Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции
A proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

© Н. М. Мусин

30.08.2021

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его левая часть не возрастает, а правая часть возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной σ на множестве так называемых критических значений, значит, при $t = t_0$ это решение единственно. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ следует, что $\sigma_0 = 1/2$.

Ключевые слова: гипотеза Римана; дзета-функция; нетривиальные нули

Благодарности: Работа выполнена без какой-либо финансовой поддержки.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t.

Considering one of that two equations one can found that the left side of it does not increase and the right one increases as a function of $\sigma \in (0, 1)$ on the set of so called critical values of σ, so (σ_0, t_0) is the unique solution at $t = t_0$. As nontrivial zeros are symmetric about the line $\sigma = 1/2$ it follows that $\sigma_0 = 1/2$.

Keywords: the Riemann hypothesis; zeta function; nontrivial zeros
Acknowledgements: The work was done without any financial support.

Введение и постановка задачи

Пусть $s = \sigma + it$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s, t = \operatorname{Im} s$.
Далее, пусть $x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная. Множество целых неотрицательных чисел обозначаем $\mathbb{N}_0$.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s\left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right)$$

Тогда нахождение нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$ сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}}\left(\cos(t\ln x) - i\sin(t\ln x)\right),\\
\frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.
\end{aligned}$$

Поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases}
\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},\\
\int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.
\end{cases} \tag{3}$$

Эту систему называем *характеристической*.

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно действительной оси, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

1 О левых и правых частях уравнений характеристической системы

Введем следующие 4 функции:

$$
\begin{aligned}
u_1(\sigma,t) &= \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \cos(t\ln x)dx,\\
u_2(\sigma,t) &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},\\
v_1(\sigma,t) &= \int\limits_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \sin(t\ln x)dx,\\
v_2(\sigma,t) &= \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, характеристическую систему 3 можно записать в виде

$$
\begin{cases} u_1(\sigma,t) = u_2(\sigma,t),\\ v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t). \end{cases} \tag{4}
$$

Если $s_0 = \sigma_0 + it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0, t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma,t) = v_2(\sigma,t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t = t_0 > 0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения при изменении аргумена σ. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Лемма 1. *Функция $w = v_2(\sigma, t_0)$ при фиксированном $t_0 > 0$ возрастает как функция от переменной σ.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$
\frac{dv_2}{d\sigma} = -\frac{2(\sigma-1)t_0}{(t_0^2+(\sigma-1)^2)^2} > 0
$$

■

Из леммы 1 следует, что все значения функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ при $\sigma \in (0,1)$ принадлежат интервалу $\left(\frac{t_0}{1+t_0^2}, \frac{1}{t_0}\right)$.

Другими словами, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в прямоугольнике

$$
R = \left\{ (\sigma, w) \;\middle|\; 0 < \sigma < 1, \frac{t_0}{1+t_0^2} < w < \frac{1}{t_0} \right\}
$$

Определение 1. *Прямоугольник R будем называть критическим прямоугольником.*

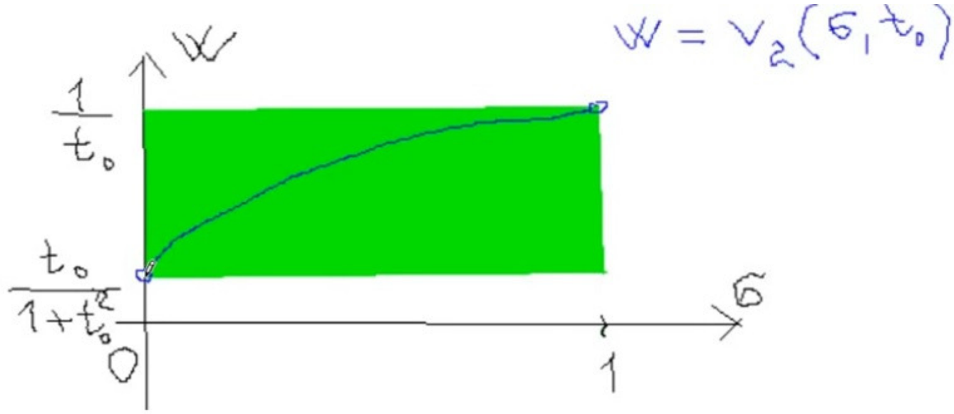

Рис. 1.1. Критический прямоугольник

Далее нас интересует часть графика функции $v_1(\sigma, t_0)$, лежащая в этом прямоугольнике.

Определение 2. *Значение переменной σ, при котором соответствующая точка $(\sigma, v_1(\sigma, t_0))$ графика функции $v_1(\sigma, t_0)$ находится в критическом прямоугольнике, будем называть критическим значением.*

Таким образом, значение σ_0 является критическим значением переменной σ, т.к. точка $(\sigma_0, v_1(\sigma_0, t_0))$ находится в критическом прямоугольнике; в то же время это точка пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

2 Множество M и его свойства

Обозначим $\Re[a, b]$ множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Нам будет полезна [2, с. 352]

Теорема. (вторая теорема о среднем для интеграла). *Если $f, g \in \Re[a, b]$ и g - монотонная на $[a, b]$ функция, то найдётся точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx.$$

Обозначим

$$A(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx \text{ и } B(\xi) = \int\limits_\xi^b f(x)dx.$$

Рассмотрим множество

$$M = M[a, b] = \left\{ \xi \in [a, b] \;\middle|\; \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)A(\xi) + g(b)B(\xi) \right\}$$

Другими словами, это множество точек из $[a, b]$, являющихся нулями функции

$$F(z) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx - g(a)A(z) - g(b)B(z)$$

Выше установлено, что это множество непусто.

Множество M замкнуто как прообраз одноточечного множества $\{0\}$. Кроме того, оно ограничено снизу a, сверху b, поэтому $\inf M = \min M, \sup M = \max M$. Обозначим $\underline{\xi} = \min M$, $\overline{\xi} = \max M$.

Итак, $M \subseteq [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$.

Докажем следующее

Предложение 1. *Пусть g- строго монотонная функция. Тогда для любых $\xi, \xi' \in M$*

$$\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx = 0.$$

Доказательство. Если множество M состоит из одного элемента, то равенство очевидно.

Пусть в множестве M имеется более одного элемента.

Возьмём произвольные $\xi, \xi' \in M$, такие, что $\xi < \xi'$.

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \begin{cases} g(a)A(\xi) + g(b)B(\xi) \\ g(a)A(\xi') + g(b)B(\xi') = g(a)A(\xi) + g(a)\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx + g(b)B(\xi') \end{cases}$$

Следовательно,

$$g(a)A(\xi) + g(a)\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx + g(b)B(\xi') = g(a)A(\xi) + g(b)B(\xi),$$

$$g(a)\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx = g(b)(B(\xi) - B(\xi')),$$

$$g(a)\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx = g(b)\left(\int\limits_{\xi}^{b} f(x)dx - \int\limits_{\xi'}^{b} f(x)dx\right),$$

$$g(a)\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx = g(b)\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx,$$

$$(g(a) - g(b))\int\limits_{\xi}^{\xi'} f(x)g(x)dx = 0.$$

Так как функция $g(x)$ строго монотонна, то $g(a)-g(b)\neq 0$, получаем доказываемое равенство.

$\blacksquare$

Лемма 2. *Функция $v_1(\sigma,t_0)$ при фиксированном $t_0>0$ не возрастает на множестве критических значений переменной σ.*

Доказательство.

Обозначим

$$\Psi(\sigma,x)=\frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t_0\ln x).$$

Тогда имеет место равенство

$$v_1(\sigma,t_0)=\int\limits_1^{\infty}\Psi(\sigma,x)dx.$$

Так как $v_1(\sigma,t_0)=v_2(\sigma,t_0)>0$ при $t_0>0$, то $v_1(\sigma,t_0)>0$.

Обозначим

$$U=\left(\frac{t_0}{1+t_0^2},\frac{1}{t_0}\right).$$

Нам будет достаточно того, что функция $v_1(\sigma,t_0)$ непрерывна по σ как левая часть второго уравнения системы 3 (в частности, это предполагает интегрируемость функции $\Psi(\sigma,x)$ на луче $[1,+\infty)$), поэтому для любой критической точки σ найдётся такое положительное $\delta=\delta(\sigma)$, что образ δ-окрестности точки σ будет содержаться в U, то есть эта окрестность будет критическим подмножеством.

Фиксируем произвольную критическую точку σ.

Пусть σ' - некоторое положительное число такое, что $\sigma+\sigma'<\sigma+\delta$, то есть $\sigma+\sigma'$ - критическое значение.

Надо показать, что $v_1(\sigma+\sigma',t_0)\leqslant v_1(\sigma,t_0)$.

Очевидно, что

$$\Psi(\sigma+\sigma',x)=\frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x).$$

Так как σ и $\sigma+\sigma'$ - критические значения, то $v_1(\sigma,t_0)\in U$ и $v_1(\sigma+\sigma',t_0)\in U$, поэтому для некоторого достаточно большого X_0 и любого $X>X_0$ имеют место включения

$$\int\limits_1^{X}\Psi(\sigma,x)dx\in U \text{ и } \int\limits_1^{X}\frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx\in U. \tag{5}$$

В частности,

$$\int\limits_1^{X}\Psi(\sigma,x)dx>0 \text{ и } \int\limits_1^{X}\frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma,x)dx>0. \tag{6}$$

Утверждение леммы 2 эквивалентно неравенству 7:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leqslant \int_1^{+\infty} \Psi(\sigma, x) dx. \tag{7}$$

Будет достаточно доказать неравенство

$$\int_1^{X} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leqslant \int_1^{X} \Psi(\sigma, x) dx. \tag{8}$$

Функция $\sin(t_0 \ln x)$ обращается в нуль в точках $x_k = e^{\pi k/t_0}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Более того, так как изначально $x \geqslant 1$, то из неравенства $t_0 \ln x \geqslant 0$ и равенства $t_0 \ln x = \pi k$ следует, что $k \geqslant 0$.

Ясно, что $x_0 = 1$.

Число k будем называть номером интервала (x_k, x_{k+1}). На каждом из таких интервалов функция $\sin(t_0 \ln x)$ имеет один и тот же постоянный знак. Так как $t_0 > 0$ и $\ln x > 0$ при $x > 1$, то очевидно, что на интервале с номером $k = 0$ этот знак положительный, далее при переходе с одного интервала на соседний знаки чередуются.

Интервалы с чётными номерами будем называть *положительными*, а интервалы с нечётными номерами назовём *отрицательными*. Соответствующие отрезки и полуинтервалы будем также называть положительными или отрицательными.

Кроме концов положительных или отрицательных интервалов, функция $\Psi(\sigma, x)$ на каждом интервале может получить дополнительно ещё конечное множестве нулей за счёт попадающих в интервал натуральных чисел (из-за множителя $\{x\}$), в остальных точках имеет тот же знак, что и $\sin(t_0 \ln x)$.

На отрезке $[1, X]$ содержится конечное множество натуральных чисел, больших 1, которые за счёт множителя $\{x\}$ являются точками разрыва. Других точек разрыва нет. Следовательно, это ещё один - прямой довод к тому, что функция $\Psi(\sigma, x)$ интегрируема по x на этом отрезке.

На точку X накладываем дополнительное ограничение: она должна находиться в каком-либо положительном интервале или совпасть с его правым концом.

Нам понадобится функция

$$\Phi(x) = \int_x^{X} \Psi(\sigma, x) dx, \; x \in [1, X].$$

Эта функция непрерывна.

Так как $\Phi(X) = \int_X^X \Psi(\sigma, x) dx = 0$, точка $x = X$ является нулём функции $\Phi(x)$.

Рассмотрим случай, когда точка $x = X$ является единственным нулём. Но тогда эта функция сохраняет какой-то один определённый знак на всём интервале $(1, X)$.

В нашем случае в силу неравенств 6 имеет место неравенство $\Phi(1) > 0$, значит, функция $\Phi(x)$ положительна на всём интервале $(1, X)$.

На отрезке $[1, X]$ строим множество $M = M[1, X]$. Согласно второй теореме о среднем, для некоторого $\xi' \in M$ имеет место равенство

$$\int\limits_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx = A(\xi') + \gamma B(\xi'),\ \text{где}\ \gamma = \frac{1}{X^{\sigma'}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $1 < \xi' < X$.

Выше мы установили, что $\Phi(x) > 0$ на всём интервале $(1, X)$, поэтому

$$B(\xi') = \Phi(\xi') > 0.$$

Так как $0 < \gamma < 1$, получаем

$$\int\limits_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}}\Psi(\sigma, x)dx = A(\xi') + \gamma \underbrace{B(\xi')}_{>0} < A(\xi') + B(\xi') = \int\limits_1^X \Psi(\sigma, x)dx. \tag{9}$$

Проверим корректность этого неравенства, а именно, что оно выполняется для любого $\xi \in M$.

Если множество M состоит из одного элемента, то неравенство очевидно.

Пусть в множестве M имеется более одного элемента. Возьмём теперь произвольное $\xi \in M$. Тогда

$$A(\xi) + \gamma B(\xi) = \int\limits_1^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx + \gamma \int\limits_{\xi}^X \Psi(\sigma, x)dx =$$

$$= \Bigg(\int\limits_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x)dx + \underbrace{\int\limits_{\xi'}^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx}_{=0}\Bigg) + \gamma\Bigg(\underbrace{\int\limits_{\xi}^{\xi'} \Psi(\sigma, x)dx}_{=0} + \int\limits_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x)dx\Bigg) =$$

$$= A\Big(\xi'\Big) + \gamma B\Big(\xi'\Big) < A(\xi') + B(\xi') = \int\limits_1^{\xi'} \Psi(\sigma, x)dx + \int\limits_{\xi'}^X \Psi(\sigma, x)dx =$$

$$= \Bigg(\int\limits_1^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx + \underbrace{\int\limits_{\xi}^{\xi'} \Psi(\sigma, x)dx}_{=0}\Bigg) + \Bigg(\underbrace{\int\limits_{\xi'}^{\xi} \Psi(\sigma, x)dx}_{=0} + \int\limits_{\xi}^X \Psi(\sigma, x)dx\Bigg) =$$

$$= A(\xi) + B(\xi).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае корректность неравенства 9 установлена.

Рассмотрим случаи, когда какое-то $\xi \in M$ совпадёт с одним из концов отрезка $[1, X]$.

Пусть $\xi = 1$, тогда

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \underbrace{A(1)}_{=0} + \gamma B(1) = \gamma \underbrace{\int_1^X \Psi(\sigma, x) dx}_{>0} < \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Неравенство 8 выполняется.

Пусть $\xi = X$, тогда

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = A(X) + \gamma \underbrace{B(X)}_{=0} = \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx.$$

Неравенство 8 выполняется и в этом случае.

Мы рассмотрели случай, когда точка $x = X$ являлась единственным нулём функции $\Phi(x)$ на отрезке $[1, X]$.

Перейдём к общему случаю.

Множество нулей функции $\Phi(x)$ замкнуто на $[1, X]$ как прообраз замкнутого множества $\{0\}$ и ограничено, поэтому нижняя грань этого множества является наименьшим элементом. Обозначим его z_1.

Происхождение нулей объясняется следующим образом.

Обозначим I^+ объединение всех положительных отрезков, I^- - объединение всех отрицательных отрезков. Нельзя исключить случай, когда интегралы от функции $\Psi(\sigma, x)$ на множествах $[z, X] \cap I^+$ и $[z, X] \cap I^-$ равны по модулю. Множество нулей конечно, так как множества положительных и отрицательных отрезков, пересекающихся с отрезком $[1, X]$, конечны.

Нас теперь интересует случай $z_1 < X$.

Если $z_1 = 1$, то $\Phi(1) = 0$, но это противоречит тому, что изначально в силу неравенств 6 имеет место неравенство $\Phi(1) > 0$. Поэтому $z_1 \neq 1$, значит, $1 < z_1 < X$.

$$\int_1^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx + \underbrace{\Phi(z_1)}_{=0} = \int_1^X \Psi(\sigma, x) dx = \Phi(1) > 0.$$

Введём функцию $\Phi_1(x) = \int\limits_x^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx$ на $[1, z_1]$; по построению,

$$\Phi_1(x) = \int_x^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx + \underbrace{\Phi(z_1)}_{=0} = \Phi(x),$$

то есть $\Phi_1(x) = \Phi(x)$ на $[1, z_1]$.

По построению точки z_1, функция $\Phi(x)$ не имеет нулей на полуинтервале $[1, z_1)$, поэтому она является единственным нулём функции $\Phi(x)$ на $[1, z_1]$.

Так как $\Phi_1(1) = \Phi(1) > 0$, то $\Phi_1(x)$ сохраняет положительный знак на $(1, z_1)$.

Точка z_1 не может находиться в отрицательном полуинтервале $(x_{2m+1}, x_{2m+2}]$ ни при каком $m \in \mathbb{N}_0$, иначе функция $\Phi_1(x)$ сохраняла бы отрицательный знак на интервале $(1, z_1)$, что следовало бы из того, что $\Phi_1(x_{2m+1}) < 0$. Следовательно, точка z_1 может находиться только в некотором положительном полуинтервале $(x_{2m}, x_{2m+1}]$ при каком-то $m \in \mathbb{N}_0$,

На отрезке $[1, z_1]$ в точности та же ситуация, как в предыдущем случае с единственным нулём $x = X$. Проведём все аналогичные построения, начиная с множества $M = M[1, z_1]$.

Пусть $\xi \in M = M[1, z_1]$. Как и в предыдущем случае, равенство в 8 достигается только если $\xi = z_1$:

$$\int_1^{z_1} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx = \int_1^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx.$$

Итак, в доказываемом неравенстве 8 достигается равенство.

Если же $1 \leqslant \xi < z_1$, то тогда имеет место строгое неравенство

$$\int_1^{z_1} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx < \int_1^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx. \tag{10}$$

Таким образом, получаем

$$\int_1^{z_1} \frac{1}{x^{\sigma'}} \Psi(\sigma, x) dx \leqslant \int_1^{z_1} \Psi(\sigma, x) dx. \tag{11}$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{x^{\sigma'}}\right) \Psi(\sigma, x).$$

На $[1, X]$ построим функцию

$$\Omega(x) = \int_x^X \varphi(x) dx.$$

Доказываемое неравенство 9 равносильно неравенству

$$\Omega(1) \geqslant 0. \tag{12}$$

$\Omega(X) = 0$, то есть $x = X$ является нулём этой функции; предположим, что этот нуль единственный. Точка X, по построению, лежит в каком-то положительном интервале (x_{2m}, x_{2m+1}) при некотором $m \in \mathbb{N}_0$, функция $\Psi(\sigma, x)$ здесь положительна, кроме конечного множества нулей (за счёт множителя $\{x\}$), поэтому

$$\Omega(x_{2m}) = \int\limits_{x_{2m}}^{X} \left(1 - \frac{1}{x^{\sigma'}}\right) \Psi(\sigma, x) dx > 0,$$

следовательно, этот знак сохраняется на всём интервале $(1, X)$. Следовательно,

$$\Omega(1) = \int\limits_{1}^{X} \left(1 - \frac{1}{x^{\sigma'}}\right) \Psi(\sigma, x) dx > 0,$$

то есть имеет место доказываемое неравенство 9.

Теперь предположим, что у $\Omega(x)$, кроме нуля $x = X$, есть ещё нули. Как и в случае с функцией $\Phi(x)$, нулей может быть только конечное множество; обозначим z_2 наименьший из них.

Если $z_2 = 1$, то $\Omega(1) = 0$, то есть имеет место доказываемое неравенство 9.

Рассматриваем случай $1 < z_2 < X$.

Пусть $z_2 = z_1$. В этом случае на отрезке $[1, z_1]$ выполняется неравенство 11, на отрезке $[z_1, X] = [z_2, X]$ выполняется равенство $\Omega(z_1) = 0$, следовательно, имеет место доказываемое неравенство 9.

Пусть $z_2 > z_1$.

Неравенство 12 доказываем от противного, то есть предположим, что $\Omega(1) < 0$.

Так как z_2 - наименьший нуль функции $\Omega(x)$, то на интервале $(1, z_2)$ функция $\Omega(x)$ сохраняет постоянный знак. Предположим, что на этом интервале выполняется неравенство $\Omega(x) < 0$.

Обозначим

$$\alpha = \int\limits_{1}^{z_1} \varphi(x) dx,\ \beta = \int\limits_{z_1}^{z_2} \varphi(x) dx,$$

Выше было доказано неравенство 11, это означает, что $\alpha \geqslant 0$, но тогда $\beta < 0$, в противном случае $\Omega(1) = \alpha + \beta + \underbrace{\Omega(z_2)}_{=0} \geqslant 0$.

На отрезке $[z_1, z_2]$ построим две функции

$$\hat{\omega}(x) = \int\limits_{z_1}^{x} \varphi(x) dx \text{ и } \omega(x) = \int\limits_{x}^{z_2} \varphi(x) dx.$$

Получается неравенство $\hat{\omega}(x) + \omega(x) = \beta < 0$.

Итак, сумма $\hat{\omega}(x) + \omega(x)$ постоянна на интервале (z_1, z_2) и на нём отрицательна.

На рисунке 2.1 схематически показано поведение функций $\hat{\omega}(x)$ и $\omega(x)$, левый чертёж соответствует случаю, когда в неравенстве 11 достигается равенство, а правый чертёж соответствует строгому неравенству.

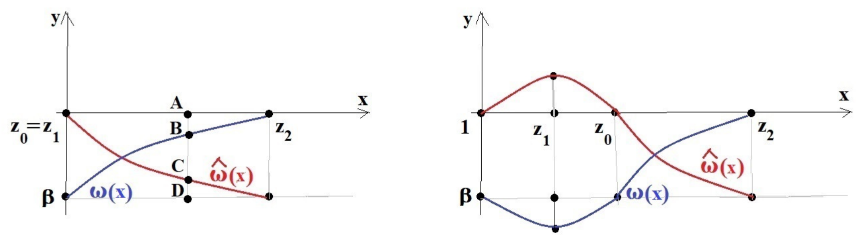

Рис. 2.1. Графики функций $\omega(x)$ и $\hat{\omega}(x)$

Так как на интервале $(1, z_2)$, по предположению, имеет место неравенство $\Omega(x) < 0$, то и $\omega(x) < 0$, поэтому график функции целиком лежит ниже оси абсцисс и пересекается с ней в точке с абсциссойz_2.

Точка z_0 является точкой пересечения графика функции $\hat{\omega}(x)$ с осью x, на левом чертеже она совпадает с точкой z_1, так как $\hat{\omega}(z_1) = 0$, а на правом чертеже она появляется в силу того, что $\hat{\omega}(z_1) > 0$ и $\hat{\omega}(z_2) < 0$.

На интервале (z_1, z_2) возьмём точку A так, чтобы прямая, проходящая через неё перпендикулярно оси абсцисс, пересекала оба графика и прямую $y = \beta$; пусть B, C, D- соответствующие точки пересечения, как на левом чертеже.

Из равенств $\hat{\omega}(A) + \omega(A) = \beta = -AD = -AC - AB = -AC - CD$ следует, что $AB = CD$. В точках пересечения графиков функций их ординаты равны $\frac{\beta}{2}$. Но тогда графики функций симметричны относительно прямой $y = \frac{\beta}{2}$.

Из вышеизложенного следует, что часть графика функции $\hat{\omega}(x)$, соответствующая интервалу (z_0, z_2), целиком лежит ниже оси абсцисс и пересекается с ней только в точке с абсциссойz_0.

Итак, обе функции, $\hat{\omega}(x)$ и $\omega(x)$, отрицательны на интервале (z_0, z_2).

Строим множество $M = M[z_0, z_2]$.

Согласно второй теореме о среднем для интеграла, существует точка $\xi \in M$ такая, что

$$\beta = \gamma_1 A + \gamma_2 B, \text{ где } A = \hat{\omega}(\xi) < 0,\ B = \omega(\xi) < 0, \gamma_1 = \frac{1}{{z_1}^{\sigma'}}, \gamma_2 = \frac{1}{{z_2}^{\sigma'}}.$$

Так как $0 < \gamma_2 < \gamma_1 < 1,\ A < 0, B < 0$, получаем $\beta = \gamma_1 A + \gamma_2 B > \gamma_2(A+B) = \gamma\beta$, значит, $\beta > \gamma\beta$, следовательно, $(1-\gamma)\beta > 0$, но $1-\gamma > 0$, поэтому $\beta > 0$, но это противоречит тому, что выше было указано, что $\beta < 0$.

Полученное противоречие для случая $z_2 > z_1$ было получено из предположения, что $\Omega(x) < 0$. Таким образом, в этом случае $\Omega(x) \geqslant 0$, что и требовалось.

Теперь перейдём к случаю $z_2 < z_1$.

На отрезке $[1, z_2]$ построим две функции

$$\hat{\omega}(x) = \int\limits_1^x \varphi(x)dx \text{ и } \omega(x) = \int\limits_x^{z_2} \varphi(x)dx.$$

Предполагаем, что $\Omega(x) < 0$ на интервале $(1, X)$. По построению, $\Omega(z_2) = 0$, отсюда следует, что $\omega(1) < 0$ на интервале $(1, z_2)$.

Обозначим $\beta = \omega(1) = \hat{\omega}(z_2)$.

Получается неравенство $\hat{\omega}(x) + \omega(x) = \beta < 0$.

Итак, сумма $\hat{\omega}(x) + \omega(x)$ постоянна на интервале $(1, z_2)$ и на нём отрицательна.

Повторяя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, получаем так же, что графики этих двух функций симметричны относительно прямой $y = \frac{\beta}{2}$.

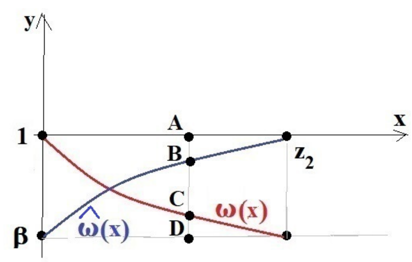

Рис. 2.2. Графики функций $\omega(x)$ и $\hat{\omega}(x)$

График функции $\hat{\omega}(x)$ целиком лежит ниже оси абсцисс и пересекается с ней только в точке с абсциссой$x = z_2$, следовательно, график функции $\omega(x)$ тоже целиком лежит ниже оси абсцисс и пересекается с ней только в точке с абсциссой $x = 1$.

Точка $x = 1$ является левым концом положительного отрезка $[1, x_1]$.

Возьмём произвольную точку $x' \in (1, x_1) \cap (1, z_2)$.

Выше мы установили, что $\omega(x) < 0$ на интервале $(1, z_2)$, значит, $\omega(x') < 0$.

Но ведь эта же функция на положительном интервале $(1, x_1)$ положительна, следовательно, $\omega(x') > 0$.

Получилось противоречие, следовательно, предположение о том, что $\Omega(x) < 0$ на интервале $(1, X)$, неверно.

Таким образом, лемма 2 полностью доказана. ■

3 Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль* $s_0 = \sigma_0 + it_0$, *то* $\sigma_0 = 1/2$.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, достаточно ограничиться случаем $t_0 > 0$. Нетривиальный нуль дзета-функции является решением уравнения 2, значит, пара (σ_0, t_0) удовлетворяет системе 4 и, в частности, второму уравнению этой системы, а именно $v_1(\sigma, t) = v_2(\sigma, t)$.

Согласно лемме 1, график $w = v_2(\sigma, t_0)$ правой части возрастает. Согласно лемме 2, график $w = v_1(\sigma, t_0)$ левой части убывает внутри критического прямоугольника, значит, эти графики имеют не более одной точки пересечения. Так как графики, как указано выше, пересекаются в точке (σ_0, w_0), то эта точка является единственной точкой пересечения.

Как известно, если точка $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ в плоскости (σ, t), тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$.

Обозначим $w_0 = v_1(\sigma_0, t_0) = v_2(\sigma_0, t_0), \sigma_1 = 1 - \sigma_0, w_1 = v_1(\sigma_1, t_0) = v_2(\sigma_1, t_0)$. Следовательно, если при этом $\sigma_0 \neq 1/2$, то точка (σ_1, w_1) тоже является точкой пересечения графиков функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$, отличной от точки (σ_0, w_0). Но выше было установлено, что эти графики могут пересекаться только в одной точке. Получается противоречие, следовательно, $\sigma_0 = 1/2$.

$\blacksquare$

Список литературы

[1] А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский. Введение в теорию чисел. Изд-во Московского университета, 1984.

[2] В. А. Зорич. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.

[3] Н. М. Мусин. Компьютерные эксперименты с дзета-функцией Римана. Журнал естественнонаучных исследований, 2017, том 2, № 2, с. 47–52 URL: https://naukaru.ru/ru/nauka/article/16412/view