

ИНВАРИАНТНОЕ УСРЕДНЕНИЕ СЕМЕЙСТВА РЕШЕНИЙ КОТTLERA ВАКУУМНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА С $\pm\Lambda$ -ЧЛЕНОМ

Михаил Батанов-Гаухман¹

(1) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Институт № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки”,
ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993
(e-mail: alsignat@yandex.ru)
20 сентября 2026

АННОТАЦИЯ

В данной работе предлагается единый подход к семейству метрических решений Коттлера для вакуумного уравнения Эйнштейна с космологической постоянной. Для объединения десяти метрик с сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$ в рамках одной системы используется метод инвариантного усреднения связанных с ними скаляров и инвариантов кривизны. В качестве основных результатов получены усредненные значения квадрата тензора Риччи, квадрата тензора Вейля и скалярной кривизны ($\langle C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} \rangle = 12r_b^2/r^6$, $\langle R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \rangle = 36/r_a^4$, $\langle g_{00} \rangle = 1$, $\langle R \rangle = 0$, $\langle R_{00} \rangle = 3c^2r^2/r_a^4$, $\langle K \rangle = 12r_b^2/r^6 + 24/r_a^4$, $\langle l_r^{(+)} \rangle = \langle \frac{\Delta r}{r} \rangle = \langle \sqrt{g_{11}} - 1 \rangle$ и другие), которые не зависят от выбора системы координат. На основе этих результатов построены математические модели двух противоположных стабильных сферических вакуумных образований, названных “ядром” и “анти-ядром” Коттлера-Шварцшильда-де Ситтера. Выявлены ограничения данного подхода, в частности, невозможность описания взаимодействия между этими образованиями и их эволюции. Для преодоления этих трудностей предложено расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна, включающее конечную разность множества положительных и отрицательных Λ -членов. Показано, что данное уравнение сводится к классическому уравнению Эйнштейна с эффективным космологическим членом и может служить основой для иерархической космологической модели в рамках программы геометризации физики. Работа представляет интерес для исследователей в области гравитации, космологии и математической физики, поскольку предлагает новый взгляд на проблему усреднения в общей теории относительности и ее приложения к моделированию структуры вакуума.

ABSTRACT

This paper proposes a unified approach to the Kottler family of metric solutions of the Einstein vacuum equation with a cosmological constant. To combine ten metrics with signatures $(+---)$ and $(-+++)$ within a single system, we employ the method of invariant averaging of the associated scalars and curvature invariants. As the main results, averaged values of the squared Ricci tensor, squared Weyl tensor, and scalar curvature are obtained ($\langle C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} \rangle = 12r_b^2/r^6$, $\langle R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \rangle = 36/r_a^4$, $\langle g_{00} \rangle = 1$, $\langle R \rangle = 0$, $\langle R_{00} \rangle = 3c^2r^2/r_a^4$, $\langle K \rangle = 12r_b^2/r^6 + 24/r_a^4$, $\langle l_r^{(+)} \rangle = \langle \frac{\Delta r}{r} \rangle = \langle \sqrt{g_{11}} - 1 \rangle$ and others), which are independent of the choice of coordinate system. Based on these results, mathematical models of two opposite stable spherical vacuum formations, called the Kottler–Schwarzschild–de Sitter “core” and “anti-core,” are constructed. Limitations of this approach are identified the impossibility of describing the interaction between these formations and their evolution. To overcome these difficulties, an extended Einstein vacuum equation is proposed, which includes a finite difference of a set of positive and negative Λ -terms. It is shown that this equation reduces to the classical Einstein equation with an effective cosmological constant and can serve as a basis for a hierarchical cosmological model within the program of geometrization of physics. This work is of interest to researchers in gravitation, cosmology, and mathematical physics, as it offers a new perspective on the averaging problem in general relativity and its applications to modeling the structure of vacuum.

Ключевые слова: проблема усреднения, метрика Коттлера, многообразие Эйнштейна, пространство де Ситтера / анти-де Ситтера, сигнатура метрики, вакуум, метрические решения, вакуумное уравнение, космологическая модель, относительное удлинение вакуума

Keywords: averaging problem, Kottler metric, Einstein manifold, de Sitter / anti-de Sitter space, metric signature, vacuum, metric solutions, vacuum equation, cosmological model, relative elongation of the vacuum

1 Введение

Вакуумное уравнение Эйнштейна с Λ -членом (или многообразие Эйнштейна) имеет вид:

$$R_{ik} = \Lambda g_{ik}, \quad (1)$$

где g_{ik} – компоненты метрического тензора гладкого 4-мерного пространства с псевдоримановой метрикой $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$,

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l - \text{тензор Риччи}, \quad (2)$$

$$\Gamma_{ik}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) - \text{символы Кристоффеля}, \quad (3)$$

$$T_{ik} = 0 - \text{нулевой тензор энергии-импульса внешнего материального источника (источник отсутствует)}, \quad (4)$$

$$\Lambda = 3/r_a^2 - \text{постоянная величина (где } r_a - \text{радиус сферы, или радиус де Ситтера)}. \quad (5)$$

Вакуумное уравнение (1), как результат решения вариационной задачи Эйнштейна–Гильберта, базируется на следующих фундаментальных принципах и аксиомах, лежащих в основе современной физики [1–14]: общей ковариантности, координатной инвариантности, эквивалентности, независимости скорости света от системы отсчета, причинности, экстремума действия, относительности, квазилинейности, диффеоморфной инвариантности, масштабной инвариантности и самосогласованности.

Кроме того, в результате 3+1 ADM-разложения уравнение вакуума (1) представляется как набор из 4-х уравнений связей и 6-и уравнений эволюции, которые напоминают законы сохранения, поскольку

$$\nabla_j [R_{ik} - \Lambda g_{ik}] = 0. \quad (6)$$

Причина в том, что рассматриваемый тензор тождественно равен нулю ($R_{ik} - \Lambda g_{ik} = 0$):

$$\nabla_j 0 = \frac{\partial 0}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^l 0 - \Gamma_{kj}^l 0 = 0.$$

Однако в искривлённом пространстве-времени для получения интегралов движения из дивергенции нужно проинтегрировать по объему, но ковариантная производная содержит символы Кристоффеля, которые мешают применять теорему Гаусса–Остроградского для тензоров ранга два и выше (в частности, $\Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l$). Тем не менее, вакуумное уравнение (1) пригодно для выявления стабильных вакуумных образований.

Такое сочетание основополагающих принципов в одном уравнении (1) придает его решениям особое значение.

Решениями вакуумное уравнение (1) является семейство сферически-симметричных решений Коттлера, объединяющее метрики Шварцшильда, де Ситтера, анти-де Ситтера и их комбинации. Обычно эти решения рассматриваются по отдельности, а метрики с сигнатурами $(+ - - -)$ и $(- + + +)$ считаются лишь разными записями одной и той же геометрии (конвенция). Однако вопрос об их объединении в одну систему остается открытым: из-за нелинейности уравнения (1) прямое суммирование или покомпонентное усреднение его метрик-решений приводит к нефизическим результатам, а усреднение тензорных величин в общей теории относительности зависит от выбора координат.

В настоящей работе предлагается подход, основанный на инвариантном усреднении скаляров и инвариантов кривизны, связанных с десятью метриками семейства Коттлера. Вместо усреднения компонент метрического тензора рассматриваются координатно-независимые величины: квадрат тензора Риччи, квадрат тензора Вейля, скалярная кривизна, нормы вектора Киллинга и относительное удлинение вакуума. Такой метод опирается на известные результаты Залетдинова, Бухерта, Грина и Уолда о допустимости усреднения скаляров и инвариантов кривизны.

2 Методы объединения решений вакуумного уравнения

2.1 Вакуумное уравнение Эйнштейна и семейство метрик Коттлера

Обобщенная теорема Биркгофа * гласит, что единственными сферически симметричными решениями уравнения (1)

$$R_{ik} - \Lambda g_{ik} = 0 \quad (7)$$

является семейство лоренцевых метрик Коттлера [1,2,5,13]

$$ds_1^2 = \pm f(r)c^2 dt^2 \mp \frac{dr^2}{f(r)} \mp r^2 d\theta^2 \mp r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8)$$

Из них пять метрик-решений с сигнатурой $(+---)$ в одной координатной карте (t, r, θ, φ) :

$$I \quad ds_1^{(+)^2} = \left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (9)$$

$$H \quad ds_2^{(+)^2} = \left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (10)$$

$$V \quad ds_3^{(+)^2} = \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (11)$$

$$H' \quad ds_4^{(+)^2} = \left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (12)$$

$$i \quad ds_5^{(+)^2} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2; \quad (13)$$

и пять аналогичных метрик-решений с противоположной сигнатурой $(-+++)$ в аналогичной карте

$$H' \quad ds_1^{(-)^2} = -\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (14)$$

$$V \quad ds_2^{(-)^2} = -\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (15)$$

$$H \quad ds_3^{(-)^2} = -\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (16)$$

$$I \quad ds_4^{(-)^2} = -\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (17)$$

$$i \quad ds_5^{(-)^2} = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (18)$$

где r_b – радиус Шварцшильда.

*Обобщенная теорема Биркгофа утверждает, что любое сферически-симметричное решение уравнения (7) с непостоянным радиусом площади локально изометрично одному из решений семейства Коттлера (9) – (18); исключительный случай постоянного радиуса площади приводит к пространству-времени Нариаи (Nariai) [24], которое здесь не рассматривается.

Считается, что метрики с сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$ при прочих равных условиях описывают одно и то же пространство-время в разной записи (это результат конвенции). Поэтому в современных научных работах обычно используют только одну из них.

Кроме того, в основном метрики-решения, например, (9) – (13) рассматриваются по отдельности для различных космологических задач (табл. 1).

Таблица 1 – Метрики-решения вакуумного уравнения (7) при сигнатуре $(+---)$

№	$f(r)$	Метрика, Λ^{**}
1	$1 - r_b/r + r^2/r_a^2$	$\Lambda > 0$ Шварцшильда – анти-де Ситтера (Sch-AdS)
2	$1 + r_b/r - r^2/r_a^2$	$\Lambda < 0$ анти-Шварцшильда – де Ситтера (ASch-dS)
3	$1 - r_b/r - r^2/r_a^2$	$\Lambda < 0$ Коттлера – Шварцшильда – де Ситтера *** (стандартная метрика Kott-Sch-dS)
4	$1 + r_b/r + r^2/r_a^2$	$\Lambda > 0$ анти-Шварцшильда – анти-де Ситтера (ASch-AdS) (отталкивающее центральное решение)
5	1	$\Lambda = 0$ Минковского (плоское пространство-время Минковского)

**Знак Λ относится к уравнению (1) с тензором Риччи (2) и сигнатурой $(+---)$; согласно наиболее распространенному в литературе соглашению, решения типа де Ситтера соответствуют $\Lambda > 0$.

*** Впервые метрику вида (11) Фридрих Коттлер записал в статье [3], опубликованной в марте 1918 г. В предельном случае $r_a \neq \infty$ и $r_b = 0$ метрика Коттлера (11) становится метрикой де Ситтера. В противоположном пределе $r_a = \infty$ и $r_b \neq 0$ она становится метрикой Шварцшильда. Когда оба $r_a = \infty$ и $r_b = 0$, метрики (9) – (12) сводятся к метрике Минковского плоского пространства-времени. Поэтому метрики-решения (9) – (12) обычно называют метриками Шварцшильда–де Ситтера и Шварцшильда–анти-де Ситтера (сокращенно $Sch-dS$ и $Sch-AdS$).

В этой статье предпринята попытка объединить метрики-решения семейства Коттлера (9) – (18) в рамках одной системы. Для этого мы пытаемся рассмотреть несколько вариантов такого объединения.

2.2. Проблемы объединения метрик-решений вакуумного уравнения

Суммирование всех 10-и метрик-решений (9) – (18) в одной координатной карте

$$ds_0^{(\pm)2} = \sum_{i=1}^5 ds_i^{(+2)} + \sum_{j=1}^5 ds_j^{(-2)} = 0 \quad (19)$$

это запрещенная операция из-за нелинейности уравнения (7), но она приводит к двум нулевым метрикам с суммарной сигнатурой $(+---) + (-+++)$ = (0 0 0 0):

$$ds_0^{(\pm)2} = \pm 0 \cdot c^2 dt^2 \mp 0 \cdot dr^2 \mp 0 \cdot r^2 d\theta^2 \mp 0 \cdot r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = 0. \quad (20)$$

Считается доказанным, что нулевые метрики (20) не являются решениями уравнения (7), поскольку символы Кристоффеля (3) в этом случае не определены

$$\lim_{g_{fl} \rightarrow 0} \Gamma_{ik}^\lambda = \lim_{g_{fl} \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \right] \rightarrow \frac{0}{0} = 0 \cdot \infty, \text{ где индексы } f \text{ и } l \text{ пробегает все значения } \lambda, \mu, i, k,$$

так как запись $g^{\lambda\mu} = 1/g_{i\mu} = 1/0$ некорректна. Кроме того, обратная метрика $g^{\lambda\mu}$ – это обращение матрицы $g_{i\mu}$, а не поэлементное деление и предельный переход « $1/0 \rightarrow \infty$ ».

Однако не исключено, что в некоторых случаях тензор Риччи (2) может оказаться равным нулю, если при определенных условиях неопределенности компенсируют друг друга за счет их разностей:

$$\lim_{g_{fl} \rightarrow 0} R_{ik} = \lim_{g_{fl} \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l \right] \rightarrow \left[\frac{\partial(0 \cdot \infty)}{\partial x^l} - \frac{\partial(0 \cdot \infty)}{\partial x^k} + (0 \cdot \infty)^2 - (0 \cdot \infty)^2 \right] \rightarrow [0 + 0] = 0.$$

Предлагаем вернуться к рассмотрению данного важного предельного случая, например, рассмотреть вырожденный предел однопараметрического семейства $g_{i\mu}(\varepsilon)$ с контролируемым пределом $\varepsilon \rightarrow 0$, для которого $R_{i\mu}(\varepsilon)$ вычисляется явно. Это выходит за рамки данной статьи, но решение этой проблемы позволит ввести нулевую сигнатуру (т.е. нейтральный элемент) в группу Алгебры сигнатур по операции сложения [16,17].

Уравнение (7) определяет метрико-динамическое состояние некоторой области пространства-времени (т.е. вакуума Эйнштейна) и не исключено, что все его лоренцевы метрики-решения (9) – (13) и (14) – (18) в одной координатной карте взаимосвязаны. Возникает вопрос: возможно ли объединить эти решения в рамках одной системы?

Из-за нелинейности уравнения (7) операции сложения и вычитания метрик-решений (9) – (18) не являются решениями этого уравнения, за исключением, возможно, нулевых операций типа (19) (требующих доказательства).

Вместе с тем допустимо предположить, что каждая метрика-решение уравнения (7) относится к общей системе с определенной вероятностью. В этом случае можно попытаться применить операцию усреднения.

Как было показано выше, усреднение всех 10-и метрик (9) – (18) приводит к нулевому результату (20), при этом метрики (13) и (18) характеризуют не искривленное, а исходное состояние вакуума (т.е. *плоское пространство-время Минковского*). Поэтому усреднять предлагается по отдельности метрики (9) – (12) и (14) – (17), поскольку они заданы в одной карте и имеют один и тот же ареальный радиус r .

Однако операция усреднения метрик – это одна из самых трудных задач в общей теории относительности, известная под названием «averaging problem» Исааксона–Бухерта, в отношении которой сложилась большая литература, в частности [21–23,26,27]. Основной вопрос: как усреднять тензоры, сохраняя их закон преобразования при замене координат? Общего ответа до сих пор нет.

В обзорах на эту тему указывают, что простой процедуры усреднения векторных и тензорных величин в ОТО на сегодня не существует. Дело в том, что усреднение компонент метрики привязано к выбранным координатам.

Если сделать замену координат, усреднить преобразованные компоненты и сравнить с предшествующим результатом усреднения компонент исходной метрики, то результаты не совпадают. Усреднение и преобразование координат не коммутируют.

Zalaletdinov, Buchert, Green и Wald в статьях [21–23] показали, что усреднение компонент метрического тензора по области пространства-времени является неинвариантной операцией, однако при этом допускается усреднять инварианты кривизны и скаляры, связанные с этими метриками.

Здесь мы сталкиваемся с аналогичной проблемой, так как если, например, выполнить покомпонентное усреднение ансамблей из четырех метрик (9) – (12) или (14) – (17), то соответственно получим усредненные метрики

$$\langle ds_{\Sigma}^{(\pm)2} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 ds_i^{(\pm)2} = \pm c^2 dt^2 \mp \langle g_{rr}^{(\pm)} \rangle dr^2 \mp r^2 d\theta^2 \mp r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (21)$$

$$\text{где } \langle g_{rr}^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} \right]. \quad (22)$$

Данные метрики не являются решением вакуумного уравнения (7), что влечет за собой нарушение инвариантности при смене координатной карты (t, r, θ, ϕ) . Для конечного ансамбля метрик, заданных на одном и том же многообразии с фиксированной идентификацией точек, поточечное среднее само по себе является тензором; реальная трудность заключается в неединственности этой идентификации между разными решениями (в данной модели эта идентификация фиксируется принятием одной и той же карты Коттлера для всех членов ансамбля с общим радиусом площади и нормировкой статического поля Киллинга) и в усреднении по протяженным областям пространства-времени [21–23].

Рассмотрим последствия неинвариантного усреднения. Для этого введем аксиоматический запрет на переход от сферической системы координат (t, r, θ, ϕ) к другим системам. Это означает, что рассматриваемая область вакуума наблюдается только извне. В данном контексте усредненные геодезические жестко связаны со средними размерами упругопластического вакуума и повторяют его деформации — подобно тому, как изгибаются линии, нанесенные на поверхность искривленного резинового листа.

В этом случае допустимо рассматривать усредненную метрику (21); однако гипотеза перестает быть релятивистски инвариантной и переходит в область механики сплошных сред, хотя и с использованием параметров и математического аппарата общей теории относительности.

Подставим компоненты $\langle g_{ii}^{(+)} \rangle$ из усредненной метрики (21) в выражения для компонент 4-вектора относительного удлинения вакуума [15]:

$$l_i^{(\pm)} = \sqrt{1 + \frac{g_{ii}^{(\pm)} - g_{iio}^{(\pm)}}{g_{iio}^{(\pm)}}} - 1, \quad (23)$$

где компоненты $g_{iio}^{(+)}$ и $g_{iio}^{(-)}$ взяты соответственно из плоских (исходных) метрик (13) и (18). В результате получим

$$\begin{aligned} \overline{l_r^{(\pm)}} &= \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{1 + \frac{\langle g_{rr}^{(\pm)} \rangle - g_{rr0}^{(\pm)}}{g_{rr0}^{(\pm)}}} - 1 = \sqrt{\langle g_{11}^{(\pm)} \rangle} - 1 = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} \right]} - 1 = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{r_b}{r}\right)^2 - \left(\frac{r^2}{r_a^2}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)^2\right)}} - 1, \quad (24) \\ l_t^{(\pm)} &= 0, \quad l_\theta^{(\pm)} = 0, \quad l_\phi^{(\pm)} = 0. \end{aligned}$$

Функция $\overline{l_r^{(\pm)}}$ (24) показывает усредненное относительное удлинение упругопластического вакуума в радиальном направлении на открытом участке $r_b < r < r_a$ (размерность r_a и r_b метр, из-за масштабной инвариантности уравнения (7), они могут быть любого масштаба). График рассматриваемой функции (24) при условно принятых для иллюстрации $r_a = 90$ м и $r_b = 1,5$ м обращается в бесконечность на горизонте Шварцшильда вблизи $r \approx r_b$ и на горизонте де Ситтера вблизи $r \approx r_a$, поэтому данная функция определена на интервале значений $r \in (1,5004; 89,2404)$ (смотрите рис. 1а).

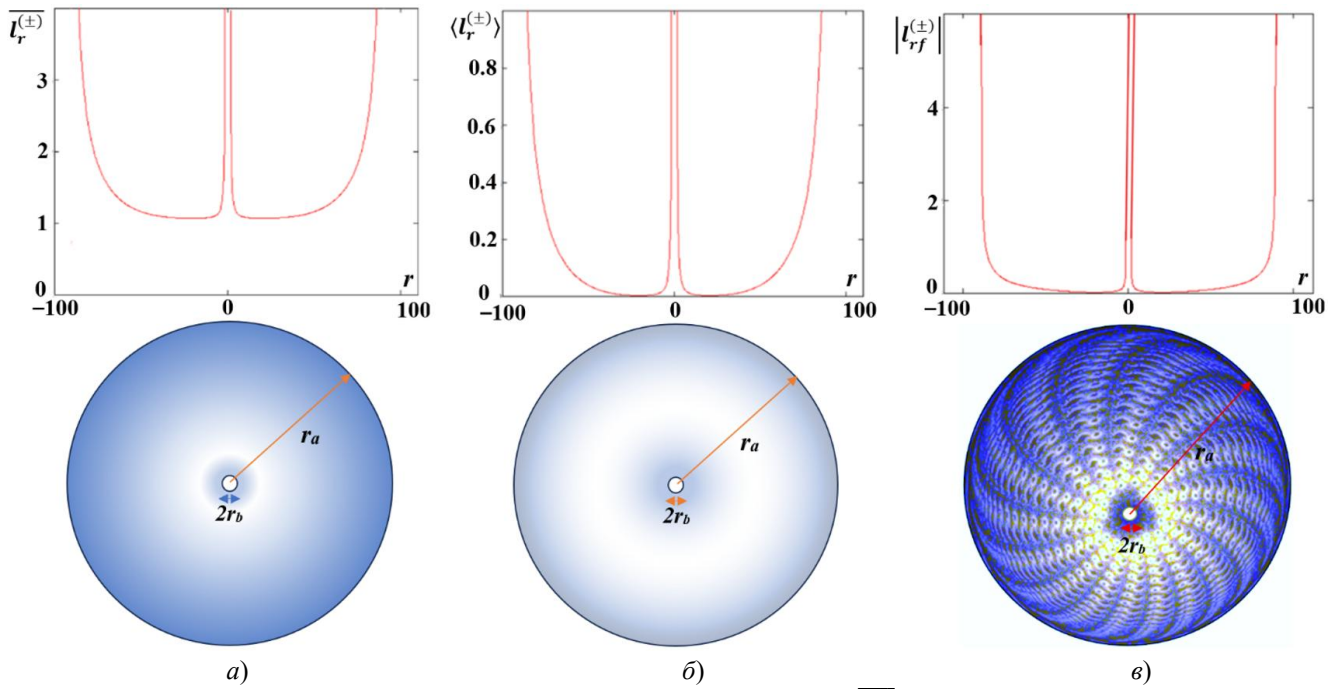


Рис. 1: Графики относительного удлинения (носят иллюстративный характер): а) $\overline{l_r^{(\pm)}}(24)$; б) $\langle l_r^{(\pm)} \rangle(25)$; в) $RMS(l_{rf}^{(\pm)}) = |l_{rf}^{(\pm)}|(32)$, при условно принятых: радиус де Ситтера $r_a = 90$ м и радиус Шварцшильда $r_b = 1,5$ м. Функции $\overline{l_r^{(\pm)}}$, $\langle l_r^{(\pm)} \rangle$ и $RMS(l_{rf}^{(\pm)})$ определяют относительное удлинение усредненного по ансамблям лоренцевых метрик (9) – (12) и (14) – (17) пространства-времени (т.е. вакуума Эйнштейна) в радиальном направлении. Аналитическая область всех трех графиков $r_b < r < r_a$, левые половины этих графиков – это их зеркальные отражения для удобства восприятия сферических объектов. Расчеты проводились с использованием программного обеспечения Mathcad. Нижняя часть рис. 1в – это не результат расчета по формулам, а художественная иллюстрация

2.3 Метод инвариантного усреднения

Инвариантное усреднение – это набор методов, которые позволяют корректно, не завися от выбора системы координат, усреднять физические величины в ОТО. Главная идея заключается в том, чтобы усреднять не компоненты метрики, а скалярные величины (например, скалярную кривизну, инварианты кривизны).

Скаляры инвариантны относительно преобразований координат, поэтому их значения в разных точках можно сравнивать и усреднять корректно. После этого можно попытаться построить «эффективные» уравнения Эйнштейна, которые описывают поведение усреднённых величин, и интерпретировать возникающие в них дополнительные члены как «эффективную» материю или «обратную реакцию» (backreaction) неоднородностей.

Существует несколько основных формализмов, реализующих эту идею:

1] Формализм Бухерта (Buchert formalism): Это один из наиболее популярных подходов. Он основан на пространственном усреднении скалярных частей уравнений Эйнштейна в рамках 3+1-формализма (разделение пространства-времени на пространственные срезы и время). В результате получаются уравнения для усреднённых скаляров (например, масштабного фактора), которые включают член обратной реакции (kinematical backreaction), описывающий влияние неоднородностей на общую динамику расширения Вселенной. Этот формализм координатно-независим (для скаляров) и находится применение в космологии для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения без введения тёмной энергии.

2] Макроскопическая гравитация Залалетдинова (Zalaletdinov's Macroscopic Gravity): Это более амбициозный и математически строгий подход, претендующий на полностью ковариантное усреднение в четырёхмерном пространстве-времени. Залалетдинов вводит специальный бивектор параллельного переноса для сравнения тензоров в разных точках, что позволяет корректно определить операцию усреднения для тензорных полей. В результате получаются усреднённые уравнения Эйнштейна, которые модифицируются корреляционным тензором — новым геометрическим объектом, описывающим влияние мелкомасштабных неоднородностей на крупномасштабную геометрию.

3] Подход Гасперини, Мародзи и Венециано (Gasperini, Marozzi, Veneziano): Этот метод развивает идеи калибровочно-инвариантного усреднения тензорных полей. Они вводят специальную «оконную функцию» (window function), с помощью которой можно определять усреднение, не зависящее от выбора калибровки, что особенно важно для космологических возмущений.

4] Усреднение Исааксона (Isaacson averaging): Этот подход применяется для гравитационных волн. Исааксон показал, как можно усреднить энергию-импульс высокочастотных гравитационных волн, чтобы получить эффективный тензор

энергии-импульса, который «искривляет» фоновое пространство-время. Ключевой момент — усреднение по области, много большей длины волны, что делает результат калибровочно-инвариантным.

В данной статье проблема усреднения стоит особенно остро, так как попытка объединить 10 метрик-решений семейства Коттлера в единую систему посредством простого суммирования или покомпонентное усреднение этих метрик приводит к нефизичному результату.

Инвариантное усреднение скаляров и инвариантов кривизны, связанных с каждым решением семейства Коттлера, соответствует описанным выше методам.

3. Результаты исследования

3.1. Арифметически усредненные скаляры и инварианты кривизны

Рассмотрим два возможных способа решения «проблемы усреднения» для семейства лоренцевых метрических решений Коттлера (9) – (18) вакуумного уравнения (7).

Как предложено в [21–23], будем отдельно усреднять инварианты кривизны и скаляры, связанные с ансамблями метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17).

Например, радиальная составляющая из выражения (23) $l_{ri}^{(\pm)} = \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{g_{11i}^{(\pm)}} - 1$ есть отношение дифференциала площадного радиуса к собственной радиальной длине, то есть скаляр карты *, но не инвариант кривизны, так как зависит от радиальной калибровки.

*Пусть R_A обозначает радиальную координату, определяемую геометрически через площадь $4\pi R_A^2$ орбит сферической симметрии. Для каждой лоренцевой метрики, например, ансамбля (9) – (12) $g(i)$ определим скаляр $X_i = |g(i)_{\mu\nu} \partial^\mu R_A \partial^\nu R_A|$ и величину $l_{ri} = X_i^{-1/2} - 1$. В координатах (9) – (12) имеем $R_A = r$, а в рассматриваемой здесь области, где $f_i(r) > 0$, выполняется $X_i = f_i(r)$, так что $l_{ri} = 1/f_i^{1/2} - 1$, при этом $l_{ri}^{(\pm)}$ является не только скаляром карты, но истинным скаляром, не зависящим от выбора системы координат.

Ареальный радиус r геометричен; разложение на «собственную радиальную длину» не единственно, если у четырех метрик (9) – (12) или (14) – (17) допускается различное $f(r)$. Поэтому мы постулируем, что все четыре метрики заданы на одной координатной карте. Тогда угловая часть во всех четырех метриках (9) – (12) и четырех метриках (14) – (17) одинакова $r^2 d\Omega^2$, поэтому r везде означает одно и то же и определено геометрически через площадь сферы $A = 4\pi r^2$. В этом случае усреднению подлежат инвариантные величины (23), посчитанные отдельно для каждой метрики из ансамбля (9) – (12) и ансамбля (14) – (17) **:.

$$\langle l_r^{(\pm)} \rangle = \frac{1}{4} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2})}} - 1 \right) \right], \quad (25)$$

$$l_t^{(\pm)} = 0, \quad l_\theta^{(\pm)} = 0, \quad l_\phi^{(\pm)} = 0. \quad (26)$$

**В этой статье мы постулируем, что каждая из четырех метрик ансамблей (9) – (12) и (14) – (17) участвует в общей системе с одинаковым весом $1/4$. Но это не следует из уравнения (7), поэтому выражение (25) – это невзвешенное арифметическое среднее четырех лоренцевых метрик, заданных на одной карте.

Расчеты по формуле (25), одинаковые для ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), показаны на рис. 1б. График функции (25) при условно принятых $r_a = 90$ м и $r_b = 1,5$ м стремится к бесконечности вблизи горизонтов $r \approx r_b$ и $r \approx r_a$, поэтому она определена на интервале значений $r \in (1,5004; 89,2404)$.

В этом случае аксиоматический запрет на замену системы отсчета можно снять. Это говорит в пользу данного подхода, так как результаты усреднения остаются инвариантными.

Очевидно, что расчеты по формулам (24) и (25) отличаются, т.е. усреднение компонент метрических тензоров и усреднение скаляров не совпадают.

Полный список всех скаляров и полиномиальных инвариантов кривизны метрик-решений практически бесконечен. Ниже приведены: стандартный независимый базис скаляров и инвариантов до второго порядка по кривизне ансамбля метрик (9) – (12) (табл. 2) и ансамбля метрик (14) – (17) (табл. 3)

Таблица 2 – Скаляры и инварианты кривизны ансамбля метрик (9) – (12) с сигнатурой (+ – – –)

Квадрат интервала	Норма вектора Киллинга $\xi_\mu \xi^\mu = g_{00}$	Скаляр Кречмана, $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$	Временная компонента тензора Риччи*, R_{00}	Скалярная кривизна, $R=4\Lambda$	Инвариант Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$	$R^0_0 = g^{00} R_{00}$	Квадрат тензора Риччи $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$ds_1^{(+2)}$	$1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_2^{(+2)}$	$1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_3^{(+2)}$	$1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_4^{(+2)}$	$1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$

* В общем случае компонента R_{00} зависит от выбора координаты t . Но в силу $R_{00} = \Lambda g_{00}$, R_{00} это свёртка $R_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu$ с полем Киллинга $\xi = \partial_t$, через которое определена норма $\xi_\mu \xi^\mu$. Поэтому здесь R_{00} – это скаляр статического поля Киллинга $\xi = \partial_t$, причем нормировка ξ зафиксирована в соответствии с общепринятой картой Коттлера, используемой в данной работе. Таким образом строго говоря R_{00} – это скаляр, связанный с полем Киллинга, а не инвариант кривизны.

Таблица 3 – Скаляры и инварианты кривизны ансамбля метрик (14) – (17) с сигнатурой (– + + +)

Квадрат интервала	Норма вектора Киллинга $\xi_\mu \xi^\mu = g_{00}$	Скаляр Кречмана, $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$	Временная компонента тензора Риччи, R_{00}	Скалярная кривизна, $R=4\Lambda$	Инвариант Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$	$R^0_0 = g^{00} R_{00}$	Квадрат тензора Риччи $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$ds_1^{(-2)}$	$-\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_2^{(-2)}$	$-\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_3^{(-2)}$	$-\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$-\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$+12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$+\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$
$ds_4^{(-2)}$	$-\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)$	$-12/r_a^2$	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	$-\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$

Сравнительный анализ таблиц 2 и 3 показывает, что некоторые скаляры и инварианты кривизны для метрик с разными сигнатурами (+ – – –) и (– + + +) совпадают только с точностью до знака, например, $\xi_\mu \xi^\mu$, R и R^0_0 . В рамках данной модели мы принимаем различие между этими двумя ветвями, связанными со знаком, в качестве дополнительной гипотезы, что метрики-решения (9) – (12) и (14) – (17) с взаимно-противоположными сигнатурами описывают разные объекты. Кроме того, в [17,18] показано, что метрические пространства с взаимно противоположными сигнатурами (+ – – –) и (– + + +) повернуты относительно друг друга 90° .

Отметим также, что такие скаляры и инварианты кривизны как: полная кривизна (т.е. скаляр Кречмана) $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$, инвариант Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$ и квадрат тензора Риччи $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ для всех метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17) одинаковые.

При средневзвешенной гипотезе $1/4$, арифметическое среднее скаляров и инвариантов кривизны лоренцевых метрик (9) – (12) (из табл. 2) практически полностью совпадает с арифметическим средним скаляров и инвариантов кривизны метрик (14) – (17) (из табл. 3), смотрите табл. 4.

Таблица 4 – Средние скаляры и инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17)

Средний (интер- вал) ²	Норма вектора Киллинга $\langle \xi_\mu \xi^\mu \rangle = \langle g_{00} \rangle$	Скаляр Кречмана, $\langle K \rangle = \langle R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \rangle$	Временная ком- понента тензора Риччи, $\langle R_{00} \rangle$	Скалярная кривизна, $\langle R \rangle = \langle 4\Lambda \rangle$	Инвариант Вейля $\langle C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \rangle$	$\langle R^0_0 \rangle = \langle g^{00} R_{00} \rangle$	Квадрат тен- зора Риччи $\langle R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle$
$\langle ds_i^{(\pm)2} \rangle$	± 1 + при (+---) - при (-+++)	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2 r^2}{r_a^4}$	0	$\frac{12 r_b^2}{r^6}$	0	$\frac{36}{r_a^4}$

Усредненные скаляры и инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), представленные в таблице 4, это величины, которые не меняются при изменении системы координат, поэтому они отражают внутренние геометрические свойства исследуемой искривленной области усредненного вакуума с усредненными относительными удлинениями (25) (рис. 1б).

Отметим следующую особенность. Нормы вектора Киллинга $\xi_\mu \xi^\mu$ для метрик (9) – (12) и (14) – (17) равны их нулевым (т.е. временным) компонентам (смотрите табл. 2 и 3). Эти нормы, как известно, являются скалярными функциями r . Они зависят от радиальной координаты, но сами значения $\xi_\mu \xi^\mu$ являются скалярами в каждой точке исследуемой области при фиксированном поле Киллинга ξ_μ . В этом случае усреднение скаляров $\xi_\mu \xi^\mu$ является инвариантной операцией, равной $\langle g_{00} \rangle = \langle g_{tt}^{(\pm)} \rangle = \pm 1$. Таким образом, в данной карте в области допустимых значений функции (25) в среднем по ансамблям решений (9) – (12) и (14) – (17) гравитационное замедление времени (т.е. усредненный фактор красного смещения) компенсируется.

3.2 Инвариантное среднеквадратичное усреднение скаляров и инвариантов кривизны (гипотеза о текстуре)

Рассмотрим еще один инвариантный способ объединения семейства метрик-решений вакуумного уравнения (7) в единую пространственно-временную систему.

Лоренцевы метрики $ds_i^{(+2)}$ (9) – (12) и $ds_i^{(-2)}$ (14) – (17) являются инвариантами, поэтому их усреднение является инвариантными операциями:

$$\langle s_{1-4}^{(+2)} \rangle = \frac{1}{4} (ds_1^{(+2)} + ds_2^{(+2)} + ds_3^{(+2)} + ds_4^{(+2)}), \quad (27)$$

$$\langle s_{1-4}^{(-2)} \rangle = \frac{1}{4} (ds_1^{(-2)} + ds_2^{(-2)} + ds_3^{(-2)} + ds_4^{(-2)}). \quad (28)$$

Выражения (27) и (28) можно представить в виде скалярного произведения комплексно-сопряженных полу-кватернионов (т.е. кватернионов, поделенных на $\frac{1}{2}$) [17,18]

$$\langle s_{1-4}^{(\pm)2} \rangle = \frac{1}{2} (ds_1^{(\pm)} + i ds_2^{(\pm)} + j ds_3^{(\pm)} + k ds_4^{(\pm)}) \frac{1}{2} (ds_1^{(\pm)} - i ds_2^{(\pm)} - j ds_3^{(\pm)} - k ds_4^{(\pm)}), \quad (29)$$

где $ds_i^{(\pm)}$ – абсолютные инварианты;

i, j, k – мнимые единицы, которые являются ортонормированным базисом алгебры кватернионов H , которая изоморфна четной подалгебре Клиффорда $Cl^0(3)$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (30)$$

Свойства кватернионов позволяют предположить, что условно «цветные» отрезки линий (т.е. «цветных нитей») $ds_1^{(\pm)}, ds_2^{(\pm)}, ds_3^{(\pm)}, ds_4^{(\pm)}$ везде взаимно перпендикулярны по отношению друг к другу $ds_1^{(\pm)} \perp ds_2^{(\pm)} \perp ds_3^{(\pm)} \perp ds_4^{(\pm)}$. Такое возможно, если «цветные» нити-инварианты $s_1^{(\pm)}, s_2^{(\pm)}, s_3^{(\pm)}, s_4^{(\pm)}$ (где $s_{nd}^{(\pm)} = \sqrt{g_{ikd}^{(\pm)}} dx^i dx^k$, $d = 1, 2, 3, 4$) переплетены в 4-нитевые спирали, образующие упругопластическую вакуумную ткань (т.е. текстуру) [16,17,18,19] (смотрите фрактальные иллюстрации на рис. 2).

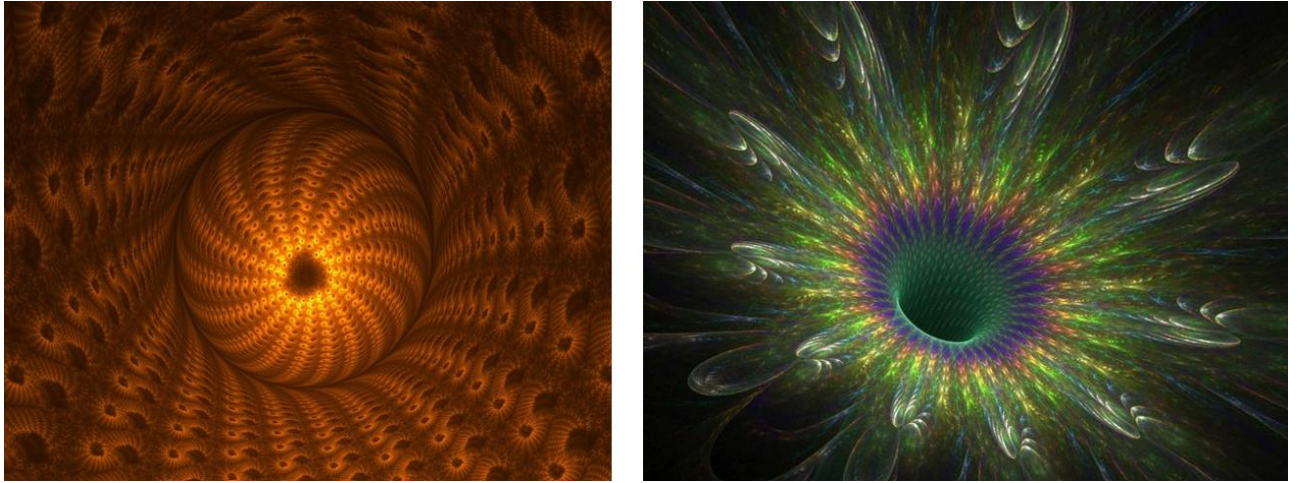


Рис. 2: Художественные фрактальные иллюстрации гибкой упругопластической ткани (текстуры) пространства, сплетенной из условно «цветных» инвариантных нитей $s_1^{(+)}$, $s_2^{(+)}$, $s_3^{(+)}$, $s_4^{(+)}$. Данные иллюстрации – это не результат расчетов по приведенным здесь формулам, а попытка визуализировать индуцируемую математикой ткань пространства с помощью фрактальных изображений, взятых из открытых источников Интернета

Условное представление вакуума в виде гибкой упругопластической ткани (текстуры) влечет за собой следующие последствия. Усредненные относительные удлинения для ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17) приобретают вид полу-кватернионов (т.е. кватернионов, деленных на 2)

$$l_{rf}^{(\pm)} = \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) + i \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) + j \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) + k \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right) \right], \quad (31)$$

а скалярами могут являться модули этих кватернионов, которые в данном случае совпадают со среднеквадратическими значениями

$$|l_{rf}^{(\pm)}| = \text{RMS}(l_{rf}^{(\pm)}) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)}} - 1 \right)^2}. \quad (32)$$

Графики функций (32) совпадают при условно принятых $r_a = 90$ м и $r_b = 1,5$ м, они представлены на рис. 1в. На границах интервала допустимых значений $r \in (r_b \approx 1,5004; r_a \approx 89,2404)$ функции (32) стремятся к бесконечности (∞).

Используя данные из табл. 2 и 3, аналогично рассчитаем среднеквадратические (RMS – root mean square) значения скаляров и инвариантов кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17) по формуле

$$\text{RMS}(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}.$$

Результаты вычислений представлены в табл. 5.

Таблица 5 – Одинаковые среднеквадратические инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17)

RMS (интервала) ² $ds_1^{(+2)}$	RMS нормы вектора Киллинга $\xi_\mu \xi^\mu = g_{00}$	RMS скаляра Кречмана, $K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$	RMS временной компонента тензора Риччи, R_{00}	RMS скалярной кривизны, $R = 4\Lambda$	RMS инварианта Вейля $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$	RMS $R^0_0 = g^{00} R_{00}$	RMS квadrата тен- зора Риччи $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$
$ds_\Sigma^{(+2)}$	$\sqrt{1 + \frac{r_b^2}{r^2} + \frac{r^4}{r_a^4}}$	$\frac{12r_b^2}{r^6} + \frac{24}{r_a^4}$	$\frac{3c^2}{r_a^2} \sqrt{1 + \frac{r_b^2}{r^2} + \frac{r^4}{r_a^4}}$	$\frac{12}{r_a^2}$	$\frac{12}{r^6} \frac{r_b^2}{r^6}$	$\frac{3}{r_a^2}$	$\frac{36}{r_a^4}$

Еще раз отметим, что среднеквадратические скаляры и инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), представленные в табл. 5, полностью совпадают.

При сравнении данных в табл. 2, 3 и 5 обнаруживаем, что с точностью до знака совпадают следующие параметры: $\text{RMS}(K) = K$, $\text{RMS}(R) = \pm R$, $\text{RMS}(R_0^0) = \pm R_0^0$ и $\text{RMS}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$.

Среднеквадратические инварианты кривизны ансамблей метрик (9) – (12) и (14) – (17), представленные в таблице 5, это величины, которые не меняются при изменении системы координат, поэтому они отражают внутренние геометрические свойства исследуемой искривленной ткани вакуума со среднеквадратическим относительным удлинением (32) (рис. 1в).

В рамках изложенной здесь «гипотезе о текстуре», допустимо предположить, что метрики (9) – (12) имеют одну общую временную координату t и по три различных пространственных координаты $(t, r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha)$, где $\alpha = 1, 2, 3, 4$ при условии, что квадраты их дифференциалов равны $dr_1^2 = dr_2^2 = dr_3^2 = dr_4^2$, а сами дифференциалы взаимно перпендикулярны $dr_1 \perp dr_2 \perp dr_3 \perp dr_4$. Тогда получается всего $12 + 1 = 13$ координат. При комплексном сопряжении метрик (9) – (12), дополнительные координаты компактифицируются до 4-х (t, r, θ, φ) , а каждый узел упругопластической ткани вакуума в некоторой степени напоминает одну из реализаций комплексного многообразия Калаби-Яу (рис. 2) [17].

3.3 Модели «ядра» и «анти-ядра» Коттлера–Шварцшильда–де Ситтера

В современных теориях, основанных на общей теории относительности, принято считать, что смена знаков части скаляров при изменении сигнатуры $(+---) \rightarrow (-+++)$ (сравните табл. 2 и 3) – является стандартным следствием смены конвенции. Однако, по мнению автора, нельзя безапелляционно отвергнуть гипотезу о том, что ансамбли лоренцевых метрик (9) – (12) и (14) – (17) с взаимно-противоположными сигнатурами определяют метрико-динамические модели двух разных противоположных объектов.

Кроме того, в § 5.2 [18] на двухмерном примере показано, что если координатные карты с противоположными сигнатурами находятся на разных сторонах листа, то они повернуты относительно друг друга на 90° .

Совокупность собранных выше сведений показывает, что ансамбли метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17) вакуумного уравнения Эйнштейна (7) описывают, с одной стороны, одинаковые, а, с другой стороны, взаимно противоположные замкнутые сферические объекты, повернутые относительно друг друга на 90° (однако, в силу сферической симметрии данный поворот, или фазовый сдвиг между этими объектами, практически не заметен).

Учитывая противоположность знаков некоторых скаляров (табл. 2 и 3) и другие свойства, мы условно приняли, что ансамбль метрик (9) – (12) описывает усредненную замкнутую выпуклость* пространства-времени (т.е. усредненного вакуума Эйнштейна), при этом ансамбль метрик (14) – (17) описывает противоположную усредненную замкнутую вогнутость* усредненного вакуума.

**Представить 3-мерную (и тем более 4-мерную) выпуклость или вогнутость пространства-времени невозможно, здесь предпринята попытка синтезировать язык описания двух противоположных стабильных сферических искривлений многослойного вакуума Эйнштейна на вспомогательной, бинарно-образной лингвистической основе.*

Из графиков на рис. 1б и 1в видно, что в любом случае инвариантного арифметического или среднеквадратического усреднения по ансамблю метрик (9) – (12) с сигнатурой $(+---)$, получается модель практически полого шара, напоминающего статический мир де Ситтера, с сильно растянутой периферией. При этом внутри большого шара де Ситтера находится сильно растянутое окружение малой по размерам сферической полости, которую будем называть ядрышко (или косточка) Шварцшильда. Такое стабильное замкнутое сферическое вакуумное образование условно назовем выпуклым «ядром» (или «яблоком») Коттлера–Шварцшильда–де Ситтера (сокращенно $KSdS$ - «ядро»)*.

**Расходимость функции $\sqrt{(1/f)} - 1$ на корнях $f(r) = 0$ – это горизонты каждой отдельной метрики Коттлера, а не стенка усредненного ядра, а полученные результаты – это только набор средних скаляров на интервале $r_b < r < r_a$. Тем не менее, исследуемый объект имеют явно выраженную шарообразную форму и сферическую границу. Поэтому иллюстративный термин «ядро» адекватен усредненной математической модели.*

При этом ансамбль метрик-решений (14) – (17) с противоположной сигнатурой $(-+++)$ позволяет построить точно также устроенную усредненную, но антиподную, замкнутую сферическую вогнутость вакуума (т.е. $KSdS$ - «анти-ядро»).

$KSdS$ -ядро с сигнатурой $(+---)$ и $KSdS$ -анти-ядро с сигнатурой $(-+++)$ мы называем сферической выпуклостью и сферической вогнутостью вакуума поэтому, что они полностью компенсируют проявления друг друга: $(+---) + (-+++) = (0\ 0\ 0\ 0)$, подобно частице и античастице.

Сотканное из вакуумной ткани ядро (рис. 1в и 2), со среднеквадратическим относительным удлинением (32), отличается от в среднем линейно деформированного ядра (рис. 1б), тем, что сотканная больше похожа на мыльный пузырь с тонкими стенками (рис. 3).



Рис. 3: Художественная иллюстрация пространства, заполненного сферическими ядрами и анти-ядрами различного масштаба (взята из открытых источников Интернета). Данная иллюстрация – это не результат расчетов по приведенным здесь формулам, а попытка облегчить восприятие математической модели и перспектив ее развития

Радиусы r_b и r_a изначально не определены. То есть, вакуумное уравнение (7) из-за масштабной инвариантности допускает любое их значение при условии $r_b \ll r_a$, точнее при $\frac{r_b}{r_a} < \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0,3849$. Поэтому вышеупомянутые $KSdS$ -ядро и $KSdS$ -анти-ядро могут быть любого размера.

Это позволило развить Иерархическую космологическую модель [19, 20], в рамках которой мир заполнен множеством $KSdS$ -ядер и анти-ядер (которые являются геометризованными аналогами частиц и античастиц) различного масштаба с дискретным набором радиусов r_{ai} и r_{bj} (рис. 3). Необходимость введения понятий $KSdS$ -ядро и анти-ядро обосновывается в серии статей под общим названием «Geometrized Vacuum Physics», включая [16, 20].

3.4 Расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна

В предыдущих пунктах было показано, что вакуумное уравнение Эйнштейна с Λ -членом (7) содержит потенциал описания одного $KSdS$ -ядра (т.е. замкнутой сферической выпуклости вакуума) и одного $KSdS$ -анти-ядра (т.е. замкнутой сферической вогнутости вакуума).

При этом возникли следующие проблемы:

1) Масштабная инвариантность уравнения (7) допускает, что $KSdS$ -ядро и $KSdS$ -анти-ядро могут быть любого размера, но их только две. Где большое многообразие колоссального количества частиц и античастиц?

2) В рамках рассматриваемой модели, основанной на инвариантном усреднении скаляров и инвариантов кривизны ансамблей лоренцевых метрик-решений (9) – (12) и (14) – (17) вакуумного уравнения (7), невозможно описать взаимодействие изолированных друг от друга $KSdS$ -ядра и $KSdS$ -анти-ядра;

3) У $KSdS$ -ядра и $KSdS$ -анти-ядра усредненное относительное удлинение на их сферической периферии и возле малой центральной сферической полости стремится к бесконечности (рис. 1б и 1в);

4) Не ясно, что находится за пределами внешней сферической границы де Ситтера у $KSdS$ -ядра и анти-ядра, и что внутри их центральной сферической полости Шварцшильда? В рамках рассматриваемой математической модели там ничего нет, даже искривленного вакуума (рис. 1б и 1в). Это недопустимо.

5) Согласно современным представлениям, метрики с противоположными сигнатурами $(+ - - -)$ и $(- + + +)$ взаимно заменяемы и описывают одно и то же многообразие в разных обозначениях. В рамках такой аксиоматики совокупности метрик (9) – (13) с сигнатурой $(+ - - -)$ и метрик (14) – (18) с сигнатурой $(- + + +)$ описывают одну и ту же сферическую область вакуума. То есть имеет место двукратная вырожденность. Однако разница между ними имеется, в частности, противоположные знаки некоторых инвариантов, смотрите табл. 2 и 3. Кроме того, такая вырожденность расщепляется на два взаимно противоположных объекта, повернутых относительно друг друга на 90° .

В результате возникла следующая дилемма: С одной стороны, семейство метрик Коттлера (9) – (18) чрезвычайно значимо, т.к. является взаимосвязанной совокупностью решений одного из самых основополагающих уравнений современной физики (7). С другой стороны, инвариантное усреднение двух взаимно противоположных

ансамблей из этих метрик привело к вышеуказанным проблемам. Вакуумное уравнение (7) не содержит возможности выхода из этой ситуации.

С целью попытки решения этих проблем и многих других задач в статье [19] в качестве гипотезы предложено расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна с большим числом положительных и отрицательных Λ -членов

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m + \sum_{n=1}^N -\Lambda_n) = 0, \quad (33)$$

где $\Lambda_m = \frac{3}{r_m^2}$, $\Lambda_n = \frac{3}{r_n^2}$, здесь r_m – радиус m -го ядра, r_n – радиус n -го анти-ядра;

M – количество ядер, стремится к ∞ ; N – количество анти-ядер, стремится к ∞ .

Даже если Λ_m и Λ_n убывают с увеличением радиусов ядер r_m и анти-ядер r_n , ряды $\sum_{m=1}^N \Lambda_m$ и $\sum_{n=1}^M \Lambda_n$ расходятся (т.е. не имеют конечного предела), но их разность может быть конечной. Это позволяет наложить на расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна (33) условие *

$$\frac{1}{2} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m + \sum_{n=1}^N -\Lambda_n) = \frac{1}{2} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m - \sum_{n=1}^N \Lambda_n) = \Lambda_0 = \text{constant}. \quad (34)$$

**Разность в (34) понимается как предел разностей частичных сумм при определенном правиле введения общего обрезания – при условии, что этот предел существует; в рассматриваемой модели существование и значение этого регуляризованного предела постулируются в рамках условия (34). При выполнении этого условия уравнение (33) сводится к уравнению (7) с $\Lambda = \Lambda_0$, а его роль заключается в разложении Λ_0 на вклады отдельных ядер и анти-ядер, что приводит к интерпретации (38) – (39), связывающей кривизну с источниками.*

Если на связном многообразии размерности $n > 2$ выполняется соотношение $R_{ik} = \Lambda_0 g_{ik}$, то из свертки тождества Бианки следует, что Λ_0 – постоянная величина (лемма Шура [25]); таким образом, условие (34) согласуется с уравнением поля и не является дополнительным допущением. Взятие следа дает $R = 4\Lambda_0$.

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{ik} g_{ik} \Lambda_0 = n \Lambda_0 = 4\Lambda_0. \quad (35)$$

При выполнении условия (34) расширенное вакуумное уравнение (33) обладает теми же свойствами, что и вакуумное уравнение Эйнштейна (7), поскольку в этом случае ковариантная производная от его левой части также равна нулю, подобно выражению (6):

$$\nabla_j [R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{m=1}^\infty \Lambda_m + \sum_{n=1}^\infty -\Lambda_n)] = \nabla_j [R_{ik} - g_{ik} \Lambda_0] = 0. \quad (36)$$

Расширенное вакуумное уравнение (33) представляет широкие возможности, например, если представить это уравнение в следующем виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{h=1}^H \Lambda_h + \sum_{p=1}^P -\Lambda_p) - \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{a=1}^A \Lambda_a + \sum_{b=1}^B -\Lambda_b) = 0, \quad (37)$$

где

$$\frac{1}{2} (\sum_{h=1}^H \Lambda_h + \sum_{p=1}^P -\Lambda_p) = T_s \quad \text{для ядер и анти-ядер микромира}, \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} (\sum_{a=1}^A \Lambda_a + \sum_{b=1}^B -\Lambda_b) = \Lambda_B \quad \text{для ядер и анти-ядер макромира},$$

при этом $(\Lambda_B + T_s) = \Lambda_0$.

Тогда уравнение вида (37), с учетом постоянства скалярной кривизны (35) $R = 4\Lambda_0 = 4(\Lambda_B + T_s)$, принимает вид

$$R_{ik} - \Lambda_0 g_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda_0 g_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + (T_s + \Lambda_B) g_{ik} = 0.$$

В результате получим уравнение с источниками (38):

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda_B g_{ik} = -T_s g_{ik}, \quad (39)$$

которое, при $\Lambda_s = 1,089 \cdot 10^{-52} \text{ м}^{-2}$, имеет вид уравнения, пригодного для обсуждения космологических проблем.

Перенос постоянного члена $T_s g_{ik}$ в правую часть уравнения (39) соответствует стандартной интерпретации части космологического члена как тензора энергии-импульса вакуума, пропорционального g_{ik} [28, 29].

4 Обсуждение полученных результатов

Настоящее исследование посвящено объединению десяти метрических решений семейства Коттлера в рамках единой системы. Полученные результаты позволяют сделать несколько выводов и открывают новые направления для дискуссии.

4.1 Интерпретация результатов усреднения

Инвариантное усреднение скаляров и инвариантов кривизны по ансамблям лоренцевых метрик (9) – (12) и (14) – (17) дало осмысленные, не зависящие от координат величины (Таблицы 4 и 5). Эти усредненные значения отражают внутренние геометрические свойства рассматриваемой области искривленного вакуума, в отличие от неинвариантного покомпонентного усреднения, которое приводит к результатам, зависящим от выбора координат и физически неоднозначным.

Важно подчеркнуть, что усреднение инвариантов кривизны и скаляров допустимо даже тогда, когда усреднение компонент метрики невозможно, как было показано Залалетдиновым, Бухертом, Грином и Вальдом [21–23]. Наши результаты подтверждают этот принцип: в то время как прямая сумма всех десяти метрик приводит к нулевой метрике (20), которые в общем виде не являются решением вакуумного уравнения. Инвариантное усреднение скаляров, связанных с этими метриками, дает хорошо определенные, конечные величины, характеризующие усредненную область вакуума.

Совпадение среднеквадратичных инвариантов кривизны для ансамблей метрик с противоположными сигнатурами (Таблица 5) особенно примечательно. Это говорит о том, что, несмотря на различие знаков некоторых скаляров (Таблицы 2 и 3), лежащая в основе геометрическая структура усреднённого вакуума обладает определённой симметрией между двумя ансамблями. Эта симметрия может иметь глубокие последствия для понимания связи между материей и антиматерией в контексте предлагаемой Иерархической космологической модели [16 – 20].

4.2 $KSdS$ -ядро и анти-ядро как математические модели

Математические модели $KSdS$ (Коттлера–Шварцшильда–де Ситтера) ядра и анти-ядра, построенные на основе инвариантного усреднения метрик семейства Коттлера, представляют собой стабильные, сферически замкнутые образования вакуума Эйнштейна. Эти объекты характеризуются:

1. *Выраженной сферической формой* с малой центральной полостью (шварцшильдовским «нуклеолусом») и протяжённой де ситтеровской периферией.
2. *Усреднённым относительным удлинением*, стремящимся к бесконечности на горизонтах отдельных метрик, что отражает сильную кривизну вакуума в этих областях.
3. *Полной взаимной компенсацией* их проявлений: $KSdS$ -ядро с сигнатурой $(+ - - -)$ и $KSdS$ -анти-ядро с сигнатурой $(- + + +)$ удовлетворяют соотношению $(+ - - -) + (- + + +) = (0\ 0\ 0\ 0)$, аналогично паре частица–античастица. Аналогия с парами частица–античастица дополнительно усиливается наблюдением, что координатные карты с противоположными сигнатурами повернуты друг относительно друга на 90° [18]. Этот фазовый сдвиг между ядром и анти-ядром может дать геометрическое объяснение барионной асимметрии материи, как отмечено в Заключение.

Однако необходимо признать несколько ограничений этих моделей. Во-первых, расходимость функции относительного удлинения на горизонтах указывает на то, что усреднённое описание нарушается в этих областях и требуется более точный подход. Во-вторых, модели не описывают взаимодействие между $KSdS$ -ядром и $KSdS$ -анти-ядром, а также не объясняют, что находится за внешней деситтеровской границей и внутри центральной шварцшильдовской полости. Эти недостатки мотивировали введение расширенного вакуумного уравнения Эйнштейна (33).

4.3 Расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна

Расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна (33) с большим числом положительных и отрицательных Λ -членов представляет собой естественное обобщение исходного вакуумного уравнения (7). Как показано в Разделе 3.4, это уравнение сводится к классическому уравнению Эйнштейна с эффективной космологической постоянной Λ_0 при выполнении условия (34). Разложение Λ_0 на вклады от отдельных ядер и анти-ядер обеспечивает механизм описания множества вакуумных образований различных масштабов, тем самым решая первую проблему, обозначенную в Разделе 3.4.

Более того, расширенное уравнение (33) открывает возможность описания взаимодействия между $KSdS$ -ядрами и $KSdS$ -анти-ядрами [20]. Это уравнение, принимающее форму стандартного уравнения Эйнштейна с источниками, позволяет интерпретировать часть космологического члена как тензор энергии-импульса вакуума, в соответствии с идеями Зельдовича [28] и Вайнберга [29].

Связь между расширенным вакуумным уравнением и Иерархической космологической моделью [19, 20], на наш взгляд, особенно перспективна. Дискретный набор радиусов r_{ai} и r_{bj} $KSdS$ -ядер и $KSdS$ -анти-ядер различных

масштабов обеспечивает естественную основу для описания иерархической структуры Вселенной, от элементарных частиц до галактических скоплений. Этот подход согласуется с программой Клиффорда–Эйнштейна–Уилера по полной геометризации физики, как изложено во Введении.

4.4 Сравнение с другими подходами к проблеме усреднения

Метод инвариантного усреднения, использованный в данном исследовании, имеет сходство с несколькими существующими подходами к проблеме усреднения в общей теории относительности, но также обладает и отличительными чертами.

Формализм Бухерта [22] также делает акцент на усреднении скалярных величин и появлении членов обратной реакции, описывающих влияние неоднородностей на общую динамику. Однако подход Бухерта применяется преимущественно в космологических сценариях с одной метрикой, тогда как наш метод имеет дело с ансамблем различных метрических решений одного и того же уравнения. Усреднение скаляров по семейству метрик, как это сделано здесь, представляет собой новое расширение этой идеи.

Макроскопическая гравитация Залалетдинова [21] обеспечивает полностью ковариантный формализм для усреднения тензорных полей с использованием бислокального параллельного пропагатора. Будучи математически более строгим, этот подход также более сложен и пока не получил широкого применения к конкретным физическим задачам. Наш метод, напротив, проще и более удобен для практического использования, хотя и ценой отказа от полной тензорной ковариантности в пользу скалярной инвариантности.

Усреднение Исааксона [24, 25] для гравитационных волн также включает усреднение по областям, большим по сравнению с характерной длиной волны, что даёт эффективный тензор энергии-импульса. Хотя метод Исааксона предназначен для высокочастотных возмущений на фиксированном фоне, наш подход занимается усреднением по ансамблю точных решений, что концептуально иначе.

Ключевая новизна нашего подхода заключается в применении инвариантного усреднения к семейству метрик Коттлера, которые обладают различными сигнатурами и описывают различные геометрические структуры. Полученные модели $KSdS$ -ядра и $KSdS$ -анти-ядра представляют собой новый класс вакуумных образований, ранее не обсуждавшихся в литературе.

5.5 Ограничения и открытые вопросы

Следует признать несколько ограничений настоящего исследования:

1. *Гипотеза равного веса*: среднее арифметическое (25) и среднеквадратичное (32) предполагают, что каждая метрика в ансамбле вносит равный вклад. Однако это предположение не следует из вакуумного уравнения (7) и требует дополнительного обоснования. Более общий подход мог бы включать взвешенное усреднение, где веса определяются динамическими или вероятностными соображениями.
2. *Проблема вырождения*: считается, что нулевые метрики (20), возникающие в результате формальной суммы всех десяти метрик, не являются решениями вакуумного уравнения, однако предел $g_{ik} \rightarrow 0$ требует более тщательного рассмотрения. Как отмечено в Разделе 3, решение этой проблемы позволило бы ввести нулевую сигнатуру в Алгебру сигнатур, что могло бы иметь значительные последствия для классификации метрических пространств.
3. *Проблема взаимодействия*: расширенное вакуумное уравнение (33) обеспечивает основу для описания множества $KSdS$ -ядер и $KSdS$ -анти-ядер, но детальная динамика их взаимодействия ещё требует изучения [16 – 20]. В частности, неясно, как источник T_s в уравнении (39) должен интерпретироваться физически и может ли он объяснить наблюдаемые свойства тёмной материи и тёмной энергии.
4. *Наблюдательный статус*: $KSdS$ -ядро и анти-ядро являются математическими конструкциями, выведенными из инвариантного усреднения семейства Коттлера. Их связь с наблюдаемыми явлениями остаётся спекулятивной и требует дальнейшего исследования (смотрите [16 – 20]).
5. *Выбор процедуры усреднения*: мы рассмотрели четыре различные операции с метрическими решениями (формальная нулевая сумма, неинвариантное покомпонентное среднее, инвариантное арифметическое среднее скаляров и инвариантное полукватернионное среднеквадратичное среднее). Хотя мы отдаём предпочтение четвёртой операции, остальные требуют дальнейшего детального рассмотрения. Вопрос о том, какая процедура усреднения наиболее адекватна для данной физической задачи, остаётся открытым.

4.6 Направления будущих исследований

Из данного исследования вытекает несколько перспективных направлений для дальнейшей работы:

1. *Развитие Алгебры сигнатур*: введение нулевой сигнатуры (нейтрального элемента) в Алгебру сигнатур [16, 17] обеспечило бы более полную математическую основу для описания вырожденного предела метрики и могло бы привести к новым insights в структуру пространства-времени.
2. *Применение к конкретным космологическим проблемам*: Иерархическая космологическая модель [19, 20], основанная на расширенном вакуумном уравнении (33), должна быть применена к конкретным космологическим задачам, таким как формирование крупномасштабной структуры, природа тёмной материи и тёмной энергии, а также барионная асимметрия Вселенной.
3. *Связь с квантовой теорией поля*: расширенное вакуумное уравнение (33) с его множеством Λ -членов имеет формальное сходство с уравнениями ренормализационной группы квантовой теории поля. Исследование этой связи могло бы обеспечить мост между общей теорией относительности и квантовой механикой, в соответствии с программой Клиффорда–Эйнштейна–Уилера.
4. *Численное моделирование*: модели $KSdS$ -ядра и $KSdS$ -анти-ядра могли бы быть изучены численно для исследования их стабильности, взаимодействий и возможных наблюдательных проявлений. Это потребовало бы разработки численных кодов, способных работать с расширенным вакуумным уравнением с множеством Λ -членов.
5. *Обобщение на другие семейства метрик*: Метод инвариантного усреднения, разработанный здесь, мог бы быть применён к другим семействам точных решений уравнений Эйнштейна, таким как семейство Керра–Ньюмана или семейство Плебаньского–Демянского, что потенциально может привести к новым insights в структуру вакуума.

В заключение отметим, что инвариантное усреднение семейства метрик Коттлера привело к значимым результатам, которые открывают новые перспективы для проблемы усреднения в общей теории относительности и её приложений к космологии и физике элементарных частиц. Несмотря на то, что остаётся ряд ограничений и открытых вопросов, разработанный здесь подход обеспечивает прочную основу для дальнейших исследований в рамках Геометризованной физики вакуума и программы Клиффорда–Эйнштейна–Уилера.

Выводы

Ожидаемо, что различные решения одного нелинейного дифференциального уравнения при одних и тех же граничных условиях могут быть связаны между собой, и относиться к описанию одной системы.

Всякий раз, когда мы выводим за рамки рассмотрения те или иные решения уравнений математической физики, это в итоге неизбежно приводит к тупиковым ситуациям, парадоксам, сингулярностям, расходимостям и другим негативным последствиям. Напротив, полнота учета всех возможностей, предоставляемых математикой, неуклонно ведет к построению логически завершенных моделей.

Цель этого сообщения: показать, что учет всех 10-и возможных лоренцевых метрик-решений семейства Коттлера (9) – (18) вакуумного уравнения Эйнштейна (7) в рамках одной системы приводит к осмысленным результатам.

Основными трудностями на пути объединения этих метрик в одну систему являются: 1) общепринятое утверждение, что сумма решений нелинейного уравнения не является его решением; 2) «проблема усреднения», которая заключается в том, что усреднение компонент метрического тензора g_{ik} , как по области пространства, так и по ансамблю метрик-решений, является неинвариантной операцией.

В этой статье предлагается считать, что метрики-решения (9) – (18) в одной координатной карте реализуются как части единой системы с определенной вероятностью. В этом случае неинвариантную операцию сложения и усреднения компонент метрического тензора метрик-решений уравнения (7) мы, ссылаясь на статьи [21–23], заменили на арифметическое и среднеквадратическое усреднение скаляров и инвариантов кривизны, относящихся к ансамблям метрик (9) – (12) и (14) – (17) (смотрите табл. 4 и 5). При таком подходе усредненные скаляры и инварианты кривизны соответствуют усредненным по ансамблям метрик участкам пространства-времени (т.е. вакуума Эйнштейна).

В статье рассмотрены четыре операции с метриками-решениями семейства Коттлера (9) – (18): 1) формальная нулевая сумма интервалов (19); 2) неинвариантное покомпонентное среднее (21); 3) инвариантное арифметическое среднее скаляров (25)–(26); 4) инвариантное полу-кватернионно-RMS среднее (29)–(32). Мы отдаем предпочтение четвертой, однако остальные операции, требуют дополнительного детального рассмотрения.

В результате инвариантного усреднения ансамблей метрик (9) – (12) с сигнатурой $(+ - - -)$ и (14) – (17) с противоположной сигнатурой $(- + + +)$, получены модели стабильной сферически-замкнутой выпуклости вакуума и стабильной сферически-замкнутой вогнутости вакуума, которые мы условно назвали $KSdS$ -ядро и $KSdS$ -анти-ядро с усредненными относительными удлинениями вакуума (25) или (32) (смотрите рис. 1б или 1в).

Из-за того, что координатные карты с противоположными сигнатурами, находящимися с двух сторон метрического листа, перпендикулярны друг к другу, ядро (аналог частицы) и анти-ядро (аналог античастицы) так же повернуты относительно друг друга на 90^0 (смотрите, на примере двухстороннего случая §5.2 в [18]). Не исключено, что данный фазовый сдвиг лежит в основе ответов на условия Сахарова в отношении барионной асимметрии материи.

Полученные модели $KSdS$ -ядра и $KSdS$ -анти-ядра имеют ряд вышеперечисленных недостатков и проблем, для решения которых, в статье [19] предложено расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна (EVE) с большим числом $\pm\Lambda_i$ -членов (33):

$$R_{ik} + \frac{1}{2} g_{ik} (\sum_{m=1}^M \Lambda_m + \sum_{n=1}^N -\Lambda_n) = 0, \quad (33')$$

которое с учетом всех возможных 16-и сигнатур 4-мерных метрических пространств

$$sign(ds^2) = \begin{pmatrix} (+ + + +) & (+ + + -) & (- + + -) & (+ + - +) \\ (- - - +) & (- + + +) & (- - + +) & (- + - +) \\ (+ - - +) & (+ + - -) & (+ - - -) & (+ - + +) \\ (- - + -) & (+ - + -) & (- + - -) & (- - - -) \end{pmatrix} \quad (40)$$

на наш взгляд, обладает потенциалом, чтобы обозначить пути развития Иерархической космологической модели (“EVE project”) [16 – 20], направленной на развитие программы Клиффорда-Эйнштейна-Уилера по геометризации многих разделов физики.

Благодарности

Искренне благодарю Дэвида Рида (David Reid), Татьяну Леви, Георгия Усачева и Евгения Этингина за помощь, а также выражаю признательность академикам РАЕН Геннадию Ивановичу Шипову и Евгению Алексеевичу Губову за содержательные обсуждения рассматриваемых здесь вопросов.

При подготовке данной рукописи использовались инструменты генеративного искусственного интеллекта: Claude Opus 5 (Anthropic) — для перевода с русского на английский язык, языковой правки и формулирования ряда технических уточнений; GPT-5.6 Sol (OpenAI) — для независимой проверки рукописи и этих уточнений. Автор изучил все материалы, подготовленные с помощью ИИ, и несет полную ответственность за окончательный текст.

Список литературы

- [1] Stephani, H.; Kramer, D.; MacCallum, M.; Hoenselaers, C.; Herlt, E. (2003). *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge).
- [2] Griffiths, J. B. & Podolský, J. (2009). *Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, UK).
- [3] Kottler, F. (1918). Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, Vol. 56, pp. 401 – 462. doi:10.1002/andp.19183611402.
- [4] Alexanian, M. (2026). Effective de Sitter-Schwarzschild Metrics. *Armenian Journal of Physics*, vol. 19, issue 2, pp. 107-112, arXiv:2607.09707.
- [5] Shen, M. & Zhuang, O. (2016). A New Class of Solutions of Vacuum Einstein’s Field Equations with Cosmological Constant. *Annals of Applied Mathematics*, Vol. 32, No. 1, pp. 36 – 41.
- [6] Cha, Ye Sle, & Marcus Khuri (2018). Transformations of asymptotically AdS hyperbolic initial data and associated geometric inequalities. *General Relativity and Gravitation* 50.1: 3.
- [7] Chruściel, Piotr T., Daniel Maerten, and Paul Tod (2006). Rigid upper bounds for the angular momentum and center of mass of non-singular asymptotically anti-de Sitter space-times. *Journal of High Energy Physics* 2006.11: 084-084.
- [8] Ashraf Azman, M. (2026). Dark Energy Stars in Finch-Skea Spacetime with a Schwarzschild-(Anti)-de Sitter Exterior arXiv:2605.30398.
- [9] Tullini, A. (2026). Boundedness and decay for the conformal wave equation in Schwarzschild-AdS under dissipative boundary conditions. arXiv:2604.02084.
- [10] Friedrich, H. (1995). Einstein equations and conformal structure: existence of anti-de Sitter-type space-times. *Journal of Geometry and Physics* 17.2, pp. 125–184.
- [11] Graf, O. & Holzegel, G. (2024). “Linear Stability of Schwarzschild-Anti-de Sitter spacetimes I: The system of gravitational perturbations”. arXiv:2408.02251.
- [12] Moschidis, G. (2020). A proof of the instability of AdS for the Einstein-null dust system with an inner mirror, *Analysis & PDE* 13, no. 6, 1671–1754.
- [13] Landau L.D., Lifshitz E.M. (1971). *The Classical Theory of Fields / Course of theoretical physics, V. 2* Translated from the Russian by Hamermesh M. University of Minnesota – Pergamon Press Ltd. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig, p. 387.
- [14] Shipov, G. (1998). *The Theory of Physical Vacuum*. Moscow ST-Center, Russia ISBN 5 7273-0011-8.
- [15] Sedov, L.I. (1994). *Continuum Mechanics*. Vol. 1. – Moscow: Nauka.

- [16] Батанов-Гаухман М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть I. Алгебра стигматур. Препринт <https://doi.org/10.24108/preprints-3113027>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part I. Algebra of Stignatures. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, 14 (1), 1-26, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-1-ano-2023-articulo-1/>; and Preprints <https://doi.org/10.20944/preprints202306.0765.v3>, or [viXra:2403.0035](https://arxiv.org/abs/2403.0035).
- [17] Батанов-Гаухман М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть II. Алгебра сигнатур. Preprints.ru. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113028>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part II. Algebra of Signatures. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, 14 (1), 27-55, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-1-ano-2023-articulo-2/>; and Preprints, <https://doi.org/10.20944/preprints202307.0716.v1>, or [viXra:2403.0034](https://arxiv.org/abs/2403.0034).
- [18] Батанов-Гаухман М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть III. Искривленная область вакуума. Preprints.ru. <https://doi.org/10.24108/preprints-3113032>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part III. Curved Vacuum Area. *Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 2 año 2023 Artículo 5*, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-2-ano-2023-articulo-5/>; and Preprints 2023, 2023080570. <https://doi.org/10.20944/preprints202308.0570.v4>, or [viXra:2403.0033](https://arxiv.org/abs/2403.0033).
- [19] Батанов-Гаухман М. (2024) Геометризованная физика вакуума. Часть 6: Иерархическая космологическая модель. PRE-PRINTS.RU <https://doi.org/10.24108/preprints-3113086>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2024) Geometrized Vacuum Physics Part 6: Hierarchical Cosmological Model, *Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 4 año 2023* <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-4-ano-2023-articulo-3/> or [viXra:2408.0010](https://arxiv.org/abs/2408.0010).
- [20] Батанов-Гаухман М. С. (2025) Геометризованная физика вакуума. Часть 7: «электрон» и «позитрон». PRE-PRINTS.RU, <https://doi.org/10.24108/preprints-3113132>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025). Geometrized Vacuum Physics Part VII: "Electron" and "Positron", *Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 15 nro 1 año 2024 Artículo 3*, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-15-nro-1-ano-2024-articulo-3/>, or [viXra:2409.0097](https://arxiv.org/abs/2409.0097).
- [21] Zalaletdinov R. (2008). Averaging Problem in Cosmology and Macroscopic Gravity. *International Journal of Modern Physics A*. Vol. 23, No. 08, pp. 1173-1181 (2008) and arXiv:0801.3256.
- [22] Buchert, T.; van Elst, H.; Heinesen, A. (2023). The averaging problem on the past null cone in inhomogeneous dust cosmologies. *Gen. Rel. Grav.* V. 55, 7 or arXiv:2202.10798v2.
- [23] Green, R. S.; Wald R. M. (2011). A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology. *Phys. Rev. D* 83, 084020 or arXiv:1011.4920v2.
- [24] Schleich, K. & Witt, D. M. (2009). A simple proof of Birkhoff's theorem for cosmological constant. *J. Math. Phys.* 51, 112502 (2010), arXiv:0908.4110.
- [25] Schur, F. (1886) Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projektiven Räuraen. *Mathematische Annalen*, 1886. 27, p. 537-567.
- [26] Isaacson, R. A. (1968). Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics. *Physical Review*, 166(5), 1263–1271. DOI: 10.1103/PhysRev.166.1263.
- [27] Isaacson, R. A. (1968). Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor. *Physical Review*, 166(5), 1272–1279. DOI: 10.1103/PhysRev.166.1272.
- [28] Zel'dovich, Ya. B. (1968). The cosmological constant and the theory of elementary particles. *Sov. Phys. Usp.* 11, 381–393.
- [29] Weinberg, S. (1989). The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.* 61, 1–23.