) = k, \text{ где } k \in \mathbb{N}, X_n \Rightarrow \text{Нулевой цикл } \langle d \Rightarrow d \rangle$	(10)
---	------

В случае не кратного отношения (X_n/d)≠k последовательность завершается в кольце.

$\forall \left(\frac{X_n}{d} \right) \neq k, \text{ где } k \in \mathbb{N}, X_n \Rightarrow \text{КОЛЬЦО}$	(11)
---	------

Единственное исключение когда не кратное (X_n/d)≠k завершается в нулевом цикле X_n⇒X_n, отличающемся от «d⇒d», касается нечётных X_n, которые в промежуточном чётном состоянии, в процессе исполнения «3X_n+d» оказываются в значении «2^m·X_n».

Из анализа результатов Таблицы 2:

Простое «р» в качестве «d» делает кольцо и нулевой цикл базовым. Базовое кольцо обладает, присущей ему траекторией, т.е., последовательностью определённых шагов. Из бесконечного количества простых следует бесконечное разнообразие базовых колец и базовых нулевых циклов в соответствующих им алгоритмах.

$X_{n+1} = \frac{3 \cdot X_n + \{p\}}{2^m}$ - (базовый алгоритм)	(12)
--	------

Умножив простое «р» в качестве «d» на произвольное нечётное k=3,5,7...N,

$X_{n+1} = \frac{3 \cdot X_n + k \cdot \{p\}}{2^m}$ - (алгоритм общего вида)	(13)
--	------

получим алгоритм общего вида, содержащий кольца и нулевые циклы, с параметрами базовых. Значения входящих в них чисел, будут умноженными на этот же коэффициент «k».

Примером сказанного в Таблице 2 служит алгоритм с «d=15». Траектория имеющегося здесь кольца является копией «d=5» при умножении его на k=3. Все нулевые циклы здесь также являются результатом умножения на k=3.

Кольца возникают в условиях дробного отношения (X_n/d)∉N. Это означает, что не только входящие в кольцо, но и каждое из предыдущих X_n не является кратным «d», а иначе, однажды оказавшись в значении кратного, число не сможет покинуть множество кратных, пока не завершит свой путь в нулевом цикле «d⇒d».

Рассмотрим кольцо (7 ⇒ 5 ⇒ 17 ⇒ 35 ⇒ 31 ⇒ 7) в алгоритме (3X+19)/2^m

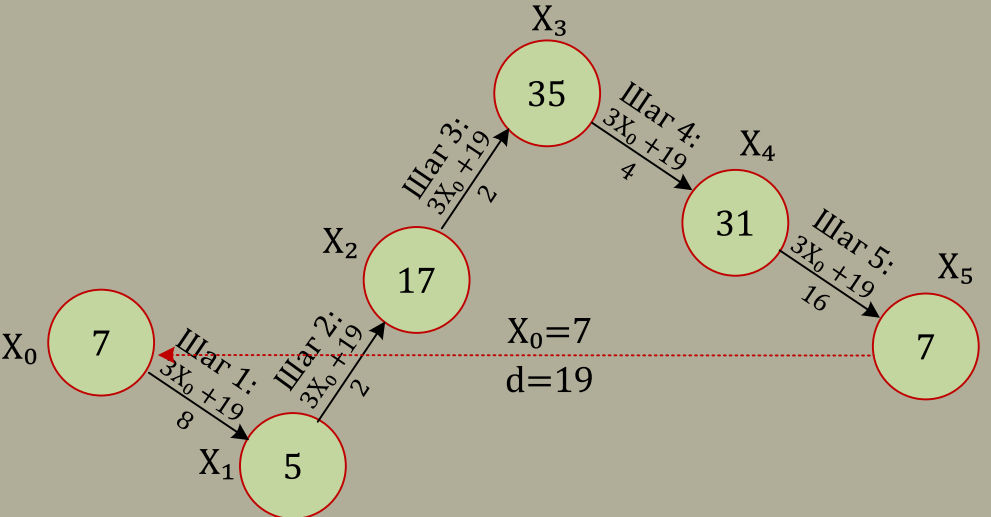


Рис.6 Траектория числа X₀=7 в алгоритме (3X+19)/2^m

Траекторию числа $X_0=7$ в алгоритме $(3X+19)/2^m$ представим в символах общего вида

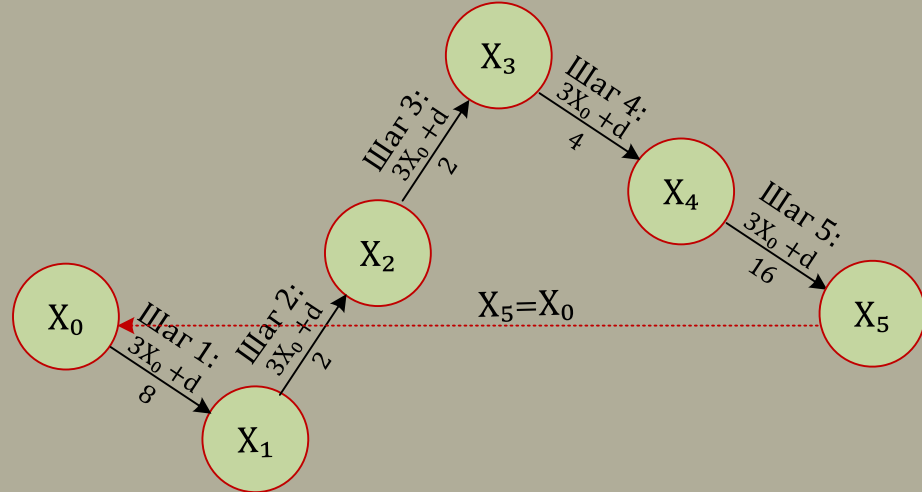


Рис.7 Траектория числа $X_0=7$ в алгоритме $(3X+19)/2^m$

Анализ траектории заведомо известного кольца мы выполняем с целью выявления взаимной связи исходного X_0 и приращения «+d» в условиях закольцованности, если таковые существуют.

Шаг 1 (назад):

$$X_1 = \frac{3X_0+d}{8} \quad (14)$$

Шаг 2 (вперёд):

$$X_2 = \frac{3X_1+d}{2} \Rightarrow X_2 = \frac{3 \cdot \left(\frac{3X_0+d}{8}\right) + d}{2} \Rightarrow X_2 = \frac{9X_0+11d}{16} \quad (15)$$

Шаг 3 (вперёд):

$$X_3 = \frac{3X_2+d}{2} \Rightarrow X_3 = \frac{3 \cdot \left(\frac{9X_0+11d}{16}\right) + d}{2} \Rightarrow X_3 = \frac{27X_0+49d}{32} \quad (16)$$

Шаг 4 (назад):

$$X_4 = \frac{3X_3+d}{4} \Rightarrow X_4 = \frac{3 \cdot \left(\frac{27X_0+49d}{32}\right) + d}{4} \Rightarrow X_4 = \frac{81X_0+179d}{128} \quad (17)$$

Шаг 5 (назад):

$$X_5 = \frac{3X_4+d}{16} \Rightarrow X_5 = \frac{3 \cdot \left(\frac{81X_0+179d}{128}\right) + d}{16} \Rightarrow X_5 = \frac{243X_0+665d}{2048} \quad (18)$$

Если $X_5=X_0$:

$$X_0 = \frac{243 \cdot X_0 + 665 \cdot d}{2048} \Rightarrow 2048 \cdot X_0 = 243 \cdot X_0 + 665 \cdot d \Rightarrow 1805 \cdot X_0 = 665 \cdot d \quad (19)$$

$$\underbrace{X_0 + X_0 + \dots + X_0}_{1805} = \underbrace{d + d + \dots + d}_{665} \quad (20)$$

Прийти в кольцо в условиях $(X_n/d) \notin \mathbb{N}$ означает достичь баланса в натуральных двух произведений изначально не связанных между собой значений.

Очередной шаг изменяет структуру исходной формулы (14), с учётом $d=\{p\}$

$$X_1 = \frac{3X_0+\{p\}}{8} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow X_n = \frac{3^n X_0 + K_n \cdot \{p\}}{2^m} \quad (21)$$

Здесь: «n» - количество шагов кольца, K_n - коэффициент, накопленный за «n»-шагов, «m» - число делений на 2, накопленное в кольце. Если $X_n=X_0$:

$$X_0 = \frac{3^n X_0 + K_n \cdot \{p\}}{2^m} \quad (22)$$

$$2^m \cdot X_0 = 3^n \cdot X_0 + K_n \cdot \{p\} \quad (23)$$

$$2^m \cdot X_0 - 3^n \cdot X_0 = K_n \cdot \{p\} \quad (24)$$

$$(2^m - 3^n) \cdot X_0 = K_n \cdot \{p\} \quad (25)$$

$$K_n = \left(\frac{2^m - 3^n}{\{p\}} \right) \cdot X_0 \quad (26)$$

$$K_n = Q \cdot X_0, \text{ где } Q = \left(\frac{2^m - 3^n}{\{p\}} \right), \quad Q \in \mathbb{N} \quad (27)$$

Кольцо «нечётных» в алгоритме Коллатца с простым $\{p\}$ в качестве «d» характеризуется константой $Q \in \mathbb{N}$, которая устанавливает связь между накопленным в кольце значением K_n и исходным X_0 .

$$\underbrace{X_0 + X_0 + \dots + X_0}_{(2^m - 3^n)} = \underbrace{p + p + \dots + p}_{K_n} \quad (28)$$

Умножим простое «p=19» в качестве «d» из предыдущего примера на произвольное нечётное «k=3», получим алгоритм, с приращением $d=k\cdot\{p\}=3\cdot\{19\}=57$

$$X_{n+1}=\frac{3\cdot X_n+57}{2^m}$$

(29)

Базовое кольцо (7 ⇒ 5 ⇒ 17 ⇒ 35 ⇒ 31 ⇒ 7) из алгоритма с приращением d={19} в новом алгоритме (3X+57)/2^m, при умножении на «3» перейдёт в кольцо: (21 ⇒ 15 ⇒ 51 ⇒ 105 ⇒ 93 ⇒ 21)

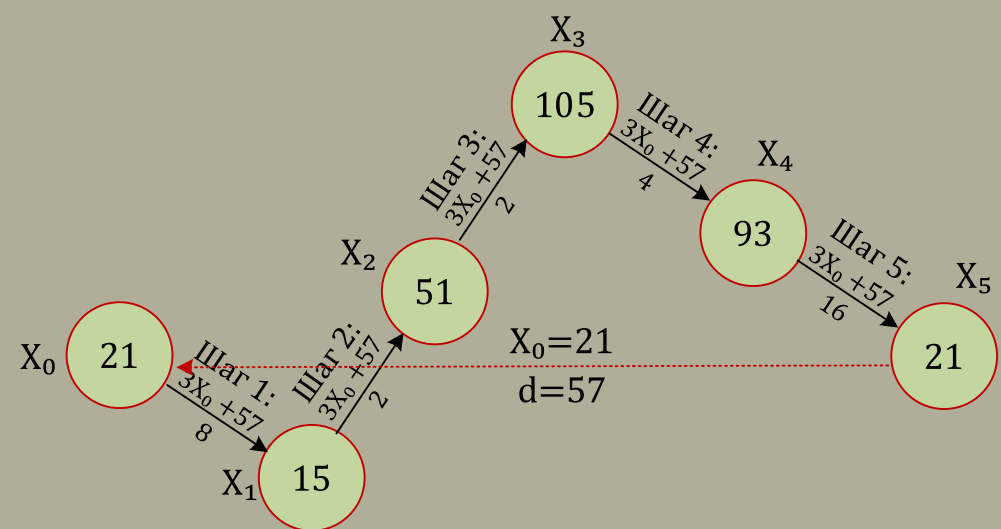


Рис.8 Траектория числа X₀=21 в алгоритме (3X+57)/2^m

Траекторию числа X₀=21 в алгоритме (3X+57)/2^m представим в символах общего вида:

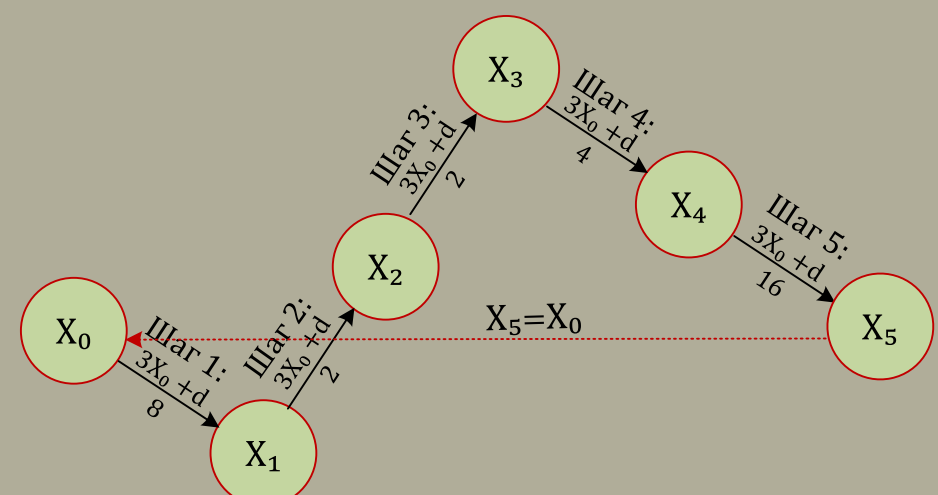


Рис.9 Траектория числа X₀=21 в алгоритме (3X+57)/2^m.

Траектория числа X₀=21 в алгоритме (3X+57)/2^m является копией траектории числа X₀=7 в алгоритме (3X+19)/2^m (см. Рис.7).

Поэтому воспользуемся готовым результатом из формулы (19):

$$X_0=\frac{243X_0+665\cdot k\cdot\{p\}}{2048} \Rightarrow 2048\cdot X_0=243\cdot X_0+665\cdot k\cdot\{p\}$$

(30)

$$(2048-243)\cdot X_0=665\cdot k\cdot\{p\} \Rightarrow 1805\cdot X_0=665\cdot k\cdot\{p\}$$

(31)

$$\underbrace{X_0+X_0+\dots+X_0}_{1805}=\underbrace{p+p+\dots+p}_{665\cdot k}$$

(32)

Очередной шаг изменяет структуру исходной формулы (13), с учётом d={k·p}

$$X_1=\frac{3X_0+k\cdot\{p\}}{2^m} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow X_n=\frac{3^nX_0+K_n\cdot k\cdot\{p\}}{2^m}$$

(33)

$$X_0=\frac{3^nX_0+K_n\cdot k\cdot\{p\}}{2^m}$$

(34)

$$2^m\cdot X_0=3^n\cdot X_0+K_n\cdot k\cdot\{p\}$$

(35)

$$2^m\cdot X_0-3^n\cdot X_0=K_n\cdot k\cdot\{p\}$$

(36)

$$(2^m-3^n)\cdot X_0=K_n\cdot k\cdot\{p\}$$

(37)

$$K_n\cdot k=\left(\frac{2^m-3^n}{\{p\}}\right)\cdot X_0$$

(38)

$$K_n\cdot k=Q_k\cdot X_0, \text{ где } Q_k=\left(\frac{2^m-3^n}{\{p\}}\right), \quad Q\in\mathbb{N}$$

(39)

Кольцо «нечётных» в алгоритме Коллатца с составным k·{p} приращением в качестве «d» характеризуется константой Q_k∈N, которая устанавливает связь между накопленным в кольце значением коэффициента (K_n·k) и исходным X₀.

$$\underbrace{X_0+X_0+\dots+X_0}_{(2^m-3^n)}=\underbrace{p+p+\dots+p}_{K_n\cdot k}$$

(40)

Из (27) и (39) следует: константа Q_k=Q. Кольца с одинаковой траекторией, имеют одинаковые константы, которые не зависят ни от множителя «k» в составном k·{p} в качестве «d» ни от X₀.

1.5 Доказательство отсутствия в алгоритме «3X+1» закольцованных фрагментов

Рассмотрим алгоритм «3X+3». Докажем, что он также, как и «3X+1», не имеет закольцованных фрагментов. Алгоритм «3X+3» удобно рассмотреть в пространстве табличного натурального ряда, в котором количество строк равно значению «d».

2,5,8	...	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	...
3,6,9	...	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	...
1,4,7	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	N

Таблица 3

Особенность этой таблицы в том, что сумма произвольных цифр верхнего ряда, с цифровым корнем 2,5,8, в итоге дают одну из цифр нижнего ряда, с цифровым корнем 1,4,7, и наоборот. А суммируя верхний ряд с нижним получим средний. Суммируя цифры среднего ряда, мы никогда не выйдем за его пределы. Свойства таблицы целиком определяются суммированием цифровых корней, и полученными в результате такого суммирования результатами.

Любое натуральное умноженное на 3, становится кратным 3, переходит в средний ряд $X_{3,6,9}$, потому что здесь сосредоточены все числа, кратные 3. Все остальные действия алгоритма «3X+3» выполняются и завершаются в пределах этого среднего ряда, числа которого $X_{3,6,9}=k \cdot 3$, где $k \in \mathbb{N}$. Учитывая, что для всех $X_n \in X_{3,6,9}$ верно $X_n = k \cdot 3$.

$$\frac{X_n}{d} = \frac{k \cdot 3}{3} = k \quad \Rightarrow \quad X_n = k \cdot d$$

(41)

Любое X_n , в алгоритме «3X+3», по причине его кратности приращению «d=3», завершается в нулевом цикле «d⇒d», т.е., в цикле «3⇒3». Можно утверждать, что в алгоритме «3X+3» отсутствуют условия существования кольца, потому что отсутствуют потенциальные возможности существования дробных значений отношения $(X_n/d) \notin \mathbb{N}$.

Утверждение, что алгоритм «3X+3» не имеет закольцованных фрагментов ДОКАЗАНО.

Следуя этой же логике, можно утверждать, что что алгоритм «3X+1» также не имеет закольцованных фрагментов, потому что в нём также отсутствуют потенциальные возможности существования дробных значений отношения $(X_n/d) \notin \mathbb{N}$ для любого натурального: любое X_n кратно «d=1», значит оно приводит к нулевому циклу «d⇒d», т.е., к циклу «1⇒1».

Аргумент кратности натурального единице может показаться банально простым, недостаточно убедительным. Тем не менее, этот факт не противоречит правилам математики, значит является аргументом на тех же правах, что и аргумент кратности любому другому натуральному.

ВЫВОД: В алгоритме Коллатца «3X+1» не существует закольцованных фрагментов, потому что отсутствуют потенциальные возможности существования дробных значений отношения $(X_0/d) \notin \mathbb{N}$ для любого натурального, что является необходимым условием существования кольца. Из кратности любого натурального единице, в качестве приращения «d», следует завершение последовательности в единственном нулевом цикле «1⇒1».

Библиографический список:

1. Тао, Теренс. [Электронный ресурс] // URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Тао,_Теренс (дата обращения: 21.03.2025)
2. Derek Muller. Самая простая нерешённая задача – гипотеза Колатца [Veritasium]/[Электронный ресурс]//
Студия Vert Dider: сайт. - URL: <https://youtu.be/QgzBDZwanWA?si=QW5HRHFjov1Y5F5l> (дата обращения: 21.03.2025)