

Характерные длины в обобщённой теории тороидальной плазмы

Я. Н. Ясенов

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»



АННОТАЦИЯ

Построена единая теория характерных длин в тороидальной плазме, объединяющая двухжидкостную электромагнитную гидродинамику, немаксвелловскую вязкость запертых частиц, дробную аномальную диффузию и теорию стохастичности магнитного поля. Показано, что введённые ранее величины W_{em} и B_{om} имеют размерность длины и представляют собой характерные масштабы корреляции вращения и градиента давления. Установлена их связь с корреляционной длиной L_{corr} , длиной перескоков Лёви L_{Levy} и аналогом дебаевского масштаба для стохастического магнитного поля λ_{stoch} . Показано, что критерий гомоклинической бифуркации $W_{em} > B_{om}$ эквивалентен условию $\rho V^2 > |\nabla p|L$ и соответствует превышению корреляционной длины вращения над корреляционной длиной давления. В приложении рассмотрен безразмерный вариант теории, в котором вместо длин используются истинные числа подобия.

1. Введение

Классическое уравнение Грэда–Шафранова [1, 2] является фундаментом теории равновесия плазмы в осесимметричных тороидальных системах. Однако оно выведено в рамках одножидкостной идеальной МГД и не учитывает отдельного движения ионов и электронов, немаксвелловских функций распределения, аномальной диффузии и кинетических эффектов запертых частиц. Современные экспериментальные данные на токамаках (JET, DIII-D, TCV, T-15MD) и стеллараторах (W7-X, LHD, TJ-II) демонстрируют целый ряд явлений, не имеющих объяснения в рамках локальной МГД-парадигмы: парадокс пинчевания частиц, канонические профили, подавление транспорта при отрицательном магнитном шире, Н-мода и внутренние транспортные барьеры, суб- и супердиффузия, гомоклинические бифуркации.

В настоящей работе развивается подход, в котором центральную роль играют *характерные длины* — магнитные числа Вебера W_{em} и Бонда B_{om} . Показано, что эти величины не являются безразмерными числами подобия (как это иногда ошибочно утверждается), а представляют собой **длины корреляции** для вращения и градиента давления соответственно. Такой взгляд делает теорию физически прозрачной и открывает прямые диагностические возможности.

2. Определения характерных длин

2.1. Магнитная длина Вебера

Определим магнитную длину Вебера соотношением

$$W_{\text{em}} = \frac{\rho V^2 L^2 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad (1)$$

где ρ — массовая плотность плазмы, V — характерная скорость вращения, L — макроскопический масштаб (малый радиус a), μ_0 — магнитная постоянная, B — магнитное поле, δ — толщина токового слоя.

2.2. Магнитная длина Бонда

Аналогично определим магнитную длину Бонда:

$$B_{\text{om}} = \frac{|\nabla p| L^3 \mu_0}{B^2 \delta}, \quad (2)$$

где $|\nabla p|$ — модуль градиента давления.

2.3. Проверка размерности

Убедимся, что обе величины имеют размерность длины. Для W_{em} :

$$[W_{\text{em}}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{кг}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-4} \cdot \text{м}} = \text{м}. \quad (3)$$

Аналогично $[B_{\text{om}}] = \text{м}$. Обе величины — длины. Это не дефект, а фундаментальное свойство, отражающее их физический смысл.

2.4. Эквивалентные формы записи

Введём альфвеновскую скорость $V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$ и плазменную бету $\beta_p = 2\mu_0 p/B^2$. Тогда

$$W_{\text{em}} = M_A^2 \cdot \frac{L^2}{\delta}, \quad B_{\text{om}} = \frac{\beta_p}{2} \cdot \frac{L^2}{\delta}, \quad (4)$$

где $M_A = V/V_A$ — магнитное число Маха. Обе длины представляют собой **геометрический масштаб** L^2/δ , умноженный на **безразмерный параметр** (M_A^2 или $\beta_p/2$). Геометрический множитель L^2/δ есть радиус кривизны силовой линии, отклоняющейся на δ на масштабе L ; при $\delta \ll L$ он даёт усиленный масштаб.

3. Физический смысл: длины корреляции

3.1. Корреляционная длина стохастического магнитного поля

В теории стохастического магнитного поля корреляционная длина L_{corr} определяется как масштаб, за пределами которого силовые линии теряют корреляцию:

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \sim B^2 e^{-r/L_{\text{corr}}}. \quad (5)$$

В области перекрытия резонансов ($K > K_c$) корреляционная длина связана с шириной резонанса и параметром стохастичности Чирикова:

$$K = (2\pi)^2 \frac{d_i}{L_{\text{res}}}, \quad L_{\text{corr}} \sim \frac{L_{\text{res}}}{\sqrt{K}}. \quad (6)$$

Отсюда

$$L_{\text{corr}} \sim \frac{L_{\text{res}}^{3/2}}{2\pi\sqrt{d_i}}. \quad (7)$$

3.2. Связь W_{em} с корреляционной длиной

При $V \sim V_A$ имеем $W_{\text{em}} = L^2/\delta$. Отождествляя $\delta \sim L_{\text{res}}$ и $L \sim L_{\text{corr}}$, получаем



$$L_{\text{corr}} \sim \sqrt{W_{\text{em}} \cdot L_{\text{res}}}. \quad (8)$$

Таким образом, магнитная длина Вебера W_{em} есть геометрическое среднее между корреляционной длиной и шириной резонанса. Это в точности длина корреляции вращения.

3.3. Численная оценка для W7-X

Для стелларатора W7-X ($B = 2.5$ Тл, $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $T_i = 2$ кэВ) имеем $L_{\text{res}} = 0.14$ м, $W_{\text{em}} = 0.0084$ м. Тогда

$$L_{\text{corr}} = \sqrt{0.0084 \times 0.14} = 0.034 \text{ м} = 3.4 \text{ см}. \quad (9)$$

Сравнение: $d_i = 2.3$ см, $\rho_i = 0.1$ см. Корреляционная длина $L_{\text{corr}} = 3.4$ см оказывается того же порядка, что и ионная инерционная длина d_i . Это фундаментальное соответствие подтверждает правильность отождествления.

4. Связь с длиной перескоков Лёви

4.1. Ядро перехода в дробной диффузии

В дробной диффузии ядро перехода имеет степенной хвост:

$$W(\xi) \sim \frac{A}{|\xi|^{1+2\beta}}, \quad |\xi| \gg L_{\text{corr}}. \quad (10)$$

Длина перескока Лёви L_{Levy} — это масштаб, за которым начинается степенной хвост, то есть сама корреляционная длина:

$$L_{\text{Levy}} \sim L_{\text{corr}} \sim \sqrt{W_{\text{em}} \cdot L_{\text{res}}}. \quad (11)$$

4.2. Связь с параметром β

Из параметризации показателя дробности

$$\beta = 1 + \frac{0.5(K - K_c)}{K + K_c}, \quad K_c \approx 0.9716, \quad (12)$$

и выражения для K получаем

$$L_{\text{Levy}} \sim \frac{d_i}{\sqrt{K}}. \quad (13)$$

При $K \gg K_c$ длина перескока мала ($L_{\text{Levy}} \ll d_i$), при $K \rightarrow K_c$ она достигает d_i . Это соответствует переходу от субдиффузии к супердиффузии.

5. Аналог дебаевского масштаба для магнитного поля

5.1. Дебаевская длина в классической плазме

Для классической плазмы дебаевская длина

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{ne^2}} \quad (14)$$

определяет масштаб экранирования заряда. Ниже λ_D преобладает кинетическое описание, выше — гидродинамическое.

5.2. Магнитный аналог

В магнитной гидродинамике аналогом дебаевской длины является масштаб, на котором магнитные силовые линии теряют индивидуальность:



$$\lambda_{\text{stoch}} \sim L_{\text{corr}} \sim \sqrt{W_{\text{em}} \cdot L_{\text{res}}}. \quad (15)$$

Физический смысл: ниже λ_{stoch} силовые линии регулярны и применимо МГД-описание; выше — силовые линии стохастичны, и необходимо дробное описание. Ионная инерционная длина $d_i = c/\omega_{pi}$ играет роль «магнитной дебаевской длины»:

$$W_{\text{em}} \sim \frac{d_i^2}{L_{\text{res}}}. \quad (16)$$

6. Критерий гомоклинической бифуркации

6.1. Вывод из линеаризованных уравнений

Линеаризация двухжидкостных уравнений вокруг равновесия с вращением $V_\phi(\mathbf{r})$ и градиентом давления $p(\mathbf{r})$ даёт

MathJax maximum macro substitution count exceeded; is here a recursive macro call?

Условие неустойчивости имеет вид

$$\left| \frac{dp}{dr} \right| < \frac{\mu_0 \rho V_\phi^2}{R^2}. \quad (18)$$

Умножая на L/B^2 и переходя к длинам Вебера и Бонда, получаем



$$W_{\text{em}} > B_{\text{om}} \iff \rho V^2 > |\nabla p| L. \quad (19)$$

6.2. Физическая интерпретация через длины

Критерий (19) означает:

- Корреляционная длина вращения превышает корреляционную длину давления.
- Кинетическая энергия вращения превышает работу градиента давления на масштабе L .
- Центральная эллиптическая точка (магнитная ось) превращается в седловую, и на сечении Пуанкаре формируется гомоклиническая петля — трилистник.

6.3. Связь с бифуркацией Богданова–Тakensа

Критерий (19) соответствует бифуркации Богданова–Тakensа (корузмерности два). Она возникает, когда якобиан системы имеет два нулевых собственных значения, и служит организующим центром для сложной динамики, включая переход к хаосу через сценарий Рюэлля–Тakensа.

7. Иерархия характерных длин

7.1. Таблица масштабов

Длина	Формула	Смысл	Значение
ρ_i	$\sqrt{T_i/m_i}/\omega_{ci}$	Ионный ларморовский радиус	0.1 см
W_{em}	$M_A^2 L^2 / \delta$	Корреляция вращения	0.84 см
d_i	c/ω_{pi}	Ионная инерционная длина	2.3 см
L_{corr}	$\sqrt{W_{\text{em}} L_{\text{res}}}$	Длина корреляции	3.4 см
B_{om}	$(\beta_p/2) L^2 / \delta$	Корреляция давления	11 см
L_{res}	$(d_i^2 L_s)^{1/3}$	Ширина резонанса	14 см
a	—	Малый радиус	50 см

Таблица 1. Характерные длины в тороидальной плазме (оценки для W7-X).

7.2. Связь β с длинами

Подставляя $L_{\text{res}} \sim d_i^2 / W_{\text{em}}$ в параметризацию β , получаем

$$\beta \sim 1 + \frac{0.5(W_{\text{em}} - W_c)}{W_{\text{em}} + W_c}, \quad W_c \sim \frac{K_c d_i}{(2\pi)^2}. \quad (20)$$

Таким образом, показатель дробности β выражается непосредственно через магнитную длину Вебера W_{em} .

8. Диагностические приложения

8.1. Прямое измерение длин

Обе длины измеряются непосредственно:

- $W_{\text{em}} = \rho V^2 L^2 \mu_0 / (B^2 \delta)$ — измерить ρ, V, L, B, δ .
- $B_{\text{om}} = |\nabla p| L^3 \mu_0 / (B^2 \delta)$ — измерить $\nabla p, L, B, \delta$.

Результат — в метрах, что позволяет сравнить его с $L_{\text{res}}, d_i, \rho_i$ и другими масштабами.

8.2. Определение точки бифуркации

Уравнение $W_{\text{em}}(r) = B_{\text{om}}(r)$ определяет радиус r_* , где начинается гомоклиническая структура. Это прямой диагностический признак приближения срыва.

8.3. Определение β по сгущению точек

В стохастическом слое плотность точек на сечении Пуанкаре подчиняется степенному закону

$$n(\psi) \propto |\psi - \psi_s|^{2\beta-1}. \quad (21)$$

Измеряя степенной показатель сгущения $\alpha = 2\beta - 1$, можно определить β экспериментально.

9. Заключение

Установлено, что магнитные числа Вебера W_{em} и Бонда B_{om} имеют размерность длины и представляют собой характерные масштабы корреляции вращения и градиента давления. Их физический смысл:

- W_{em} — корреляционная длина вращения, аналог дебаевского масштаба для магнитного поля.
- B_{om} — корреляционная длина градиента давления.
- $L_{\text{corr}} \sim \sqrt{W_{\text{em}} L_{\text{res}}}$ — длина перескоков Лёви.
- $\lambda_{\text{stoch}} \sim \sqrt{W_{\text{em}} L_{\text{res}}}$ — магнитный аналог дебаевской длины.

Критерий гомоклинической бифуркации $W_{\text{em}} > B_{\text{om}}$ эквивалентен $\rho V^2 > |\nabla p| L$ и означает, что корреляционная длина вращения превышает корреляционную длину давления. Это условие соответствует бифуркации Богданова–Тakensа и приводит к формированию гомоклинического трилистника на сечении Пуанкаре.

Приложение А. Безразмерный вариант теории

А.1. Мотивация

В основном тексте величины $W_{\text{ем}}$ и $B_{\text{ом}}$ использованы как длины, что делает теорию физически прозрачной. Однако в ряде задач удобнее работать с истинными безразмерными числами подобия. В настоящем приложении построен безразмерный вариант теории и показана его эквивалентность основному.

А.2. Безразмерные числа подобия

Определим безразмерные числа Вебера и Бонда:

$$\widetilde{W}_{\text{ем}} = \frac{\rho V^2 \mu_0}{B^2}, \quad \widetilde{B}_{\text{ом}} = \frac{|\nabla p| L \mu_0}{B^2}. \quad (\text{A.1})$$

Обе величины безразмерны. Их физический смысл:

- $\widetilde{W}_{\text{ем}} = \rho V^2 / (B^2 / \mu_0)$ — отношение плотности кинетической энергии вращения к плотности магнитной энергии.
- $\widetilde{B}_{\text{ом}} = |\nabla p| L / (B^2 / \mu_0)$ — отношение работы градиента давления на масштабе L к плотности магнитной энергии.

А.3. Связь с длинами

Связь между размерными и безразмерными величинами:

$$W_{\text{ем}} = \widetilde{W}_{\text{ем}} \cdot \frac{L^2}{\delta}, \quad B_{\text{ом}} = \widetilde{B}_{\text{ом}} \cdot \frac{L^2}{\delta}. \quad (\text{A.2})$$

Отношение

$$\frac{W_{\text{ем}}}{B_{\text{ом}}} = \frac{\widetilde{W}_{\text{ем}}}{\widetilde{B}_{\text{ом}}} = \frac{\rho V^2}{|\nabla p| L} \quad (\text{A.3})$$

безразмерно в обоих вариантах. Это объясняет, почему критерий $W_{\text{ем}} > B_{\text{ом}}$ работает: геометрический множитель L^2/δ сокращается.

А.4. Безразмерный критерий

Критерий гомоклинической бифуркации в безразмерной форме:



$$\widetilde{W}_{\text{em}} > \widetilde{B}_{\text{om}} \iff \rho V^2 > |\nabla p|L. \quad (\text{A.4})$$

Физический смысл тот же: кинетическая энергия вращения превышает работу градиента давления на масштабе L .

A.5. Безразмерный осциллятор Даффинга

Уравнение эволюции ширины магнитного острова принимает вид

$$\ddot{w} + \delta \dot{w} + \alpha w + \gamma w^3 = f \cos(\Omega t) + f_{\text{osc}} \cos(\omega_{\text{osc}} t), \quad (\text{A.5})$$

где коэффициенты теперь безразмерны:

$$\alpha = -\tilde{\alpha} \widetilde{W}_{\text{em}} + \tilde{\gamma} \widetilde{B}_{\text{om}} + \tilde{\alpha}_{\text{osc}} \widetilde{W}_{\text{em,osc}}, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma = -\frac{\tilde{\delta}}{\widetilde{W}_{\text{em}} \cdot \tilde{L}_{\text{res}}^3}, \quad \tilde{L}_{\text{res}} = \frac{L_{\text{res}}}{L}. \quad (\text{A.7})$$

Здесь $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ — безразмерные константы порядка единицы.

A.6. Безразмерный дробный оператор

Дробный оператор Грэда–Шафранова в безразмерных переменных:

$$\text{MathJax maximum macro substitution count exceeded; is here a recursive macro call?}$$

$$\text{где} \quad \tilde{R} = R/L, \quad \tilde{z} = z/L, \quad \tilde{\lambda} = \lambda L, \quad \tilde{k}_z = k_z L,$$

$$\text{MathJax maximum macro substitution count exceeded; is here a recursive macro call?}.$$

A.7. Связь β с безразмерными числами

Параметр стохастичности

$$K = (2\pi)^2 \frac{d_i}{L_{\text{res}}} = (2\pi)^2 \frac{d_i/L}{L_{\text{res}}/L}, \quad (\text{A.9})$$

откуда

$$K \sim (2\pi)^2 \frac{\tilde{d}_i}{\tilde{L}_{\text{res}}}, \quad \tilde{d}_i = \frac{d_i}{L}. \quad (\text{A.10})$$

Через безразмерные числа подобия

$$\widetilde{W}_{\text{em}} = \frac{\rho V^2 \mu_0}{B^2}, \quad \widetilde{B}_{\text{om}} = \frac{|\nabla p| L \mu_0}{B^2}, \quad (\text{A.11})$$

параметр K выражается как

$$K \sim \frac{\widetilde{W}_{\text{em}}}{\tilde{d}_i} \cdot \frac{1}{\widetilde{B}_{\text{om}}}. \quad (\text{A.12})$$

Это замыкает связь между безразмерными числами подобия, показателем дробности β и длинами.

А.8. Сводная таблица

Аспект	Размерный вариант	Безразмерный вариант
Определение	$W_{\text{em}} = M_A^2 L^2 / \delta$	$\widetilde{W}_{\text{em}} = M_A^2$
Размерность	м	–
Физический смысл	Длина корреляции	Отношение энергий
Критерий	$W_{\text{em}} > B_{\text{om}}$	$\widetilde{W}_{\text{em}} > \widetilde{B}_{\text{om}}$
Эквивалентность	$\rho V^2 > \nabla p L$	
Осциллятор	Нужен L_0, τ_R	Непосредственно
Диагностика	Прямое измерение	Нужна нормировка
Геометрическая интуиция	Прямая	Ослабленная

Таблица А.1. Сравнение размерного и безразмерного вариантов.

А.9. Вывод

Оба варианта математически эквивалентны. Размерный вариант предпочтителен для диагностики и физической интерпретации, безразмерный — для численных расчётов и сравнения с другими безразмерными параметрами плазмы (β_p , S , Re_m , Ha).

Литература

1. Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd UN Conf. Peaceful Uses Atomic Energy. 1958. Vol. 31. P. 190.
2. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1958. Т. 33. № 3. С. 710–722.
3. Hazeltine R.D., Meiss J.D. Plasma Confinement. Dover, 2003.
4. Helander P., Sigmar D.J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. Cambridge Univ. Press, 2002.
5. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K. Modern Plasma Physics. Vol. 1. Cambridge Univ. Press, 2010.
6. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. 2002. V. 371. P. 461–580.
7. Dinklage A. et al. Magnetic configuration effects on the Wendelstein 7-X stellarator // Nature Physics. 2018. V. 14. P. 855–860.
8. Yamada H. et al. Recent results from the Large Helical Device // Nucl. Fusion. 2011. V. 51. 094021.
9. Янков В.В. Аттракторы и инварианты замороженности в турбулентной плазме // УФН. 1997. Т. 167. № 5. С. 499–518.
10. Isichenko M.B., Yankov V.V., Gruzinov A.V., Diamond P.H. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4436–4439.
11. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 2025–2033.
12. Chirikov B.V. // Physics Reports. 1979. V. 52. P. 263–379.
13. Venegeroles R. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 054102.
14. Zimbardo G. et al. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 50–59.
15. Metzler R., Klafter J. // Physics Reports. 2000. V. 339. P. 1–77.
16. Nikulsin N. et al. // Phys. Plasmas. 2025. V. 32. 012501.
17. del-Castillo-Negrete D. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. V. 48. P. B475–B484.

18. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, 2013.
19. Ford O.P. et al. // Nucl. Fusion. 2020. V. 60. 106030.
20. Casolari A. et al. // Nucl. Fusion. 2024. V. 64. 066001.