Об оптимальной дискретной энергии Неймана в шаре и круговом кольце

А. С. Афанасьева-Григорьева, Е. Г. Прилепкина

Аннотация

В работе доказаны некоторые точные оценки дискретной энергии Неймана шара и кругового кольца в евклидовом пространстве для точек, расположенных на окружностях. Доказательства основаны на диссимметризации и анализе асимптотического поведения интеграла Дирихле потенциальной функции.

Ключевые слова: дискретная энергия, функция Грина, функция Неймана, диссимметризация

MSC2010: 31A15

1. Введение и формулировки результатов

В данной работе $\mathbb{R}^d$ будет означать d-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x}$ вида $(x_1, \ldots, x_d)$ с обычной длиной и расстоянием, $d \geq 2$. В случае $d = 2$ мы считаем, что $\mathbb{R}^2$ является комплексной плоскостью. Решение классической проблемы Неймана в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$ для уравнения Пуассона требует построения функции Неймана (иногда ее называют функцией Грина для проблемы Неймана или функцией Грина второго рода). Классическая функция Неймана определяется [1], [2] как функция $\mathbf{x} \in D$ в области $D \setminus \{\mathbf{y}\}$, имеющая представление

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D) = \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D)}{w_d} \tag{1}$$

и удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D)}{\partial n_{\mathbf{x}}} = -\frac{1}{s_{d-1}(\partial D)},$$

$$\int_{\partial D} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D) d\sigma_{\mathbf{x}} = 0.$$

Здесь $\mu_d(\cdot)$— фундаментальное решение уравнения Лапласа, ($\mu_2(\rho) = -\log \rho$, $\mu_d(\rho) = \rho^{2-d}/(d-2)$ при $d \geq 3$), $w_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь единичной гиперсферы, $v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, D)$— некоторая гармоническая в области D функция, s_{d-1}— мера Лебега и дифференцирование берется по внешней нормали.

Существует много исследований, связанных с экстремальными задачами для различных видов энергий дискретного заряд (см., например, работы [3], [4], [5] и ссылки в них). В [6] получены две оценки дискретной энергии функции Грина кругового кольца на плоскости в случае точек, расположенных на некоторой окружности. Эти результаты были распространены в евклидово пространство в [7]. Целью настоящей работы является получение результатов подобного сорта для функции Неймана.

Напомним определение дискретной энергии Грина [8]. Пусть $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ произвольный дискретный заряд (множество вещественных чисел), принимающий значение δ_k в точке $\mathbf{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$ области D . *Энергией Грина* этого заряда относительно области D называется величина

$$E(X, \Delta, D) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l g_D(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l),$$

где $g_D(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$ функция Грина области D. Аналогичным образом определим *энергию Неймана*

$$En(X, \Delta, D) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l N(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, D).$$

Всюду далее область D является либо шаром вида $\{|\mathbf{x}| < \tau\}$, либо концентрическим круговым кольцом вида $\{\tau_1 < |x| < \tau_2\}$. Примем следующие обозначения: $B(\mathbf{a}, r)$ — открытый шар с центром в точке $\mathbf{a}$ радиуса r, $J-$ $(d-2)-$мерная плоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = (0, 0, x_3, \ldots, x_d)\}$. Нам понадобятся цилиндрические координаты $(r, \theta, \mathbf{x}')$ точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ в $\mathbb{R}^d$, связанные с декартовыми координатами соотношениями $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $\mathbf{x}' \in J$. Записи типа $\{\theta = \varphi\}$ означают множество точек $\mathbb{R}^d$, имеющих полярные координаты (r, φ, x'), $r \geq 0$, $\mathbf{x}' \in J$, φ фиксировано.

Пусть $\Omega = \{S\}$ означает множество, состоящее из конечного числа различных окружностей S вида $S = \{(r_0, \theta, \mathbf{x}'_0) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, лежащих в области D (здесь $r_0 > 0$ и $\mathbf{x}'_0 \in J$ предполагается фиксированным). Для произвольных вещественных чисел θ_j, $j = 0, \ldots, m-1$,

$$0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < 2\pi,$$

обозначим $X = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$ множество точек пересечения окружностей из Ω с полуплоскостями

$$L_j = \{(r, \theta, \mathbf{x}') : \theta = \theta_j\},\ j = 0, \ldots, m-1.$$

Обозначим также $X^* = \{\mathbf{x}^*_k\}_{k=1}^n$ – множество точек пересечения окружностей из Ω с симметричными полуплоскостями

$$L^*_j = \{(r, \theta, \mathbf{x}') : \theta = 2\pi j/m\},\ j = 0, \ldots, m-1.$$

Следующие теоремы показывают, что в зависимости от условий на заряд Δ симметричная конфигурация дает как максимум, так и минимум энергии Неймана $En(X, \Delta, D)$.

Theorem 1. *Пусть D шар или круговое кольцо, Ω, X и X^* определены выше, заряд $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ принимает одинаковые значения $\delta_k = \delta_l$ в точках $\mathbf{x}_k \in X$ и $\mathbf{x}_l \in X$,* *расположенных на одной и той же окружности из* Ω *и*

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k=0.$$

Кроме того, пусть точки $\mathbf{x}_k\in X$ *и* $\mathbf{x}_k^*\in X^*$ *лежат на одной и той же окружности из* Ω, $k=1,\dots,n$. *Тогда*

$$En(X,\Delta,D)\geq En(X^*,\Delta,D).$$

Theorem 2. *Пусть* D *шар или круговое кольцо,* Ω, X, X^*, Δ *определены выше,* m *— четное число и* $\delta_k=-\delta_l$ *в точках* $\mathbf{x}_k\in X$ *и* $\mathbf{x}_l\in X$, *лежащих на одной и той же окружности из* Ω *и на соседних полуплоскостях из совокупности* $\{L_j\}_{j=0}^{m-1}$. *Тогда*

$$En(X,\Delta,D)\leq En(X^*,\Delta,D),$$

где точки X^* *пронумерованы следующим образом: если* $\mathbf{x}_k^*\in X^*$ *лежит на пересечении окружности* S *из* Ω *с полуплоскостью* L_j^*, *тогда соответствующая точка* $\mathbf{x}_k\in X$ *должна лежать на пересечении* S *и полуплоскости* L_j, $k=1,\dots,n$, $0\leq j\leq m-1$.

Заметим, что полученные в работе теоремы справедливы и в случае, когда D означает область вращения (область $D\subset\mathbb{R}^d$ называется *областью вращения* относительно оси J, если для любой точки $(r,\theta,\mathbf{x}')\in B$ и любого φ точка $(r,\varphi,\mathbf{x}')$ принадлежит D).

При дополнительном условии

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k=0 \tag{2}$$

определим функцию

$$u(\mathbf{x})=u(\mathbf{x};X,D,\Delta)=\sum_{k=1}^{n}\delta_kN(\mathbf{x},\mathbf{x}_k,D),$$

которую назовем потенциальной функцией Неймана конфигурации X, Δ, D. Непосредственно из определения вытекает разложение потенциальной функции в окрестности точки $\mathbf{x}_k$, $k=1,\dots,n$,

$$u(\mathbf{x})=\delta_k\frac{\mu_d(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k|)}{w_d}+a_k+o(1),\ \mathbf{x}\to\mathbf{x}_k, \tag{3}$$

где

$$a_k=\delta_k\frac{v(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_k,D)}{w_d}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\delta_lN(\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_k,D).$$

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_ka_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\eta_{kl}(D)\delta_k\delta_l=En(X,\Delta,D)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k^2v(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_k,D)}{w_d} \tag{4}$$

представляет из себя квадратичную форму переменных Δ с коэффициентами $\eta_{kl}(D)$, зависящими от функции Неймана. Обозначим эту квадратичную форму

$$Qn(X,\Delta,D)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\eta_{kl}(D)\delta_k\delta_l, \tag{5}$$

где $\eta_{kl}(D)=N(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l,D),\ k\neq l,\ \eta_{kk}(D)=v(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l,D)/w_d$.

Квадратичные формы такого сорта, а также формы с коэффициентами, зависящими от функции Грина либо Робена, играют важную роль в геометрической теории функций. Различные неравенства для таких форм и их применения встречаются в работах Аленицина, Нехари, Дюрена, Шиффера, Дубинина и других математиков (см. [9], [10], [11], [12]). Мы доказываем, что

$$Qn(X,\Delta,D)\geq Qn(X^*,\Delta,D)$$

в условиях Теоремы 1 и

$$Qn(X,\Delta,D)\leq Qn(X^*,\Delta,D)$$

в условиях Теоремы 2. Для вычисления коэффициентов квадратичной формы Q_n при дополнительном условии (2) взамен классической можно использовать обобщенную функцию Неймана [13]. На плоскости известен явный вид формы Q_n круга и кольца. Функция Неймана единичного круга U [2]

$$N\left(z,z_0,U\right)=-\frac{\log|z-z_0|1-z\overline{z_0}|}{2\pi},$$

поэтому

$$\eta_{kl}(U)=-\frac{\log|z_k-z_l|1-z_k\overline{z_l}|}{2\pi},\ k\neq l,$$

$$\eta_{kk}(U)=-\frac{\log(1-|z_k|^2)}{2\pi}.$$

В [13] приведены коэффициенты $\eta_{kl}(K)$ квадратичной формы плоского кольца $K=\{\mu<|z|<1\}$. А именно,

$$\eta_{kl}(K)=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\log|\theta_1(i\log(z_k\overline{z_l})/2;\mu)\theta_1(i\log(z_k/z_l)/2;\mu)|, & k\neq l,\\ \frac{1}{2\pi}\log\frac{4|z_k|^2|\sin\left(i\log|z_k|\right)|}{(1-|z_k|^2)|\theta_1(i\log|z_k|;\mu)\theta_1'(0;\mu)|}, & k=l,\end{cases}$$

где

$$\theta_1(z;\mu)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mu^{(n+1/2)^2}e^{i(2n+1)z}.$$

В пространстве размерности $d\geq 3$ мы не нашли в литературе аналитического выражения функции Неймана кругового кольца. Для единичного шара $U=B(0,1)$ функция Неймана найдена в работе [2] и имеет вид

$$N(\mathbf{x},\mathbf{y},U)=\frac{1}{\omega_d}\left(\mu_d(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+\mu_d\left(\left|x|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\right)+\epsilon_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)+Const,$$

где $\epsilon_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ задается формулами

$$\epsilon_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \log \frac{2}{\left|1-(\mathbf{x},\mathbf{y})+\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\right|}, d=3;$$

$$\epsilon_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2}} \arctan \frac{\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2}}{1-(\mathbf{x},\mathbf{y})} - \log\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|, d=4;$$

$$\epsilon_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \log \frac{2}{\left|1-(\mathbf{x},\mathbf{y})+\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\right|} + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{(2k-1)}\left(\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{1-2k}-1\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-k-1}\frac{2^i(k+i-1)!(2k-3)!!}{(k-1)!(2k+2i-1)!!}\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{x}|^{2i}|\mathbf{y}|^{2i}}{\left(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\right)^{i+1}}\left(\frac{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{2k-1}}+(\mathbf{x},\mathbf{y})\right),$$
$$d\ge 5, d=2p+1, p\ge 2;$$

$$\epsilon_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\log\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right| + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{2k}\left(\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{-2k}-1\right)$$
$$+(\mathbf{x},\mathbf{y})\arctan\frac{\sqrt{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})}^2}{(1-(\mathbf{x},\mathbf{y}))}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\frac{|\mathbf{x}|^{2k}|\mathbf{y}|^{2k}}{\left(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$
$$+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{i=0}^{p-k-1}\frac{(2k+2i-1)!!(k+1)!}{2^{i+1}(2k-1)!!(k+i)!}\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})|\mathbf{x}|^{2i}|\mathbf{y}|^{2i}}{\left(|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\right)^{i+1}}\left(\frac{|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\left|\mathbf{x}|\mathbf{y}|-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|^{2k}}-(\mathbf{x},\mathbf{y})\right),$$
$$d\ge 6, d=2p+2, p\ge 2;$$

$0!=1$, $(-1)!!=1$.

2. Доказательство Теоремы 1.

Обозначим символом D_r область, полученную удалением из D шаров с центром $\mathbf{x}_k$ радиуса r, $D_r = D\backslash(\cup_{k=1}^n \overline{B(\mathbf{x}_k,r)})$. Тогда для интеграла Дирихле $I(u,D_r)=\int_{D_r}|\nabla u|^2 d\mathbf{x}$ потенциальной функции справедлива асимптотическая формула [14, Лемма 2.1], [15, Лемма 1]

$$I(u,D_r) = \left(\sum_{k=1}^n \delta_k^2\right)\frac{\mu_d(r)}{w_d} + En(X,\Delta,D) + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_k,D)}{w_d} + o(1),\ \ r\to 0, \qquad (6)$$

или

$$I(u,D_r) = \left(\sum_{k=1}^n \delta_k^2\right)\frac{\mu_d(r)}{w_d} + \sum_{k=1}^n \delta_k a_k + o(1),\ \ r\to 0. \qquad (7)$$

Функцию $v(\mathbf{x})$ назовем допустимой для D, X, Δ, если $v(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lip}$ в окрестности каждой точки D за иcлючением, может быть, конечного числа точек, непрерывна в $\overline{D} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{\mathbf{x}_k\}$, и в окрестности $\mathbf{x}_k$ справедливо разложение

$$v(\mathbf{x}) = \delta_k \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|)}{w_d} + b_k + o(1), \, \mathbf{x} \to \mathbf{x}_k. \tag{8}$$

Для допустимой функции v и потенциальной функции u мы имеем ассимптотику [14, Лемма 2.2], [12, Лемма 2]

$$I(v - u, D_r) = I(v, D_r) - I(u, D_r) - 2 \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) + o(1), \;\; r \to 0. \tag{9}$$

Пусть $u_1(\mathbf{x})$ потенциальная функция Неймана набора X, Δ, $u_2(\mathbf{x})$ потенциальная функция Неймана набора X^*, Δ, и Dis означает диссимметризацию, описанную в доказательстве Теоремы 1 работы [7]. Построим в области D функцию $v(\mathbf{x})$ по правилу

$$v(\mathbf{x}) = u_2(Dis^{-1}(\mathbf{x})).$$

В силу симметричности конфигурации X^*, Δ, D функция $u_2(\mathbf{x})$ инварианта относительно любого отображения из группы симметрий $\varphi \in \Phi$, учавствующих в определении диссимметризации Dis. Поэтому $v(\mathbf{x})$ определена однозначно и является допустимой для X, Δ. Так как диссимметризация является, по сути, специальной перестановкой углов, то

$$I(v, D_r) = I(u_2, D_r^*),$$

где $D_r^* = D \setminus (\cup_{k=1}^{n} \overline{B(\mathbf{x}_k^*, r)})$. Из (7), (9) следует

$$\begin{aligned} 0 \le I(v, D_r) - I(u_1, D_r) - 2 \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) + o(1) = \\ I(u_2, D_r) - I(u_1, D_r) - 2 \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) + o(1) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k (a_k - b_k) + o(1), \quad r \to 0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k b_k \le \sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k. \tag{11}$$

Здесь b_k коэффициенты асимптотического разложения потенциальной функции симметричной конфигурации, a_k — не симметричной. С учетом (4), получаем

$$En(X^*, \Delta, D) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{x}_k^*, D)}{w_d} \le En(X, \Delta, D) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d}. \tag{12}$$

Поскольку D является шаром или кольцом, $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}, D) = v(\mathbf{y}, \mathbf{y}, D)$ для любых двух точек $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, принадлежащих одной и той же окружности S из Ω. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{x}_k^*, D)}{w_d} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2 v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k, D)}{w_d}.$$

Таким образом, неравенство (12) доказывает Теорему 1.

3. Доказательство Теоремы 2.

Докажем сперва вспомагательную лемму.

Лемма 1. *Пусть* $Y = \{\mathbf{y}_q\}_{q=1}^l$ *совокупность точек, лежащих на полуплоскости* $\{\theta = 0\}$, $\Delta_0 = \{\sigma_q\}_{q=1}^l$ *некоторый заряд,* $0 < \alpha < \pi$, $D(\alpha) = D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$, $\Gamma(\alpha) = \partial D(\alpha) \cap \{\theta = \alpha\}$ *либо* $D(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$, $\Gamma(\alpha) = \partial D(\alpha) \cap \{\theta = -\alpha\}$. *Рассмотрим функцию* $h_\alpha(\mathbf{x})$, *гармоническую в* $D(\alpha)$ *за исключеним точек* Y, *непрерывную в* $\overline{D(\alpha)} \setminus Y$, *равную нулю на* $\Gamma(\alpha)$, *имеющую нулевую производную на оставшейся части границы* $\partial D(\alpha) \setminus Y$ *и в окрестности точек* $\mathbf{y}_q$ *удовлетворяющую разложению*

$$h_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_q \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_q|)}{w_d} + c_q(\alpha) + o(1),\ \mathbf{x} \to \mathbf{y}_q, \tag{13}$$

Тогда функция

$$f(\alpha) = \sum_{q=1}^l \sigma_q c_q(\alpha)$$

вогнута на $0 < \alpha < \pi$ *как функция от* α.

Доказательство Леммы 1. Вне области $\overline{D(\alpha)}$ мы полагаем, что функция h_α доопределена нулем. В терминах работ [14], [15] функция $h_\alpha(\mathbf{x})$ называется потенциальной функцией набора $D(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$, Y, Δ_0. Повторяя доказательство леммы 2.1 работы [14] получим разложение

$$I(h_\alpha, D(\alpha)_r) = \frac{1}{2}\left(\sum_{q=1}^l \sigma_q^2\right)\frac{\mu_d(r)}{w_d} + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^l \sigma_q c_q(\alpha) + o(1),\ \ r \to 0. \tag{14}$$

Для $0 < \alpha < \beta < \pi$ построим в области $D((\alpha+\beta)/2)$ функцию $v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x})$ по правилу

$$v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x}) = \frac{h_\alpha(\mathbf{x}) + h_\beta(\mathbf{x}) - h_\beta(\mathbf{x}^*)}{2},$$

где $\mathbf{x}^*$ означает точку, симметричную $\mathbf{x}$ относительно полуплоскости $\{\theta = (\alpha+\beta)/2\}$ (либо $\{\theta = -(\alpha+\beta)/2\}$). Функция $v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x})$ допустима для $D((\alpha+\beta)/2)$, $\Gamma((\alpha+\beta)/2))$, Y, Δ_0 и имеет разложение

$$v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x}) = \sigma_q \frac{\mu_d(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_q|)}{w_d} + \frac{c_q(\alpha) + c_q(\beta)}{2} + o(1),\ \mathbf{x} \to \mathbf{y}_q. \tag{15}$$

Применяя аналог формулы (9) (см. доказательство [15, Лемма 2], [14, Лемма 2.2]), получим

$$\begin{aligned} 0 \le I(v_{(\alpha+\beta)/2}, D((\alpha+\beta)/2)_r) - I(h_{(\alpha+\beta)/2}, D((\alpha+\beta)/2)_r) - \\ \sum_{q=1}^l \sigma_q \left(\frac{c_q(\alpha) + c_q(\beta)}{2} - c_q\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) + o(1),\ \ r \to 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Из определения функции $v_{(\alpha+\beta)/2}(\mathbf{x})$ и свойства модуля вектора $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 \leq 2(|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2)$ вытекает

$$I(v_{(\alpha+\beta)/2}, D((\alpha+\beta)/2)_r) \leq \frac{1}{2} \int\limits_{D(\alpha+\beta)/2} (|\nabla(h_\alpha(\mathbf{x})-h_\beta(\mathbf{x}^*))|^2) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int\limits_{D(\alpha+\beta)/2} |\nabla h_\beta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{D(\alpha)} |\nabla h_\alpha(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int\limits_{D(\beta)} |\nabla h_\beta(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (17)$$

Из (14), (16), (17) следует

$$\sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q(\alpha) + \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q(\beta) \leq 2 \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right),$$

или

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right).$$

Последнее неравенство и означает вогнутость функции $f(\alpha)$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству Теоремы 2. Заметим, что условия теоремы гарантируют, что $\sum_{k=1}^{n} \delta_k = 0$. Будем считать, что $\theta_0 = 0$ и $\theta_m = 2\pi$. Обозначим

$$B_j = D \cap \{\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}\},$$

$$B_j^+ = D \cap \{\theta_j \leq \theta \leq \frac{\theta_j+\theta_{j+1}}{2}\},\ B_j^- = D \cap \{\frac{\theta_j+\theta_{j+1}}{2} \leq \theta \leq \theta_{j+1}\},$$

$$\alpha_j = \frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{2},$$

$j = 0, \ldots, m-1$. Пусть $Y = \{y_q\}_{q=1}^{l}$, $\Delta_0 = \{\sigma_q\}_{q=1}^{l}$ — это точки из X и соответствующие им заряды ($\sigma_q = \delta_k$ если $\mathbf{y}_q = \mathbf{x}_k$), лежащие на $\{\theta = 0\}$. Функцию $h_\alpha(\mathbf{x})$ из Леммы 1, определяемую множеством Y, зарядом Δ_0 и областью $D(\alpha) = D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$, обозначим $h_\alpha^1(\mathbf{x})$. Аналогично пусть $h_\alpha^2(\mathbf{x})$ определяется набором Y, $-\Delta_0 = \{-\sigma_q\}_{q=1}^{l}$ и $D(\alpha) = D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$, $h_\alpha^3(\mathbf{x})$ — набором Y, $-\Delta_0$ и $D(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$, и $h_\alpha^4(\mathbf{x})$ — набором Y, Δ_0 и $D(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$. Константу из разложения (13) функции $h_\alpha^p(\mathbf{x})$ обозначим $c_q^p(\alpha)$, $p = 1, 2, 3, 4$. Определим функции

$$\psi_j^+(\mathbf{x}) = h_{\alpha_j}^1(\theta_j(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in B_j^+, j = 0, 2, \ldots, m-2,$$

$$\psi_j^+(\mathbf{x}) = h_{\alpha_j}^2(\theta_j(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in B_j^+, j = 1, 3, \ldots, m-1,$$

$$\psi_j^-(\mathbf{x}) = h_{\alpha_j}^3(\theta_{j+1}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in B_j^-, j = 0, 2, \ldots, m-2,$$

$$\psi_j^-(\mathbf{x}) = h_{\alpha_j}^4(\theta_{j+1}(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in B_j^+, j = 1, 3, \ldots, m-1,$$

где обозначение $\varphi(\mathbf{x})$ означает поворот на угол φ (а именно $\varphi(\mathbf{x}) = (r, \theta-\varphi, \mathbf{x}')$, если $\mathbf{x} = (r, \theta, \mathbf{x}')$). В области B_j, $j = 0, \ldots, m-1$ зададим функции

$$\psi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_j^+(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B_j^+, \\ \psi_j^-(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B_j^-, \\ 0,\ \mathbf{x} = (r, (\theta_j+\theta_{j+1})/2, x'). \end{cases}$$

По построению функция $\psi_j(\mathbf{x})$ гармоническая в B_j, имеет нулевую производную по нормали на границе ∂B_j (за исключением точек X), и разложение типа (8) в окрестности точек $X \cap \overline{B_j}$. Пусть $u(\mathbf{x})$ потенциальная функция Неймана набора X, Δ, и $\sum^j \delta_k a_k$ означает суммирование тех слагаемых $\delta_k a_k$, которые соответствуют точкам $x_k \in \overline{B}_j$. Повторяя доказательство Леммы 2.2 [14], получим

$$0 \leq I(u,(B_j)_r) - I(\psi_j,(B_j)_r) - \sum^j \delta_k a_k + \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^1(\alpha_j) + \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j) + o(1), \; j = 0, \ldots, m-2, \quad (18)$$

$$0 \leq I(u,(B_j)_r) - I(\psi_j,(B_j)_r) - \sum^j \delta_k a_k + \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j) + \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^4(\alpha_j) + o(1), \quad j = 1, \ldots, m-1. \quad (19)$$

Чтобы получить неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0,\ldots,m-2} \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^1(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=0,\ldots,m-2} \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1,\ldots,m-1} \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1,\ldots,m-1} \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^4(\alpha_j), \quad (20)$$

мы просуммируем неравенства (18), (19) по всем $j = 0, \ldots, m-1$, применим разложение (7) и равенства

$$I(\psi_j,(B_j)_r) = \sum_{q=1}^{l} \sigma_q^2 \frac{\mu_d(r)}{w_d} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^1(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j) + o(1), \; j = 0, \ldots, m-2,$$

$$I(\psi_j,(B_j)_r) = \sum_{q=1}^{l} \sigma_q^2 \frac{\mu_d(r)}{w_d} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^4(\alpha_j) + o(1), \quad j = 1, \ldots, m-1,$$

$$m \sum_{q=1}^{l} \sigma_q^2 = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2,$$

а также учтем тот факт, что каждая точка $\mathbf{x}_k \in X$ принадлежит двум замкнутым областям $\overline{B}_j$, Далее отметим, что из данного в Лемме 1 определения $h_\alpha(\mathbf{x})$ вытекают равенства $h_\alpha^1(\mathbf{x}) = -h_\alpha^2(\mathbf{x})$, $h_\alpha^3(\mathbf{x}) = -h_\alpha^4(\mathbf{x})$, Следовательно,

$$\sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^1(\alpha_j) = \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^2(\alpha_j), \; \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c_q^4(\alpha_j) = \sum_{q=1}^{l} (-\sigma_q) c_q^3(\alpha_j).$$

Кроме того, в области $B(\alpha) = D \cap \{-\alpha < \theta < \alpha\}$ существует единственная гармоническая (за исключением точек Y) функция с разложением (13) в окрестности $\mathbf{y}_q$, $q = 1, \ldots, l$, равная нулю на $\partial B(\alpha) \cap (\{\theta = \alpha\} \cup \{\theta = -\alpha\})$ и имеющая нулевую нормальную производную на оставшейся части границы $\partial B(\alpha)$. Указанная функция совпадает с $h^1_\alpha(\mathbf{x})$ в области $D \cap \{0 < \theta < \alpha\}$, и с функцией $h^4_\alpha(\mathbf{x})$ в области $D \cap \{-\alpha < \theta < 0\}$. Поэтому $c^1_q(\alpha) = c^4_q(\alpha)$ и неравенство (20) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k \leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{q=1}^{l} \sigma_q c^1_q(\alpha_j) = \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j). \tag{21}$$

Из (21), установленной в Лемме 1 вогнутости функции $f(\alpha)$ и равенства $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \pi$, мы получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k \leq \sum_{j=0}^{m-1} f(\alpha_j) \leq mf\left(\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j}{m}\right) = mf\left(\frac{\pi}{m}\right). \tag{22}$$

Пусть теперь $u^*(\mathbf{x})$ потенциальная функция Неймана набора X^*, Δ и a^*_k означают соответствующие константы из асимптотического разложения. Повторяя вышеприведенное доказательство с заменой X на X^* нетрудно убедиться, что во всех неравенствах выполняется знак равенства и

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k a^*_k = mf\left(\frac{\pi}{m}\right). \tag{23}$$

Таким образом, неравенство (23) означает

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k \leq \sum_{k=1}^{n} \delta_k a^*_k. \tag{24}$$

Как было отмечено в доказательстве Теоремы 1, (24) эквивалентно требуемому утверждению.

Acknowledgements. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00018) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 075-02-2021-1395).

Список литературы

[1] Henrici P. Applied and computational complex analysis, 3. Wiley-Interscience, New York, 1986.

[2] M.A. Sadybekov and B.T. Torebek and B.Kh. Turmetov, Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball, *Complex Variables and Elliptic Equations, 61:1, 104-123*

[3] J.S. Brauchart, D.P. Hardin, E.B. Saff, The Riesz energy of the Nth roots of unity: an asymptotic expansion for large N, Bulletin of the London Mathematical Society, 41 (4) (2009) 621–633

[4] S.V. Borodachov, D.P. Hardin, E.B. Saff, Discrete Energy on Rectifiable Sets, Springer Monographs in Mathematics, 2019

[5] J.S. Brauchart, D.P. Hardin, E.B. Saff, The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere, Contemp. Math, 578, (2012) 31 – 61,

[6] Dubinin V. N. *Green energy and extremal decompositions.* Probl. Anal. Issues Anal., 2019, vol. 8 (26), no. 3, pp. 38–44.

[7] V.N.Dubinin, E.G.Prilepkina, Optimal Green energy points on the circles in d-space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 499:2 (2021) (Article 125055)

[8] N.S. Landkoff. Foundations of Modern Potential Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[9] Z. Nehari, Some inequalities in the theory of functions, Trans. Amer. Math. Soc., 75, No. 2, 256–286 (1953).

[10] P. Duren and M. M. Schiffer, "Robin functions and energy functionals of multiply connected domains," Pacific J. Math., 148, No. 2, 251–273 (1991).

[11] В. Н. Дубинин, О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена, Матем. сб., 200:10 (2009), 25–38

[12] Е. Г. Прилепкина, О квадратичных формах, порожденных функциями Неймана, Зап. научн. сем. ПОМИ, 429 (2014), 157–177

[13] D.B. Karp and E. Prilepkina, Reduced modulus with free boundary and its applications, Annales Academia Scientiarum Fennica, 2009, vol 34, no.2, 353-378.

[14] K.A. Gulyaeva, S.I. Kalmykov, E.G. Prilepkina, Extremal decomposition problems in the Euclidean space. International Journal of Mathematical Analysis 9 (56) (2015) 2763–2773, http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2015.510259.

[15] В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, "О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей", Дальневост. матем. журн., 6:1-2 (2005), 39–56