

# О НОВОМ НЕЙРОСЕТЕВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© 2022 Н.А. Ольховский<sup>1</sup>, Л.Б. Соколинский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет  
(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)

## 1. Метод поверхностного движения

Рассмотрим задачу ЛП в следующей форме:

$$\bar{x} = \arg \max \{ \langle c, x \rangle | Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n \}, \quad (1)$$

где  $c, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $c \neq \mathbf{0}$ . Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение двух векторов. Мы предполагаем, что ограничение  $x \geq \mathbf{0}$  также включено в систему  $Ax \leq b$  в виде неравенств

$$\begin{array}{cccccccccccc} -x_1 & + & 0 & + & \dots & \dots & \dots & + & 0 & \leq & 0; \\ 0 & - & x_2 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & \leq & 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & + & \dots & \dots & \dots & + & 0 & - & x_n & \leq & 0. \end{array}$$

Функция

$$f(x) = \langle c, x \rangle \quad (2)$$

в линейном программировании называется *целевой функцией*, а вектор  $c$  является ее градиентом. Обозначим через  $M$  допустимую область задачи (1):

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}.$$

Везде далее мы предполагаем, что  $M$  является непустым ограниченным множеством. Это означает, что  $M$  представляет собой выпуклый замкнутый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , и множество решений задачи (1) не является пустым:  $X \neq \emptyset$ . По определению, точка  $x$  является *граничной* по отношению к многограннику  $M$ , если любая ее окрестность имеет непустое пересечение как с  $M$ , так и с его дополнением. Определим *границу*  $\Gamma_M$  многогранника  $M$  как множество всех его граничных точек. Пусть  $\tilde{a}^i \in \mathbb{R}^n$  — вектор, образованный элементами  $i$ -той строки матрицы  $A$ . Тогда систему неравенств, задающих допустимую область  $M$  задачи (1) можно представить в виде

$$\langle \tilde{a}^i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m.$$

Везде далее мы будем предполагать, что  $\tilde{a}^i \neq \mathbf{0}$  для всех  $i = 1, \dots, m$ .

**Определение 1.** Обозначим через  $H_i$  гиперплоскость, задаваемую уравнением  $\langle \tilde{a}^i, x \rangle = b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ):

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle \tilde{a}^i, x \rangle = b_i\}. \quad (3)$$

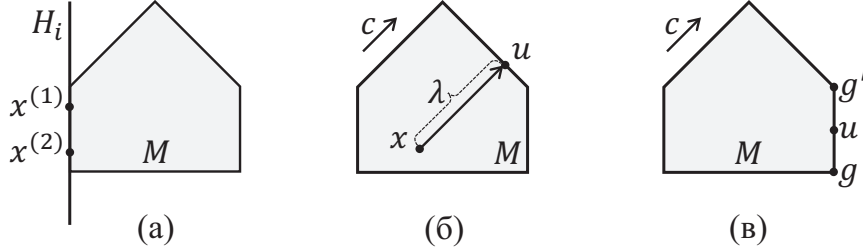
Под полупространством  $H_i^+$ , порождаемым гиперплоскостью  $H_i$ , будем понимать полупространство, определяемое формулой

$$H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle \tilde{a}^i, x \rangle \leq b_i\}. \quad (4)$$

Везде далее мы будем предполагать, что задача (1) является невырожденной, то есть

$$\forall i \neq j : H_i \neq H_j \quad (i, j \in \{1, \dots, m\}). \quad (5)$$

Дадим следующие определения, проиллюстрированные на рис. 1.



**Рис. 1.** В пространстве  $\mathbb{R}^2$ :

(а)  $H$  — ограничивающая гиперплоскость;

(б)  $\lambda = \lambda_M(x, c)$  — максимальный шаг движения из точки  $x$  по направлению  $c$ ;

(в) точки  $g$  и  $g'$  являются предельными граничными точками по отношению к граничной точке  $u$ ; целевое множество  $G_M(u, f) = \{g'\}$  при  $f(x) = \langle x, c \rangle$ .

**Определение 2.** Гиперплоскость  $H_i$ , задаваемая уравнением (3), называется *ограничивающей гиперплоскостью*, если

$$\exists x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in H_i \cap \Gamma_M : \text{Aff}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = H_i.$$

Здесь  $\text{Aff}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  обозначает аффинную оболочку точек  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ :

$$\text{Aff}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x^{(k)} \mid \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in (R), \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}.$$

**Определение 3.** Максимальным шагом движения  $\lambda_M(x, c)$  из точки  $x \in M$  по направлению  $c$  в области  $M$  будем называть вещественную величину, определяемую по формуле

$$\lambda_M(x, c) = \max \{ \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x + \lambda c \in M \}.$$

**Определение 4.** Точка  $g \in \Gamma_M$  называется *предельной граничной точкой* по отношению к граничной точке  $u \in \Gamma_M$ , если выполняются следующие условия:

$$\forall 0 \leq \lambda \leq 1 : u + \lambda(g - u) \in \Gamma_M; \quad (6)$$

$$\lambda_M(u, g - u) = \|g - u\|. \quad (7)$$

Условие (6) означает, что отрезок прямой между точками  $u$  и  $g$  целиком лежит на поверхности многогранника  $M$ . Условие (7) говорит, что максимальный шаг движения из точки  $u$  по направлению к точке  $g$  совпадает с расстоянием между этими точками.

**Определение 5.** Обозначим через  $V_M(u)$  множество всех предельных граничных точек по отношению к граничной точке  $u \in \Gamma_M$ . Целевым множеством точек  $G_M(u, f)$  относительно точки  $u$  и целевой функции  $f$  будем называть множество точек в области  $M$ ,

определяемое по формуле

$$G_M(u, f) = \text{Arg max} \{f(g) | f(g) > f(u), g \in B_M(u)\}. \quad (8)$$

Другими словами, целевое множество  $G_M(u, f)$  включает в себя все предельные относительно  $u$  граничные точки, в которых значение целевой функции  $f$  достигает «локального» максимума.

**Определение 6.** *Оптимальной точкой*  $\text{opt}(G_M(u, f))$  непустого целевого множества  $G_M(u, f)$  будем называть точку, определяемую по формуле

$$\text{opt}(G_M(u, f)) = \arg \min \{\|g - u\| | g \in G_M(u, f)\}. \quad (9)$$

Другими словами, оптимальная точка, это — ближайшая к  $u$  предельная граничная точка, в которой достигается «локальный» максимум целевой функции.

*Метод поверхностного движения*, вычисляющий решение  $\bar{x}$  задачи 1, представлен в виде алгоритма 1.

---

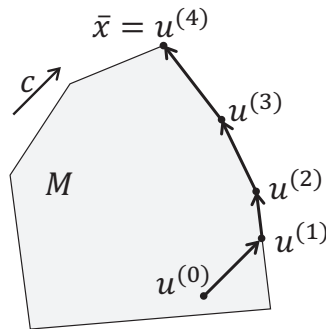
**Алгоритм 1** Метод поверхностного движения

---

**Require:**  $u^{(0)} \in M$ ,  $f(x) = \langle x, c \rangle$

- 1:  $u^{(1)} := \lambda_M(u^{(0)}, c)$
  - 2:  $k := 1$
  - 3: **while**  $G_M(u^{(k)}, f) \neq \emptyset$  **do**
  - 4:      $u^{(k+1)} := \text{opt}(G_M(u^{(k)}, f))$
  - 5:      $k := k + 1$
  - 6: **end while**
  - 7:  $\bar{x} := u^{(k)}$
  - 8: **stop**
- 

Работа метода в пространстве  $\mathbb{R}^2$  показана на рис. 2.



**Рис. 2.** Метод поверхностного движения в пространстве  $\mathbb{R}^2$ .

Метод начинает свою работу из произвольной точки  $u^{(0)}$ , расположенной в допустимой области  $M$ . На шаге 1 происходит движение из точки  $u^{(0)}$  с максимальным шагом  $\lambda_M(u^{(0)}, c)$

в направлении вектора  $s$ . На шаге 2 счетчику  $k$  итераций цикла **while** присваивается значение 1. В заголовке цикла **while** (шаг 3) проверяется, что целевое множество  $G_M(u^{(k)}, f)$  не пусто. В этом случае на шаге 4 из элементов  $G_M(u^{(k)}, f)$  выбирается оптимальная точка  $u^{(k+1)}$ , счетчик  $k$  увеличивается на 1 (шаг 5), и происходит переход к следующей итерации цикла **while**. Если на шаге 3 множество  $G_M(u^{(k)}, f)$  оказывается пустым, то происходит переход на шаг 7, где в качестве решения  $\bar{x}$  задачи (1) берется точка  $u^{(k)}$ .

Покажем, что алгоритм 1 действительно сходится к решению задачи (1). Для этого нам понадобятся следующие две леммы.

**Лемма 1.** Пусть имеются  $u, v \in \Gamma_M$  такие, что  $G_M(u, c) \neq \emptyset$  и  $G_M(v, c) \neq \emptyset$ . Положим  $u' = \text{opt}(G_M(u, c))$ ,  $v' = \text{opt}(G_M(v, c))$ . Пусть  $H_{i(u)}$  и  $H_{i(v)}$  — ограничивающие гиперплоскости такие, что

$$\begin{aligned} u, u' &\in H_{i(u)}; \\ v, v' &\in H_{i(v)}. \end{aligned}$$

Допустим

$$f(u') < f(v'). \quad (10)$$

Тогда  $H_{i(u)} \neq H_{i(v)}$ .

*Доказательство.* Положим

$$\begin{aligned} g_u &= \arg \max \{f(x) \mid x \in H_{i(u)} \cap \Gamma_M\}; \\ g_v &= \arg \max \{f(x) \mid x \in H_{i(v)} \cap \Gamma_M\}. \end{aligned}$$

Тогда согласно определениям 5 и 6 имеем

$$\begin{aligned} f(u') &= f(g_u); \\ f(v') &= f(g_v). \end{aligned}$$

Если  $H_{i(u)} = H_{i(v)}$ , то  $f(g_u) = f(g_v)$  и, следовательно,  $f(u') = f(v')$ , что противоречит (10). Значит  $H_{i(u)} \neq H_{i(v)}$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть задана граничная точка  $u \in \Gamma_M$ , где  $M$  — выпуклый замкнутый многогранник в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , представляющий собой допустимую область задачи (1). Тогда, если  $G_M(u, f) = \emptyset$ , то точка  $u$  является решением задачи 1.

*Доказательство.* Пусть имеет место

$$G_M(u, f) = \emptyset. \quad (11)$$

Предположим противное, то есть существует точка  $\tilde{x} \in M$  такая, что  $f(u) < f(\tilde{x})$ . Тогда найдется ограничивающая гиперплоскость  $H_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) и точка  $u' \in \Gamma_M$ , удовлетворяющие условиям

$$u, u' \in H_i; \quad (12)$$

$$f(u) < f(u'). \quad (13)$$

Положим

$$g = u + \lambda_M(u, u' - u). \quad (14)$$

Точка  $g$  удовлетворяет условиям определения 4 и, таким образом, является предельной граничной точкой по отношению к точке  $u$ . Из 13 и 14 следует, что  $f(u) < f(g)$ . Это означает, что  $g \in B_M(u)$ . Но тогда в силу определения 5 имеем

$$G_M(u, f) \neq \emptyset.$$

Получили противоречие с 11. □

**Предложение 1.** Алгоритм 1 сходится к решению задачи 1 за число итераций, не превышающее  $m$ .

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность точек, вычисляемых алгоритмом 1, начиная с точки  $u^{(1)}$ :

$$u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, u^{(k+1)}, \dots \quad (15)$$

По построению, для любого  $k > 0$  найдется ограничивающая гиперплоскость  $H_{i_k}$  ( $1 \leq i_k \leq m$ ) такая, что

$$u^{(k)}, u^{(k+1)} \in H_{i_k}. \quad (16)$$

Построим последовательность ограничивающих гиперплоскостей

$$H_{i_1}, \dots, H_{i_k}, H_{i_{k+1}}, \dots, \quad (17)$$

удовлетворяющих условию (16). Из (5), (6) следует

$$f(u^{(1)}) < f(u^{(2)}) < \dots < f(u^{(k)}) < f(u^{(k+1)}) < \dots$$

В силу леммы 1 все ограничивающие гиперплоскости в последовательности (17) попарно различны. Следовательно, длина последовательности (17), а с ней и длина последовательности (15), не может превышать  $m$ . Таким образом, алгоритм 1 заканчивает свою работу в некоторой граничной точке  $u^{(K)}$  ( $K \leq m$ ) такой, что  $G_M(u^{(K)}, f) = \emptyset$ . В соответствии с леммой 2 это означает, что  $u^{(K)}$  является решением задачи (1). □

Ограничивающие гиперплоскости (17) обладают одним важным свойством. Введем следующее определение.

**Определение 7.** Пусть задано полупространство

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x \rangle \leq b\},$$

порождаемое гиперплоскостью  $H$  при некоторых  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq \mathbf{0}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Пусть также задан вектор  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \neq \mathbf{0}$ . Полупространство  $H^+$  является *рецессивным* относительно вектора  $c$  (обозначается  $H^+ | \rightarrow c$ ), если

$$\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : x - \lambda c \in H^+ \wedge x - \lambda c \notin H. \quad (18)$$

Полупространство  $H^+$  является *доминантным* относительно вектора  $c$  (обозначается  $H^+ | \leftarrow c$ ), если

$$\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : x + \lambda c \in H^+ \wedge x + \lambda c \notin H. \quad (19)$$

Полупространство  $H^+$  является *нейтральным* относительно вектора  $c$  (обозначается  $H^+ \uparrow c$ ), если

$$\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda c \in H. \quad (20)$$

Другими словами, полупространство  $H^+$  относительно вектора  $c$  является: *рецессивным*, если луч, исходящий из гиперплоскости  $H$  в направлении противоположном вектору  $c$  полностью лежит в  $H^+$ , но не в  $H$ ; *доминантным*, если луч, исходящий из гиперплоскости  $H$  в направлении вектора  $c$  полностью лежит в  $H^+$ , но не в  $H$ ; и *нейтральным*, если луч, исходящий из гиперплоскости  $H$  в направлении вектора  $c$  полностью лежит в  $H$ .

**Предложение 2.** Пусть имеется последовательность точек

$$u^{(1)}, \dots, u^{(K)} \quad (1 < K \leq m),$$

порождаемая алгоритмом 1. Пусть также имеется соответствующая последовательность ограничивающих гиперплоскостей

$$H_{i_1}, \dots, H_{i_{K-1}} \quad (21)$$

многогранника  $M$ , удовлетворяющих условию

$$u^{(k)}, u^{(k+1)} \in H_{i_k} \quad (k = 1, \dots, K-1). \quad (22)$$

Тогда все полупространства, порождаемые гиперплоскостями последовательности (21), являются рецессивными по отношению к вектору  $c$ , являющемуся градиентом целевой функции  $f(x)$  задачи (1).

*Доказательство.* Рассмотрим ограничивающую гиперплоскость  $H_{i_1}$ . В соответствии с (22) эта гиперплоскость содержит точки  $u^{(0)}$  и  $u^{(1)}$ :

$$u^{(0)}, u^{(1)} \in H_{i_1}.$$

Согласно шагу 1 алгоритма 1 имеем

$$u^{(1)} = \lambda_M (u^{(0)}, c).$$

По определению 3

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(0)} + \lambda_1 c, \\ u^{(1)} + \lambda_1 c &\notin H_{i_1}^+, \end{aligned} \quad (23)$$

при некотором  $\lambda_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Формула (23) противоречит как (19) так и (20), однако согласуется с (18). Следовательно, полупространство  $H_{i_1}$  является рецессивным по отношению к вектору  $c$ .

Предположим, уже доказано, что полупространство  $H_{i_k}^+$  ( $1 < k < K$ ) является рецессивным по отношению к вектору  $c$ . В соответствии с определением 7 это означает, что

$$\forall x \in H_{i_k}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : x - \lambda c \in H_{i_k}^+ \wedge x - \lambda c \notin H_{i_k}. \quad (24)$$

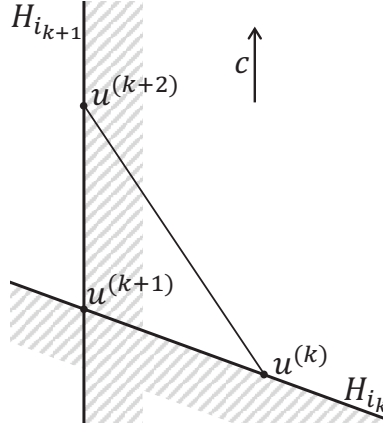
Допустим, что  $H_{i_{k+1}}^+$  является нейтральным по отношению к вектору  $c$ , то есть

$$\forall x \in H_{i_{k+1}}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda c \in H_{i_{k+1}}. \quad (25)$$

Рассмотрим точки  $u^{(k)}, u^{(k+1)}, u^{(k+2)}$  (см. рис. 3). В соответствии с шагом 4 алгоритма 1 имеем

$$u^{(k+1)} = \text{opt} \left( G_M \left( u^{(k)}, f \right) \right), \quad (26)$$

$$u^{(k+2)} = \text{opt} \left( G_M \left( u^{(k+1)}, f \right) \right). \quad (27)$$



**Рис. 3.** Случай, когда полупространство  $H_{i_{k+1}}^+$  является нейтральным по отношению к вектору  $c$ .

С учетом определений 5 и 6 отсюда следует

$$f \left( u^{(k)} \right) < f \left( u^{(k+1)} \right) < f \left( u^{(k+2)} \right). \quad (28)$$

Рассмотрим открытый слева отрезок

$$\left( u^{(k)}, u^{(k+2)} \right] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = u^{(k)} + (1 - \lambda) \left( u^{(k+2)} - u^{(k)} \right), 0 < \lambda \leq 1 \right\}.$$

В силу (28)

$$\forall x \in \left( u^{(k)}, u^{(k+2)} \right] : f(x) > f \left( u^{(k)} \right). \quad (29)$$

Поскольку  $u^{(k+2)}, u^{(k)} \in M$ , а  $M$  является выпуклым, то

$$\left( u^{(k)}, u^{(k+2)} \right] \subset M.$$

С учетом (29) и (2) это возможно, если полупространство  $H_{i_k}^+$  является доминантным относительно вектора  $c$ , то есть, по определению 7, имеет место

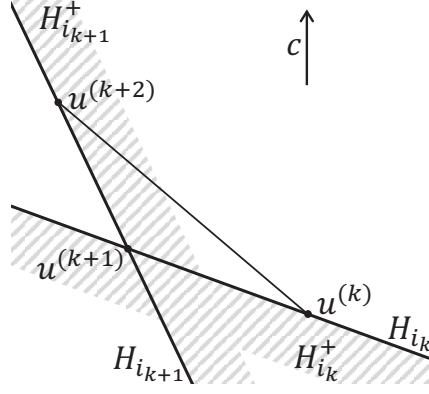
$$\forall x \in H_{i_k}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : x + \lambda c \in H_{i_k}^+ \wedge x + \lambda c \notin H_{i_k}.$$

Но это противоречит (24). Таким образом полупространство  $H_{i_{k+1}}^+$  не может быть нейтральным относительно вектора  $c$ .

Предположим, что полупространство  $H_{i_{k+1}}^+$  является доминантным относительно вектора  $c$ , то есть

$$\forall x \in H_{i_{k+1}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : x + \lambda c \in H_{i_{k+1}}^+ \wedge x + \lambda c \notin H_{i_{k+1}}.$$

Принимая во внимание предположение, что задача (1) не является вырожденной, и что точка  $u^{(k)}$  должна принадлежать полупространству  $H_{i_{k+1}}$  (так как она принадлежит  $M$ ), мы получаем единственно возможный случай, изображенный на рис. 4.



**Рис. 4.** Случай, когда полупространство  $H_{i_{k+1}}^+$  является доминантным по отношению к вектору  $c$ .

Доказательство невозможности такой ситуации аналогично предыдущему случаю, когда полупространство  $H_{i_{k+1}}^+$  предполагалось нейтральным по отношению к вектору  $c$ . Таким образом, остается единственный возможный вариант: полупространство  $H_{i_{k+1}}^+$  является рецессивным по отношению к вектору  $c$ .  $\square$

## 2. Математическая модель визуального представления задачи ЛП

**Определение 8.** Зафиксируем точку  $z \in \mathbb{R}^n$  такую, что полупространство

$$H_c^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle c, x - z \rangle \leq 0\} \quad (30)$$

включает в себя многогранник  $M$ :

$$M \subset H_c^+.$$

Полупространство  $H_c^+$  в этом случае будем называть *целевым полупространством*, а гиперплоскость  $H_c$ , определяемую уравнением

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle c, x - z \rangle = 0\}, \quad (31)$$

будем называть *целевой гиперплоскостью*.

Обозначим через  $\pi_c(x)$  ортогональную проекцию точки  $x$  на целевую гиперплоскость  $H_c$ :

$$\pi_c(x) = x - \frac{\langle c, x - z \rangle}{\|c\|^2} c. \quad (32)$$

Здесь  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму. Тогда *расстояние*  $\rho_c(x)$  от точки  $x \in H_c^+$  до целевой гиперплоскости  $H_c$  может быть вычислено следующим образом:

$$\forall x \in H_c^+ : \rho_c(x) = \frac{\langle c, z - x \rangle}{\|c\|}. \quad (33)$$

Справедливо следующее предложение.

**Предложение 3.** Для любых  $x, y \in H_c^+$

$$\rho_c(x) \leq \rho_c(y) \Leftrightarrow \langle c, x \rangle \geq \langle c, y \rangle.$$



*Доказательство.* Используя (33), получаем

$$\begin{aligned}\rho_c(x) \leq \rho_c(y) &\Leftrightarrow \frac{\langle c, z - x \rangle}{\|c\|} \leq \frac{\langle c, z - y \rangle}{\|c\|} \Leftrightarrow \langle c, z - x \rangle \leq \langle c, z - y \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle c, -x \rangle \leq \langle c, -y \rangle \Leftrightarrow \langle c, x \rangle \geq \langle c, y \rangle.\end{aligned}$$

□

В соответствии с предложением 3 задача (1) эквивалентна следующей задаче:

$$\bar{x} = \arg \min \{ \rho_c(x) | x \in M \}. \quad (34)$$

**Определение 9.** Пусть  $g \in H_c$ . *Целевой проекцией*  $\gamma_c(g)$  точки  $g$  на многогранник  $M$  называется точка, определяемая формулой

$$\gamma_c(g) = g - \sigma_M(g, c)c, \quad (35)$$

где

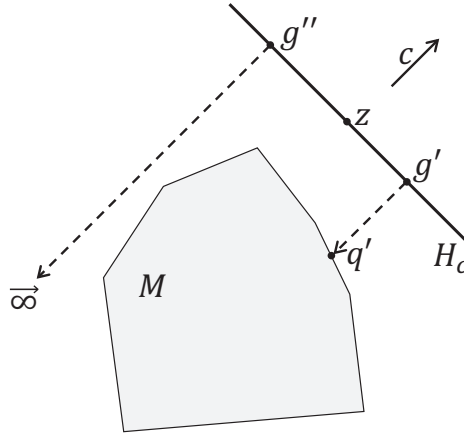
$$\sigma_M(g, c) = \min \{ \sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0} | g - \sigma c \in M \}.$$

Если

$$\neg \exists \sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0} : g - \sigma c \in M,$$

полагаем  $\gamma_c(g) = \vec{\infty}$  — точка, бесконечно удаленная от  $M$ .

Примеры целевых проекций в  $\mathbb{R}^2$  приведены на рис. 5.



**Рис. 5.** Целевые проекции в пространстве  $\mathbb{R}^2$ :  $H_c$  — целевая гиперплоскость, проходящая через точку  $z$ ;  $\gamma_c(g') = q'$ ;  $\gamma_c(g'') = \vec{\infty}$ .

Следующее предложение предоставляет формулу для вычисления целевой проекции.

**Предложение 4.** Пусть гиперплоскость  $H_{i_k}$ , определяемая уравнением

$$\langle \tilde{a}_{i_k}, x \rangle = b_{i_k}, \quad (36)$$

является ограничивающей по отношению к  $M$ , а порожаемое ею полупространство  $H_{i_k}^+$  является рецессивным относительно вектора  $c$ . Пусть

$$u \in H_{i_k} \cap \Gamma_M$$

и

$$g = \pi_c(u). \quad (37)$$

Тогда

$$\gamma_c(g) = g - \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c.$$

*Доказательство.* В соответствии с определением 9 имеем

$$\gamma_c(g) = g - \sigma_M(g, c)c.$$

Таким образом, нам необходимо показать, что

$$\sigma_M(g, c) = \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle}. \quad (38)$$

Рассмотрим прямую  $L$ , задаваемую параметрическим уравнением

$$L = \{g + \tau c \mid \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Точка  $q$  пересечения прямой  $L$  с гиперплоскостью  $H_{i_k}$  должна удовлетворять уравнению

$$q = g + \tau' c \quad (39)$$

при некотором  $\tau' \in \mathbb{R}$ . Подставим правую часть уравнения (39) в уравнение (36) вместо  $x$ :

$$\langle \tilde{a}_{i_k}, g + \tau' c \rangle = b_{i_k}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle + \tau' \langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle &= b_{i_k}, \\ \tau' &= \frac{b_{i_k} - \langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle}. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставив вместо  $\tau'$  правую часть уравнения (40) в формулу (39) получаем

$$q = g + \frac{b_{i_k} - \langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c,$$

что эквивалентно

$$q = g - \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c. \quad (41)$$

Равенство 38 будет иметь место, если мы покажем, что, во-первых,  $q \in \Gamma_M$ , и, во-вторых,

$$\forall \sigma < \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, g \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} : g - \sigma c \notin M. \quad (42)$$

Поскольку  $u \in H_{i_k}$ , то

$$\langle \tilde{a}_{i_k}, u \rangle - b_{i_k} = 0. \quad (43)$$

Подставим в формулу (41) правую часть уравнения (37) вместо  $g$ :

$$q = \pi_c(u) - \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, \pi_c(u) \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c.$$

С учетом (32) отсюда получаем

$$\begin{aligned}
q &= u - \frac{\langle c, u - z \rangle}{\|c\|^2} c - \frac{\left\langle \tilde{a}_{i_k}, u - \frac{\langle c, u - z \rangle}{\|c\|^2} c \right\rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c \\
&= u - \frac{\langle c, u - z \rangle}{\|c\|^2} c - \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, u \rangle - \frac{\langle c, u - z \rangle}{\|c\|^2} \langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c \\
&= u - \frac{\langle c, u - z \rangle}{\|c\|^2} c - \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, u \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c + \frac{\langle c, u - z \rangle}{\|c\|^2} c \\
&= u - \frac{\langle \tilde{a}_{i_k}, u \rangle - b_{i_k}}{\langle \tilde{a}_{i_k}, c \rangle} c.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (43), получаем

$$q = u \in \Gamma_M.$$

Условие (42) непосредственно вытекает из того, что по условию предложения 4 полупространство  $H_{i_k}^+$  является рецессивным относительно вектора  $c$ .  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $g \in H_c$ . Тогда, если  $\gamma_c(g) \neq \infty$ , то

$$\pi_c(\gamma_c(g)) = g.$$

Конструктивный метод вычисления целевой проекции представлен в виде алгоритма 2. Прокомментируем шаги алгоритма 2. Внешний цикл **for** (шаги 1–17) перебирает все гиперплоскости  $H_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), соответствующие ограничениям задачи (1). На шаге 2 проверяется, если полупространство  $H_i^+$ , порожденное гиперплоскостью  $H_i$ , является доминантным или нейтральным по отношению к вектору  $c$  (см. определение 7), то на шаге 3 с помощью оператора **continue** осуществляется принудительный переход к следующей итерации внешнего цикла **for**. Если же полупространство  $H_i^+$  является рецессивным по отношению к вектору  $c$ , то происходит переход на шаг 5, вычисляющий целевую проекцию  $q$  точки  $g$  на гиперплоскость  $H_i$ . На шагах 6–12 проверяется принадлежность точки  $q$  многограннику  $M$ . Для этого булевой переменной  $inM$  на шаге 6 первоначально присваивается значение *true*. Затем во внутреннем цикле **for** (шаги 7–12) проверяется, удовлетворяет ли точка  $q$  всем ограничениям задачи (1). Если на шаге 8 обнаруживается ограничение, которому точка  $q$  не удовлетворяет, то на шаге 9 булевой переменной  $inM$  присваивается значение *false* и с помощью оператора **break** (шаг 10) происходит принудительный выход из внутреннего цикла **for**. В противном случае происходит переход к следующей итерации внутреннего цикла **for**. После завершения внутреннего цикла **for** на шагах 13–15 проверяется условие: если булева переменная  $inM$  имеет значение *true*, то на шаге 14 происходит досрочный выход из внешнего цикла **for**. В противном случае булевой переменной  $inM$  на шаге 16 присваивается значение *false*, и внешний цикл **for** продолжает свою работу. После завершения внешнего цикла **for** на шагах 18–22 проверяется условие: если булева переменная  $inM$  имеет значение *true*, то на шаге 19 в качестве результата выводится точка  $q$ , в противном случае на шаге 21 выводится символ бесконечно удаленной точки.

---

**Алгоритм 2** Вычисление целевой проекции
 

---

**Require:**  $H_c = \{x \mid \langle c, x \rangle = z\}$ ,  $M \subset H_c^+$ ,  $\gamma_c(x, H_i) = x - \frac{\langle \tilde{a}_i, x \rangle - b_i}{\langle \tilde{a}_i, c \rangle} c$ ,  $g \in H_c$

```

1: for  $i = 1 \dots m$  do
2:   if  $H_i^+ \mid \leftarrow$  or  $H_i^+ \mid \uparrow$  then
3:     continue
4:   end if
5:    $q := \gamma_c(g, H_i)$ 
6:    $inM := true$ 
7:   for  $j = 1 \dots m$  do
8:     if  $\langle \tilde{a}_j, q \rangle > b_j$  then
9:        $inM := false$ 
10:    break
11:  end if
12: end for
13: if  $inM$  then
14:   break
15: end if
16:  $inM := false$ 
17: end for
18: if  $inM$  then
19:   output  $q$ 
20: else
21:   output  $\vec{\infty}$ 
22: end if
  
```

---

**Определение 10.** *Рецептивным множеством*  $\mathfrak{G}_c(z, \eta) \subset H_c$  плотности  $\eta \in \mathbb{R}_+$  с центром в точке  $z \in H_c$  будем называть множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

$$z \in \mathfrak{G}_c(z, \eta); \quad (44)$$

$$\forall z' \in \mathfrak{G}_c(z, \eta) \exists z'' \in \mathfrak{G}_c(z, \eta) : \|z' - z''\| = \eta; \quad (45)$$

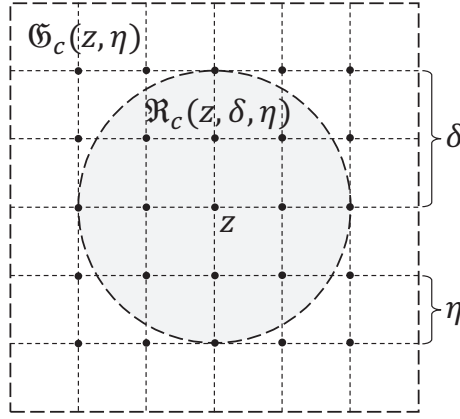
$$\forall z', z'' \in \mathfrak{G}_c(z, \eta) : z' \neq z'' \Rightarrow \|z' - z''\| \geq \eta; \quad (46)$$

$$\forall x \in H_c \setminus \mathfrak{G}_c(z, \eta) \exists z' \in \mathfrak{G}_c(z, \eta) : \|z' - x\| \leq \frac{1}{2}\eta\sqrt{n}. \quad (47)$$

**Определение 11.** *Ретиной*  $\mathfrak{R}_c(z, \delta, \eta)$  с плотностью  $\eta \in \mathbb{R}_+$  с центром в точке  $z \in H_c$  и радиусом  $\delta$  будем называть множество точек, определяемое формулой

$$\mathfrak{R}_c(z, \delta, \eta) = \{x \mid x \in \mathfrak{G}_c(z, \eta), \|x - z\| \leq \delta\}. \quad (48)$$

Другими словами, в ретину входят все точки рецептивного множества, отстоящие от точки  $z$  на расстояние не более  $r$ . Пример ретины в пространстве  $\mathbb{R}^3$  показан на рис. 6.



**Рис. 6.** Пример ретины в пространстве  $\mathbb{R}^3$  (область ретины закрашена серым).

**Определение 12.** Пусть задана целевая гиперплоскость  $H_c$  (см. определение 8). Пусть  $u^{(k)}$  ( $k = 1 \dots K$ ) — точка на поверхности многогранника  $M$ , вычисляемая алгоритмом 1. Зафиксируем  $\delta, \eta \in \mathbb{R}_{>0}$ . Образом  $\mathfrak{I}_c(u^{(k)})$  окрестности точки  $u^{(k)}$  будем называть множество пар

$$\mathfrak{I}_c(u^{(k)}) = \left\{ (g, \rho_c(\gamma_c(g))) \mid g \in \mathfrak{G}_c(\pi_c(u^{(k)}), \delta, \eta) \right\}.$$

Необходимо создать *искусственную нейронную сеть* DNN, принимающую в качестве параметра образ окрестности точки  $u^{(k)}$ , которая вычисляет единичный вектор

$$\text{DNN}(\mathfrak{I}_c(u^{(k)})) = e^{(k)}$$

такой, что

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| e^{(k)}$$

для  $k = 1, \dots, K-1$ , и

$$\text{DNN}(\mathfrak{I}_c(u^{(K)})) = \mathbf{0}.$$

Используя такую DNN, мы можем построить следующую вычислимую версию алгоритма 1.

---

**Алгоритм 3** Линейное программирование с использованием DNN

---

**Require:**  $u^{(0)} \in M$

- 1:  $u^{(1)} := \lambda_M(u^{(0)}, c)$
  - 2:  $k := 1$
  - 3: **repeat**
  - 4:    $e^{(k)} := \text{DNN}(\mathfrak{I}_c(u^{(k)}))$
  - 5:    $u^{(k+1)} := u^{(k)} + \lambda_M(u^{(k)}, e^{(k)}) e^{(k)}$
  - 6:    $k := k + 1$
  - 7: **until**  $e^{(k)} \neq \mathbf{0}$
  - 8:  $\bar{x} := u^{(k)}$
  - 9: **stop**
- 

### 3. Построение обучающего множества

Для построение обучающего множества мы использовали апекс-метод, предложенный в работе [1]. Это — итерационный метод, строящий на поверхности многогранника  $M$  по-

последовательность точек

$$\{u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots\}, \quad (49)$$

сходящуюся за конечное число шагов к решению задачи ЛП.

Апекс-метод начинает свою работу с произвольной точки  $\tilde{x} \in M$ . Такую точку можно получить, например, с помощью метода псевдопроекций [2, 3]. Первая точка  $u^{(0)}$  последовательности (49) вычисляется по формуле

$$u^{(0)} = \tilde{x} + \tilde{\tau}c,$$

где

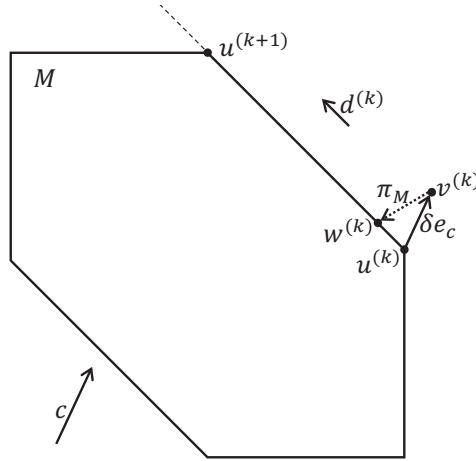
$$\tilde{\tau} = \arg \max \{ \langle \tilde{x} + \tau c, c \rangle \mid \tilde{x} + \tau c \in M, \tau \in \mathbb{R} \}.$$

Другими словами  $u^{(0)}$  является точкой луча, порожденного вектором  $c$  из точки  $\tilde{x}$ , которая лежит на границе многогранника  $M$  и максимально удалена от  $\tilde{x}$ .

Предположим, что уже найдена точка  $u^{(k)}$ , и покажем, как получается точка  $u^{(k+1)}$ . Сначала вычисляется промежуточная точка

$$v^{(k)} = u^{(k)} + \delta e_c,$$

где  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  — некий малый положительный параметр,  $e_c = \frac{c}{\|c\|}$  — единичный вектор, сонаправленный с вектором  $c$  (см. рис. 7).



**Рис. 7.** Апекс-метод

Следующая промежуточная точка  $w^{(k)}$  получается из  $v^{(k)}$  путем применения операции псевдопроектирования  $\pi_M$  на многогранник  $M$ :

$$w^{(k)} = \pi_M(v^{(k)}).$$

Операция псевдопроектирования на многогранник является обобщением операции ортогонального проектирования на гиперплоскость и определяется следующим образом [2]:

$$\pi_M(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_M^{(l)}(x), \quad (50)$$

где

$$\varphi_M^{(l)}(x) = \underbrace{\varphi_M(\varphi_M(\dots \varphi_M(x) \dots))}_l,$$

$$\varphi_M(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \rho_i^+(x),$$

$$\rho_i^+(x) = \frac{\max\{\langle a_i, x \rangle - b_i, 0\}}{\|a_i\|^2} a_i,$$

$h$  — количество ненулевых слагаемых в сумме  $\sum_{i=1}^m \rho_i^+(x)$ . Известно [4, 5], что предел в формуле (50) существует и является точкой, лежащей на поверхности многогранника  $M$ .

Используя точки  $u^{(k)}$  и  $w^{(k)}$ , вычисляется вектор

$$d^{(k)} = w^{(k)} - u^{(k)}.$$

С его помощью вычисляется следующая точка  $u^{(k+1)}$  последовательности (49):

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau^{(k)} d^{(k)},$$

где

$$\tau^{(k)} = \arg \max \left\{ \left\langle u^{(k)} + \tau d^{(k)}, c \right\rangle \mid u^{(k)} + \tau d^{(k)} \in M, \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Другими словами  $u^{(k+1)}$  является точкой луча, порождаемого вектором  $d^{(k)}$  из точки  $u^{(k)}$ , которая лежит на границе многогранника  $M$  и максимально удалена от  $u^{(k)}$  (см. рис. 7).

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 20-07-00092 а).*

## Литература

1. Соколинская И.М., Соколинский Л.Б. Об одном итерационном методе решения задач линейного программирования на кластерных вычислительных системах // Вычислительные методы и программирование. 2020. Т. 21, № 4. С. 329–340. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v21r328>.
2. Ершова А.В., Соколинская И.М. О сходимости масштабируемого алгоритма построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 37(254). С. 12–21. <https://mmp.susu.ru/article/ru/127>.
3. Соколинский Л.Б., Соколинская И.М. Параллельный алгоритм решения нестационарных систем линейных неравенств // Параллельные вычислительные технологии – XIV международная конференция, ПаВТ'2020, г. Пермь, 31 марта–2 апреля 2020 г. Короткие статьи и описания плакатов. Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ. 2020. С. 275–286. <https://doi.org/10.14529/pct2020>.
4. Ерёмин И.И., Попов Л.Д. Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 44–65. <http://www.mathnet.ru/links/0bafa951a15b8d05843dde637310a0e2/ivm1253.pdf>.
5. New Methods for Linear Inequalities / Censor Y., Elfving T., Herman G. T., and Nikazad T. // SIAM Journal on Scientific Computing. 2008. Vol. 30, no. 1. P. 473–504. <https://doi.org/10.1137/050639399>.