ИНФОРМАЦИЯ ИЛИ ДАННЫЕ?

И.В.Коннов

Казань, e-mail: konn-igor@ya.ru

Чем дальше в лес, тем больше дров

Данная статья является продолжением статьи [1], поскольку некоторые темы, обсуждавшиеся там, потребовали более подробного изучения и рассмотрения.

1 Термодинамика и статистическая физика

Пожалуй, надо начать изучение вопроса с термодинамики, поскольку именно здесь появились термины, в той или иной мере связанные с информацией. Термодинамика как строгая научная теория создавалась в XIX веке. В ней естественным образом рассматривались вопросы передачи тепла и энергии от одного физического тела другому, а также изучались другие, связанные с этим вопросы. В частности, было установлено, что отношение изменения теплоты dQ к температуре T представляет собой изменение некоторой функции, которая была названа энтропией S, т.е.

$$dS = dQ/T. \tag{1}$$

Это понятие не вызвало никаких существенных вопросов и вполне могло использоваться для самых различных условий, т.е. в разных средах. Вопрос появился в связи с необходимостью независимого вычисления величины энтропии. Оказалось, что такое вычисление может быть выполнено с помощью аппарата статистической физики (см., напр. [2, 3]).

В состоянии равновесия энтропия газа определяется по формуле

$$S = k \log W, \tag{2}$$

где k – постоянная Больцмана, W – количество микросостояний газа как макросистемы (или термодинамическая вероятность). Здесь $\log X$ обозначает логарифм X по некоторому основанию $a > 1$. В этом состоянии вероятности всех микросостояний одинаковы, т.е. $p_i = p = 1/W$, а энтропия отдельного i-го микросостояния равна $S_i = -kp \log p$. Тогда получаем формулу

$$S = \sum_{i=1}^{W} S_i = kW(1/W) \log W = k \log W.$$

Однако в общем случае вероятности микросостояний p_i могут быть различны, тогда вместо (2) получим

$$S = -k \sum_{i=1}^{W} p_i \log p_i. \tag{3}$$

Если считать эти вероятности переменными, т.е. $S = S(p)$, где $p = (p_1, \ldots, p_W)$, тогда нетрудно определить, что вектор $p^* = (1/W)(1, \ldots, 1)$ есть решение задачи максимизации энтропии по всевозможным распределениям вероятностей

$$\max \ \rightarrow \ \left\{ S(p) \ \middle| \ \sum_{i=1}^{W} p_i = 1, \ p_i \geq 0, \ i = \overline{1, W} \right\}.$$

Таким образом, состояние равновесия газа соответствует максимуму энтропии. Этот подход по аналогии распространяется на случай непрерывных распределений вероятностей. Исходя из полученных свойств, энтропия может рассматриваться как мера равномерности распределения молекул газа по занимаемому объему или как мера хаотичности движения молекул. Напротив, уменьшение энтропии будет приводить к большей неравномерности распределения или к большей упорядоченности поведения молекул. Для величины $-S$ (негативной энтропии) на этой основе был принят термин «информация». Таким образом, в состоянии равновесия «информация» газа минимальна. В данной статье мы никоим образом не собираемся обсуждать или как-то оценивать какие-либо результаты, полученные в молекулярно-кинетической теории, а только отметим, что введённое таким образом понятие информации вызывает ряд естественных вопросов.

1. Величина $-S$, несомненно, содержит некоторую информацию об исходном веществе, но можно ли утверждать, что она содержит всю информацию о нём, поскольку термин «информация» применяется здесь без всяких оговорок?

2. Если следовать формуле (1), то непонятно, почему именно отношение уменьшения тепла к температуре есть информация.

3. Вероятностный подход к моделированию поведения макросистем имеет определенные ограничения, связанные с самим определением вероятностей событий и их измерением. Насколько общими являются понятия энтропии и информации, основанные на вероятностном подходе?

Исходя из этого, можно считать, что термин «информация» здесь неточен, и должен либо применяться только с оговорками об ограниченности этого понятия в данном контексте, либо использоваться другой термин, поскольку по существу здесь речь идёт о мере упорядоченности или неравномерности в распределении вещества по занимаемому им объёму.

Проясним подробнее вопрос об ограниченности вероятностного подхода к моделированию. Действительно, не для любых событий (процессов) могут быть определены вероятности, т.е. не все они являются случайными (см., напр. [4]). Для этого требуется выполнение такого важного условия, как статистическая устойчивость, связанного с многократными наблюдениями в одинаковых условиях, а также независимость испытаний, выполнение тестов на случайность. Проверка выполнения этих условий является далеко не тривиальной для многих прикладных задач. Как известно, подход к определению вероятностей событий, основанный на подсчёте частот, оказался не вполне корректным. Предложенный А.Н.Колмогоровым подход к определению вероятностей как мер в пространстве событий поставил теорию вероятностей на достаточно прочный фундамент и заложил основы для значительного продвижения в этой области математики (см. [5]). В то же время попытки использования построенного эффективного аппарата во всё новых областях приложений стали приводить к появлению работ, в которых вместо какого-то обоснования упомянутых выше условий случайности событий, как основы применимости, ограничивались просто введением мер на множествах, соответствующих по свойствам мерам из теории вероятностей. Например, в дискретном случае любой вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$, такой что

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1, m},$$

назывался сразу вероятностным вектором. Конечно, каждый такой вектор p *может* представлять распределение вероятностей, но для этого надо проверить условия случайности всех m событий, иначе он *может и не быть* таковым. Игнорирование условий приводит просто к появлению массы неадекватных моделей для прикладных задач. Такое положение вызывало серьезную критику, в том числе в среде исследователей, занимающихся приложениями теории вероятностей (см., напр. [6]). Таким образом, без чёткого очерчивания границ применимости будет неясным и использование термина «информация» в данном контексте.

Кроме того, полное описание моделей с помощью задания распределения вероятностей событий по существу будет предполагать, что все эти события принадлежат к одному классу (типу), поскольку оцениваются по одному и тому же показателю. Такой вывод следует и из условия статистической устойчивости событий. В итоге получаем модель системы, содержащей множество однотипных элементов, и по свойствам, и по поведению. В частности, они свободно перемещаются в рамках системы, выбор перемещений определяется случайным образом. Таким образом, в модели отсутствуют явные проявления структуры, например, дополнительные ограничения. Очевидно, модель вполне подходит для описания идеального газа, но для других систем этот тип модели может потребовать существенных изменений.

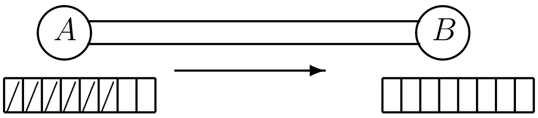

Рис. 1: Схема канала связи

2 Системы связи

Проблемы эффективной работы различных систем связи по мере их усложнения потребовали создания некоторой общей теории. Наиболее удачным был признан подход, предложенный К. Шенноном, работы которого и положили начало достаточно строгой теории передачи данных по каналам связи (см. [7]). При этом К. Шеннон существенно использовал аппарат статистической физики и термины «энтропия» и «информация», с несколько иным их толкованием. Стандартная задача передачи по каналу связи заключается в том, что имеется некоторый набор символов в рамках возможных для представления в устройстве, который требуется передать со стороны A через канал связи на сторону B (рис. 1). При этом каждый символ в наборе может принимать в принципе различные значения из некоторого множества допустимых вариантов, но требуется передать именно точное значение каждого символа стороне B, где набор должен быть представлен в точном виде. Таким образом, до передачи существует неопределенность в том, что́ именно содержится в наборе, после передачи эта неопределенность должна исчезнуть. Данная неопределенность и называется энтропией набора символов (сообщения), она соответствует количеству информации, полученной стороной B. Для измерения энтропии («информации») и была использована вероятностная модель, т.е. предполагается, что символы могут принимать свои значения с определенными вероятностями. Это означает, что речь идёт о массовой передаче сообщений по каналу, что дает возможность оценить значение вероятности. Скажем, если в сообщении n символов, которые с равной вероятностью могут принимать любое из l значений, то общее количество вариантов равно $W = l^n$, тогда энтропия сообщения определяется по формуле

$$H = k \log_2 l^n = kn \log_2 l, \tag{4}$$

где k – нормирующий множитель, H – обозначение энтропии, принятое в теории связи, ср. с (2). Также обычно используется двоичное основание логарифма, что соответствует двоичной системе счисления. В этом случае величина H равна в точности количеству тактов работы канала для передачи этого сообщения, т.е. фактически определяет сложность передачи сообщения устройством. Однако в общем случае вероятности для символов (частей сообщения) могут различаться, тогда следует определить энтропию по формуле

$$H(p) = -k \sum_{i=1}^{W} p_i \log_2 p_i, \tag{5}$$

где p_i – вероятность i-го распределения значений по символам, W – общее количество вариантов, ср. с (3). Отметим, что в случае равновероятности вариантов $p_i = 1/W$, так что из (5) тогда получаем (4).

Основная задача в теории канала связи – это обеспечить правильную передачу заданного объема данных за минимальное время или передать наибольший объём за фиксированное время, т.е. за минимальное количество тактов работы устройства. При этом реальная задача намного сложнее, поскольку сообщение может состоять из нескольких частей, подвергаться различным помехам, требовать дополнительных преобразований (кодировки, сжатия и наоборот, включения служебной информации и т.п.). Все эти факторы должны учитываться в той или иной мере в рамках построенной К. Шенноном и его последователями теории систем связи. При этом получение информации интерпретируется как раскрытие неопределённости значения символов. В простейшем случае, когда символ принимает два значения («0» и «1»), то это точное определение одного из этих значений получателем (стороной B). А энтропия задаёт неопределенность до момента передачи.

Отсюда следует, что содержание передаваемых сообщений здесь не играет никакой роли, главное – это правильная передача и оценка затрат на таковую передачу в различных условиях. Это подчеркивает и сам К. Шеннон: «Прежде чем переходить к рассмотрению вопроса о том, как следует измерять информацию, нам необходимо объяснить точный смысл понятия информации с точки зрения инженера-связиста. Конечно, каждое подлежащее передаче сообщение имеет своё содержание. Оно, однако, совершенно несущественно в проблеме передачи информации. Передать ряд бессмысленных слогов так же трудно (в действительности даже более трудно), как и подлинный английский текст. Тому, кто хотя бы немного знаком с предметом этой статьи, будет ясно, что с точки зрения передачи важным свойством информации является то, что каждое частное сообщение выбирается из некоторого множества возможных сообщений» [7, с. 405].

Таким образом, более точным термином вместо общей информации или энтропии здесь является мера сложности (затрат) на передачу данных по каналу связи, т.е. уже отраженной и зафиксированной на каком-то носителе информации.

Разумеется, в теории систем связи есть много достаточно общих задач, связанных с хранением, обработкой и передачей данных. Их более подробное изложение можно найти в работах Шеннона, а также, например, в книге [8].

3 Кибернетика и алгоритмическая сложность

Кибернетика – достаточно общее синтетическое направление в науке, которое изучает модели и методы управления самыми различными системами. Такое толкование кибернетики предложил Н.Винер (см. [9]), хотя известны более ранние работы философского типа об общих принципах управления с тем же названием (см. [9] и, например, [10]). Следует отметить, что работы по теории связи и кибернетике шли одновременно и параллельно, при этом термин «информация», использовавшийся в теории связи для оценки работы линий передачи данных, как уже отмечалось, в рамках кибернетики получил гораздо более широкое толкование. Действительно, в основе кибернетики находится положение о подобии процессов управления и связи во всех существующих реальных системах, что даёт возможность разработать единую теорию для всех этих процессов. Далее Н.Винер определяет, что эти процессы состоят в передаче, хранении и переработке информации. При этом определения понятий энтропии и информации в теории связи и кибернетике совпадают. Но если К. Шеннон использовал эти понятия для оценки сложности при массовой передаче сообщений конкретными устройствами связи, то Н.Винер связывает их с задачей выбора по полученным сообщениям в любом виде. То есть, полученная в каком-то виде информация представлена в виде сигналов, символов и т.п., при этом правильный выбор (определение) значения по этим сигналам имеет определённую вероятность. Например, вероятность правильного выбора при бросании монеты (правильное определение той стороны, которая выпадет после бросания) равна 0.5. Таким образом, извлечение информации и дальнейшая работа с ней в плане решения задач управления системами будут иметь стохастическую природу. Если, например, имеется W возможных вариантов точных значений имеющегося сообщения и вероятность того, что таковым является этот вариант равна p_i, то энтропия сообщения будет вычисляться по формуле (5), где k – подходящий нормирующий множитель. Следовательно, эта же величина определяет количество информации, которое мы получим после точного определения значения сообщения. Разумеется, этот подход также распространяется на случай непрерывных распределений. Это определение информации в качестве общего понятия стало широко применяться и в других науках безотносительно к предмету изучения (см., напр. [3]). Несмотря на отдельные попытки как-то разграничить области применения такого понятия (см. [7, с. 667–668], а также [11]), оно стало использоваться фактически как общий постулат, не признающий других вариантов.

В свете тех ограничений, которые накладывает использование стохастических моделей в реальных системах и о которых говорилось в разделе 1, возникает вопрос о границах применимости данного подхода к определению понятия информации, когда далеко не все суще-

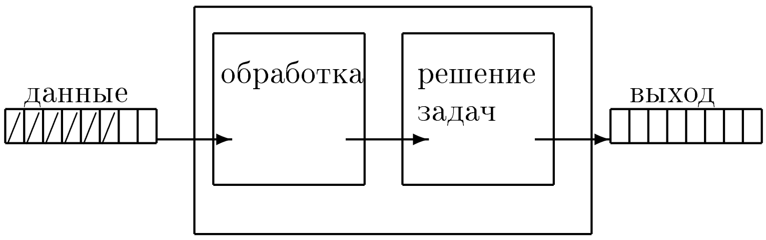

Рис. 2: Базовая система

ствующие системы являются чисто стохастическими. Каким образом определять информацию вне стохастической модели, в которой все события относятся к одному типу? Другой вопрос связан с отсутствием в приведённой схеме собственно моделей процессов и явлений и учета затрат на их построение, которые требуются для извлечения правильной (ценной) информации из полученных сообщений. Если всё же они присутствуют неявно, то почему учитываются с помощью вероятностных соотношений?

Например, вполне можно представить себе базовую систему, которая получает данные, обрабатывает их и преобразует для решения ряда задач, см. рис. 2. При этом, однако, система может получать только чётко определённые типы данных на определённые внешние носители, хранить их в четко определенном виде и выполнять также только преобразования из строго указанного набора. Инструкции (программы) для решения задач также интерпретируются как один из видов данных, а ответы выдаются в заранее оговоренным виде. Примерами таких базовых систем служат компьютеры, а сама система представляет собой общее описание моделей теории алгоритмов, без конкретизации типов данных, преобразований и классов решаемых задач. Для этой теории центральным является вопрос об оценке сложности того или иного класса задач в зависимости от размерности или длины входных данных.

Например, если речь идёт о системе, решающей линейные уравнения вида

$$Ax = b,$$

где A – матрица размерности $m \times n$, b – m-мерный вектор, то входными данными являются все элементы матрицы A и вектора b, записанные в определённом месте, а выходом – координаты вектора x, если требуется только одно из решений, либо сообщение об отсутствии решений. В качестве допустимых могут выступать преобразования метода Гаусса, например. Тогда можно достаточно точно оценить сложность решения этой задачи (см., напр. [12]). Однако при этом входные данные чётко определены, на их место не может быть записана другая информация, даже изменение в порядке размещения данных приведёт к ошибке. Поэтому поставленный вопрос о первичной информации, точнее, о модели, на основе которой можно определить, что изучение реальной системы требует решения системы линейных уравнений и извлечь все коэффициенты для записи их в качестве входных данных, имеет принципиальное значение. Действительно, иначе работа всей системы будут бессмысленной.

Приведём две иллюстрации этого утверждения. В 1846 году астрономы И.Галле и Г.д'Арре в телескоп обнаружили планету Нептун. Но всё дело в том, что время и место наблюдения на небе этой планеты рассчитал заранее У.Леверье на основании модели движения планет и имеющихся отклонений от неё в поведении более близкой к Земле планеты Уран. Поэтому модель Леверье сыграла в открытии решающую роль, без неё произвольные наблюдения неба вряд ли принесли бы такой результат.

Второй пример взят из книги [13, с. 43–44]. Достаточно долго такое явление природы как уединенная волна оставалось без объяснения. Для этого вначале потребовалось разработать модель гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Выяснилось, что в упрощённом, линеаризованном виде уравнения гидродинамики не допускают подобных решений. Далее было доказано, что и в общем виде эти уравнения не имеют аналитических решений данного типа, то есть решений, разложимых в бесконечный степенной ряд. Действительно, аналитичность функции длительное время считалась её естественным свойством, по-

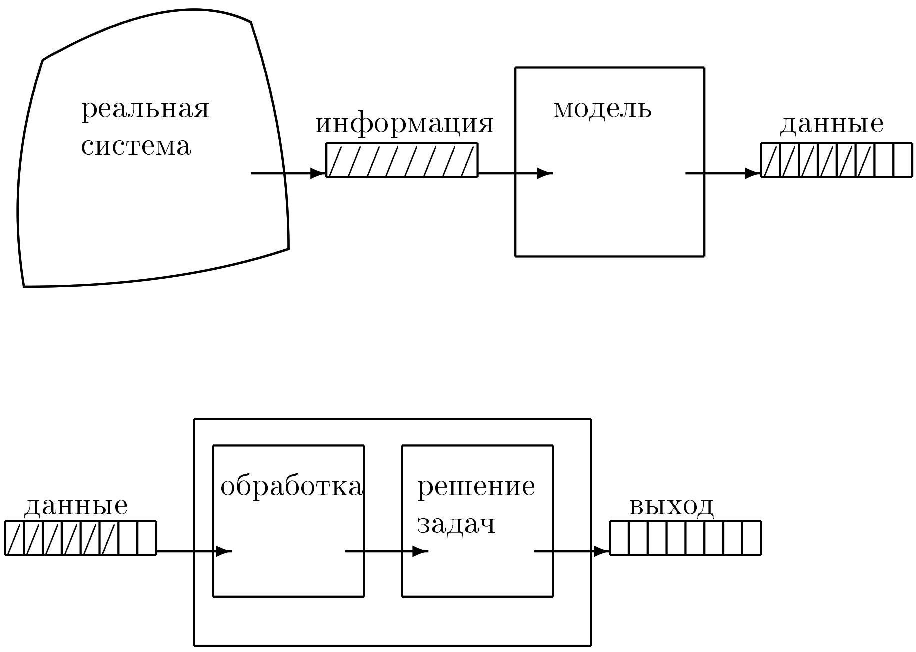

Рис. 3: Модель и базовая система

скольку большинство функций, встречавшихся в основных разделах математики и её приложениях, были аналитическими. Тем не менее, М.А.Лаврентьев доказал существование решения (не аналитического) в виде уединенной волны, тем самым показав естественность существования таких волн.

Эти примеры показывают не просто важность модели, а важность умения выбора правильной модели и соответствующих условий применения. Понятно, что построение таких моделей вряд ли можно описать с помощью вероятностного подхода. Можно сделать вывод, что важным фактором является не количество информации, а ценность информации, что определяется адекватностью применяемых моделей.

Таким образом, в схему, представленную на рис. 2, следует включить модель, как указано на рис. 3. На основании модели из реальной системы извлекается структурированная информация, которая отражается в виде исходных данных для основной системы, в которой происходит обработка данных для последующего решения требуемых задач.

Отметим, что в рамки базовой системы вполне вписывается предложенная К. Шенноном модель канала связи, поскольку речь идёт о фиксированном наборе преобразований с наборами сообщений, содержащих символы из определенного множества. Другое дело, что вероятностные оценки работы канала, пригодные для случая массовой передачи сообщений, могут не подходить для оценки работы базовой системы для других классов задач, т.е. требуется некоторый аналог понятия энтропии, который бы давал оценку сложности различных типов базовых систем для различных классов задач, встречающихся в математике. Эти вопросы, как и сама теория сложности алгоритмов, составляют важнейшую часть кибернетики в настоящее время. Достаточно широкий и простой обзор этого направления вместе с дальнейшими ссылками можно найти в брошюре [14].

4 О моделях равновесия

Модель идеального газа, которая приведена в разделе 1 и использовалась для описания его поведения в целом, как макросистемы, относится к моделям равновесия. Действительно, в состоянии равновесия энтропия газа максимальна и вероятности всех возможных микросостояний газа равны. В разделе 1 уже отмечалась ограниченность применения этой модели к другим системам и, соответственно, ограниченность выводов о поведении энтропии (и «информации»), полученных из этой модели. Напомним, что в модели система содержит множество идентичных (микро)элементов, с одинаковым поведением, при отсутствии какой-либо структуризации в виде иерархии, ограничений и т.п. С другой стороны, к настоящему времени предложено довольно много других моделей равновесия, применяющихся для исследования различных реальных систем (см., напр. [15]–[20] и приведённые там ссылки). Эти модели описывают иные типы систем и опираются, как правило, на иные принципы равновесия. Поэтому было бы полезным провести сравнение моделей равновесия и оценку областей их применения. Конечно, полное описание и сравнение даже основных моделей может быть выполнено только в отдельной книге. Поэтому мы ограничимся кратким сравнением только с одним классом – моделями игрового типа (см., напр. [17]).

В моделях обычных бескоалиционных игр элементы системы (игроки) могут иметь некоторую информацию об интересах (функциях выигрыша) и возможностях (множествах стратегий) других элементов, но не знают конкретный выбор ими стратегии в текущем состоянии системы. При этом любой элемент системы своими действиями может повлиять на всех остальных, поскольку их функции выигрыша зависят от его стратегии. Таким образом, здесь элементы равноправны, но не идентичны, поскольку функции выигрыша и множества стратегий различны, т.е. их поведение также может существенно различаться. Наличие функций выигрыша и множеств стратегий задаёт структуру всей системы. Таким образом, тип системы существенно отличается от типа системы из раздела 1. Ясно, что в этих условиях и определение состояния равновесия будет иным. А именно, если в системе n игроков, то i-й игрок имеет множество стратегий X_i и функцию выигрыша $H_i : X \to \mathbb{R}$, где $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ – множество состояний (ситуаций), то, согласно наиболее популярному подходу, состояние $x^* \in X$ называется ситуацией равновесия по Нэшу, если

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^*_{-i}, y_i) \quad \forall y_i \in X_i, i = \overline{1, n},$$

где $(x_{-i}, y_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Иначе говоря, в состоянии равновесия любой игрок односторонними действиями не может добиться улучшения значения своего выигрыша. Следует заметить, что в общем случае эта задача равновесия не сводится к задаче максимизации некоторой функции на множестве ситуаций, то есть многие игровые задачи не потенциальны. Более того, игра может иметь множество ситуаций равновесия, причём выигрыши одного и того же игрока в этих ситуациях различны. Можно сделать вывод, что и понятие равновесия в обеих моделях существенно различается. Следует отметить, что понятие игрового равновесия с успехом применяется и в технических науках, когда отсутствует возможность удовлетворительного статистического описания системы (см., напр. [17, с. 363]). Данное понятие равновесия допускает простые обобщения на случай дополнительных ограничений (см., напр. [21, 22]), различных несимметричных схем обмена информацией между элементами при введении иерархических отношений для них (см., напр. [23, 24]).

5 Немного философии

Пожалуй, было бы неправильным написать статью об информации без определения этого понятия. Всё дело в том, что для таких общих понятий чрезвычайно трудно, а может быть и невозможно, дать точное определение. Хотя определения понятия информации, конечно, существуют (см., напр. [25, 26]), но полной уверенности в их точности нет. Поэтому лучше ограничиться косвенным определением с помощью свойств.

Прежде всего, информация всегда имеет и форму, и содержание, поэтому она может отражаться в том или ином виде, пригодном для обработки и использования, причём таких вариантов отражения может быть сколько угодно. Содержание информации есть сведения о чём-то, о каком-то объекте, процессе и т.п. При этом любой объект или процесс в целом содержит бесконечное количество информации, так что вопросы о количестве информации в объекте являются бессмысленными. Для описания систем используются модели со вполне определённой структурой, тогда объекты, входящие в такую систему, заменяются соответствующими моделями. В рамках модели извлекается информация о системе, тогда структура модели определяет и структуру информации о моделях объектов, причём модель содержит всегда неполную, частичную информацию об объекте. В частности, количество информации о модели объекта может быть конечным, информация может быть точной или ошибочной, полностью или частично, может содержать помехи и искажения и т.п. Смена модели может вызвать смену структуры информации об объекте (модели объекта). В то же время одна и та же информация об объекте может использоваться в разных моделях.

Основная проблема состоит не в том, что реальный объект или процесс содержит бесконечное количество информации, а в том, что эта информация может быть очень разнообразной и многосторонней, указывать на многие связи элементов в этом объекте между собой и с окружающей средой. Поэтому естественное стремление построить как можно более простую, маломерную, либо вообще одномерную модель, будет приводить к её неадекватности по отношению к достаточно сложным реальным процессам и системам. Такие «одномерные» определения всего разнообразия имеющейся информации будут неточными, они становятся, возможно, приемлемыми только применительно к некоторым строго заданным классам моделей реальных систем. Иначе говоря, исходная информация о реальной системе, не структурированная с помощью модели, адекватной этой системе, не будет иметь прикладной ценности. Поэтому неточными являются и сколь угодно сложные модели, не принимающие во внимание структуру моделируемых систем. Сказанное лишь подчеркивает важность проблемы построения адекватных моделей для достаточно общих классов прикладных задач.

Список литературы

[1] Коннов И.В. Немного о моделях // Препринт от 22.06.2020. http://dx.doi.org/10.24108/preprints-3111972

[2] Кузнецов С.И. Молекулярная физика. Термодинамика. - Томск: Изд-во ТПУ, 2006.

[3] Бриллюэн Л. Наука и теория информации. - М.: Физматлит, 1960.

[4] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Едиториал УРСС, 2005.

[5] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974.

[6] Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. - М.: Знание, 1980.

[7] Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. - М.: ИЛ, 1963.

[8] Стратонович Р.Л. Теория информации. - М.: Сов. радио, 1975.

[9] Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. - М.: Наука, 1983.

[10] Моисеев Н.Н. Люди и кибернетика. - М.: Молодая гвардия, 1984.

[11] Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. - М.: Наука, 1973.

[12] Волков Е.А. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

[13] Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. - М.: Наука, 1979.

[14] Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Число и мысль. Выпуск 8. (Математики измеряют сложность). - М.: Знание, 1985.

[15] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

[16] Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. - М.: Наука, 1988.

[17] Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. - М.: Наука, 1984.

[18] Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. - М.: Мир, 1995.

[19] Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. - Dordrecht: Kluwer, 1999.

[20] Konnov I.V. Equilibrium models and variational inequalities. - Amsterdam: Elsevier, 2007.

[21] Rosen J.B. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games// Econometrica. - 1965. - V.33,№3. - P.520–534.

[22] Зуховицкий С.И., Поляк Р.А., Примак М.Е. Вогнутые игры многих лиц // Экон. и мат.методы. - 1971. - Т.7,№6. - С.888–900.

[23] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. - М.: Наука, 1976.

[24] Федоров В.В. Численные методы максимина. - М.: Наука, 1979.

[25] Управление. Информация. Интеллект/ Ред. Берг А.И. и др. - М.: Мысль, 1976.

[26] Кибернетика и современное научное познание/ Ред. Тюхтин В.С. - М.: Наука, 1976.