

УДК 517.51, 512.7, MSC 26E99, 14PXX

АРИФМЕТИКА \mathbb{DR}_+ .

АЛЕКСАНДР Н. ЖВАНЬКО

Аннотация. В данной работе предлагается идея неклассических арифметик, разнообразий и арифметика \mathbb{DR}_+ , определенная на множестве \mathbb{R}_+ неотрицательных вещественных чисел. Под разнообразиями понимаются: а) множества или последовательности значений функций разнообразия; б) множества решений уравнений разнообразий. Функция/уравнения разнообразия — это функция/уравнение полностью или частично снабженное неклассической арифметикой. Арифметика \mathbb{DR}_+ состоит из сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений. Каждое из действий выполнимо для любых чисел из \mathbb{R}_+ и это множество замкнуто по любому из действий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	1
2. Краткое описание \mathbb{DR}_+	4
3. Общие соглашения и определения	6
4. Действия	8
4.1. Сложения	8
4.2. Вычитания	12
4.3. Умножения	19
4.4. Деления	28
Приложение А. Графики DR -разнообразий	45
Приложение В. Таблицы операций	56
Список литературы	58

1. ВВЕДЕНИЕ

Хотя весь материал статьи состоит из определения арифметики \mathbb{DR}_+ ,¹ главной идеей ее является предложение использования неклассических арифметик; после нее следует идея разнообразий и только потом \mathbb{DR}_+ .

Под неклассической арифметикой, скажем, вещественных чисел, будем понимать такие сложения, вычитания, умножения, деления, которые паре чисел сопоставляют результат, отличный от обычного. Например, $16 + 32 = 55$ вместо

Date: 11 января 2022 года.

Key words and phrases. non-classical arithmetic, real functions, algebraic variety, diversities, неклассическая арифметика, вещественные функции, алгебраические многообразия, разнообразия.

Приложение А является частью исследования, проведенного благодаря финансовой поддержке П. А. Гришанова (Латвия, Рига). Автор также выражает признательность Wolfram Research за использование Wolfram|One при написании приложения А.

¹Обозначение является аббревиатурой от английского Diversities of Reals.

$16+32 = 48$ будет неклассическим сложением. Неклассические арифметики отличаются от гиперкомплексной, p -адической и некоторых других арифметик, в силу того, что эти основаны на классической арифметике вещественных чисел. Классическую арифметику обозначим как \mathbb{CA} .

В этой работе, говоря «теоремы, техники и пр. (не) классической арифметики», мы подразумеваем «теоремы, техники и пр., основанные на (не) классической арифметике».

Множество алгебраических операций экстремально большое. Даже наложение дополнительных условий не делает его беспомощно малым. Представляется невероятным, чтобы группировка операций в арифметики не принесла пользы.²

Такая группировка технически удобна. Как только мысленно она произведена, напрашивается сам собою вопрос, не попробовать ли поработать с аналогами классической арифметики — функциями, уравнениями, матрицами, . . . Это позволяет нам работать не в вакууме тотальной новизны, когда нам непонятно что вообще делать, но иметь интеллектуальный и психологический комфорт опоры на привычные вещи. Сформулированный аргумент будем называть *аргументом естественного математического понимания* (АЕМП).

По сути, этих нескольких предложений АЕМП достаточно для мотивации идеи разнообразий. Кроме этого, автору, возможно, удалось обнаружить в опубликованных актуальных научных исследованиях указания на реальные приложения *функций разнообразия* — функций, снабженных неклассической арифметикой, конкретно, \mathbb{DR}_+ (арифметикой неотрицательных вещественных чисел). Мы не настаиваем на том, что в последующих примерах присутствует математика разнообразий, но утверждаем: проходить мимо такого сходства нельзя; параллели достаточно осязаемы, чтобы продолжать разработку теории разнообразий и идеи использования неклассических арифметик.

Прежде примеров, дополнительно к упомянутым функциям разнообразия, сформулируем несколько предложений: если уравнение содержит операции неклассической арифметики, то оно будет *уравнением разнообразия*; множество его решений, либо множество, либо последовательность значений функции разнообразия называется *разнообразием*. В уравнениях/функциях неклассических арифметик может быть несколько и допустима комбинация с \mathbb{CA} .

Графики из статей не обязательно функциональные, но это не является препятствием. Предметы исследований взяты из описаний статей. Какие из тем относятся к соответствию «график статьи — график разнообразия» автор не может указать, не являясь специалистом в областях перечисляемых публикаций.

- Ниже сходство участков графиков функций разнообразия f_8, f_9 (с. 48) с графиками из статей:

- (1) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01348-4/figures/11>, Extended Data Fig. 5.b из [1] — bacteriophages, high-throughput screening, synthetic biology;

²Ведь даже один набор из всего лишь четырех классических операций — сложения, вычитания, умножения, деления — дал нам колоссальную математику, которую мы хорошо знаем.

- (2) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04230-7>, (Перейти во вкладку «Figures»), Fig. 4.d (Xenografted...) из [2] — cell fate and cell lineage, developmental neurogenesis;
- (3) <https://www.nature.com/articles/s43587-021-00146-z/figures/11>, Extended Data Fig. 6 из [3] — alzheimer’s disease, transcriptional regulatory elements;
- (4) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01325-x/figures/8>, Extended Data Fig. 3.a из [4] — molecular engineering, phylogeny, population genetics;
- (5) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01261-w/figures/2>, Fig. 2.a из [5] — membrane proteins, single-molecule biophysics;
- (6) <https://www.nature.com/articles/s41398-021-01698-9/figures/3>, Fig. 3 из [6] — ADHD, psychology;
- (7) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04011-2/figures/2>, Fig. 2.e из [7] — Bose–Einstein condensates, quantum simulation.³

- Хотя ниже сходство довольно далекое, важно отметить, что DR-функции могут генерировать «стоячие» значения. Все три ссылки содержат вертикали, похожие на вертикали графиков функций $f_{12} - f_{14}$ (с. 50), f_{20} (с. 54), f_{21B} (с. 55) нашей работы. Чтобы увеличить число вертикальных точек, нужно просто уменьшить приращение x . Вы можете увидеть этот эффект на странице 55. Это одна и та же функция f_{21} с разными приращениями. Функция f_{12} дополнительно к вертикали точек имеет участки явного горизонтального расположения значений, видимого во всех трех ссылках блока ниже.

Заметим что ссылка 8 имеет поднятую горизонталь до трети вертикали; наша f_{12} также имеет поднятие горизонтали. Итак:

- (8) <https://www.nature.com/articles/s43587-021-00134-3/figures/15>, Extended Data Fig. 9.b из [8] — ageing, predictive markers;
- (9) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-04064-3/figures/4>, Extended Data Fig. 1 из [9] — computational models, genome-wide association studies, preventive medicine, risk factors;
- (10) <https://www.nature.com/articles/s41477-021-01003-y/figures/3>, Extended Data Fig. 1 из [10] — genomics, natural variation in plants.

- Далее: в f_{10} , f_{11} (с. 49) значения распределяются по квадратам. Такие функции позволяют симулировать случайное расположение квадратов. Объединив графики нескольких функций, мы получаем блочную структуру сходную с графиком из
- (11) <https://www.nature.com/articles/s41586-021-03923-3/figures/10>, Extended Data Fig. 7.d из [11] — heterogeneous catalysis, materials for energy and catalysis, process chemistry.

- Завершим серию сравнениями функций $f_{15A} - f_{18}$ с.с. 51–53 с

³Сходство будет более очевидным, если точки интервала от 100 до 300 рис. 2.e распрямить в горизонтальную полосу.

- (12) <https://www.nature.com/articles/s41592-021-01329-7/figures/14>,
Extended Data Fig. 8.c–f из [12] — Ca²⁺ imaging, mouse, neurophysiology,
visual system.

Исследователь не будет видеть зависимости неизвестные ему, поскольку сознательно или подсознательно он ищет опору в вещах известных. Другими словами, предоставление новых абстрактных паттернов (например, графиков разнообразий) откроет глаза исследователю на то, с чем он сталкивался, но не замечал.

Сказанное выше относилось к вещам, для которых в данной работе дано хотя бы малое, но осознание. Мы предполагаем, что неклассические арифметики позволят нам элементарными средствами получать объекты, возможные только для неэлементарных средств классической. Если мы не ошибаемся в нашем допущении,⁴ то это второй фундаментальный аргумент в пользу нашей идеи.

Отношения между арифметиками и их объектами, кроме сказанного, такие: в разных арифметиках могут существовать сущности, не имеющих аналогов друг у друга.

Нетрудно представить, если операция некоммутативная, то возникают ряды влево, т.е. ряды, в которых каждый следующий член дописывается слева, в отличие от ряда вправо. Суммы таких рядов могут быть не равны друг другу и мы получим сущность, аналога которой нет в классической арифметике. С другой стороны, могут существовать арифметики без сходящихся рядов вовсе.

2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ \mathbb{DR}_+

Еще больше плоти идее добавим определением конкретной арифметики, обозначаемой \mathbb{DR}_+ , которая не должна быть слишком простой, чтобы не быть лишней силы, но и не слишком сложной, чтобы нам не утонуть в ней, так и не дойдя до обнаружения применений. \mathbb{DR}_+ представляет собой конечное, но очень большое множество сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений, определенных для неотрицательных вещественных чисел (знак $+$ в обозначении).

Сложения и умножения выполнимы для любых неотрицательных вещественных чисел и \mathbb{R}_+ замкнуто относительно данных действий. Имеются всегда выполнимые левые и правые вычитания и деления на всем \mathbb{R}_+ , с тем чтобы результат был снова в \mathbb{R}_+ . Разумеется, от обратных действий ожидается восстановление аргументов прямых действий. Мы достигли этой цели в несколько специфическом смысле. В \mathbb{DR}_+ возможно сложение $4.5 \dot{+} 39.43 = 6.12$. Вычитание из 6.12 правого слагаемого 39.43 восстановит левое слагаемое 4.5: $6.12 \dot{-} 39.43 = 4.5$. Этого не случится с восстановлением правого слагаемого посредством вычитания из суммы левого: $6.12 \dot{-} 4.5 = 3.43 \neq 39.43$. Тем не менее, дописав один незначащий ноль к целым частям, мы получим аргументы сложения в точности — $06.12 \dot{-} 04.5 = 39.43$. Это связано с зависимостью

⁴Есть основания полагать, что многие элементарные DR-функции разрывны в конечных десятичных дробях, а значит не имеют элементарного эквивалента CA, поскольку элементарные функции последней непрерывны. Что функции могут иметь очень странные свойства можно найти, например, здесь: Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, Counterexamples in Analysis (Dover Books on Mathematics), ISBN-13: 978-0486428758

результата от обрамления незначащими нулями, которая выражается и в прямых действиях. Для примера $4.5 \dot{+}_i 39.43 \neq 0004.500 \dot{+}_i 0039.43000$. Аналогично обстоит дело с умножением/делением.

Данное обстоятельство не может быть основанием для дискредитации арифметики, поскольку классическая математическая практика не изгоняет, например, многозначный комплексный логарифм, но выделяет главное его значение и не запрещает пользоваться другими значениями логарифма для данного аргумента.

В общем случае действия некоммутативны, неассоциативны, умножения не дистрибутивны относительно сложения и не являются сокращенным сложением

$$a *_{k}^i n \neq \underbrace{a \dot{+}_k a \dot{+}_k \cdots \dot{+}_k a}_n$$

Существуют ли действия с противоположными свойствами, мы не отвечаем.

Определения действий устроены так, что для получения, например, сложения $\dot{+}_j$, отличного от сложения $\dot{+}_k$, нам достаточно лишь сменить таблицу ϕ_j подстановок сложения $\dot{+}_j$ на таблицу ϕ_k сложения $\dot{+}_k$. Таблицы действий вводимой арифметики похожи на таблицы обычных сложения $+$ и умножения \cdot . Сходство в смысле техники вычисления сложений из \mathbb{DR}_+ со сложением $+$ будет и в сложении цифр одного разряда, и в наличии переносов из разряда предшествующего вычисления; принципиально отличие в порядке прохождения вычисляемых разрядов — слева направо, а не справа налево. Такой порядок продиктован выполнимостью деления для данного умножения $*_a^m$ (m и a — идентификаторы таблиц умножения и сложения в умножении соответственно). Деление, как действие обратное умножению, оказалось легче организовать от начала чисел к концу. Соответственно оно зададо, каким быть умножению.

Порядок прохождения разрядов позволил налагать на таблицы подстановок очень немного ограничений для целей обратимости операций. Каждую таблицу T можно получить так: составим латинский квадрат F порядка 10 из цифр, затем составим квадрат F' того же порядка, но без требования быть латинским; теперь из значения a ячейки xy таблицы F и из значения b той же ячейки xy таблицы F' составим упорядоченное значение ab и внесем его в ячейку xy таблицы T ; произведя процедуру для всех ячеек, мы получим таблицу T , которую назовем *полулатинской*.⁵ На каждую таблицу F есть большое количество таблиц F' , а всех таблиц T — колоссальное число. Оно и есть мощность множества сложений (вычитаний, умножений, делений) арифметики \mathbb{DR}_+ . Следует упомянуть: определения действий таковы, что, заменив в них слово «цифра» на слово «2-слог», и заменив значения ячеек таблиц F , F' на упорядоченные пары цифр, затем, составив из них упорядоченную пару $abcd$ «двойных цифр» для таблицы $T^{(2)}$ мы легко получаем расширение арифметики на действия по таблицам типа $T^{(2)}$; аналогичным образом возможно получить действия по таблицам $T^{(3)}$, $T^{(4)}$ и вообще $T^{(k \rightarrow \infty)}$. Иначе говоря, наша арифметика допускает расширение на счетное число сложений и каждого из других действий.⁶

⁵Для необратимых сложения и умножения требование быть полулатинской является лишним.

⁶В данной работе мы ограничились типом $T^{(1)}$.

Чтобы арифметику сделать понятной широкому кругу, мы воспользовались способом наподобие школьных действий в «столбик». Это позволяет заинтересованному читателю не зависеть от знания конкретного математического формализма (машины Тьюринга, нормального алгоритма, конкретного языка программирования и пр.). Табличный формализм визуальностью, кажется, неплохо подошел для целей определения \mathbb{DR}_+ .

Ради избежания путаницы, далее будем словом «таблица» называть таблицу подстановок, а таблицу–«столбик», в которой выполняется действие будем называть *сеткой*.

Преимуществом определений действий можно считать тот факт, что вычитание (деление) выполняется ровно в той же сетке и по той же таблице, что и сложение (умножение). Это, по мнению автора, позволяет существенно экономить на изучении арифметики и доказательствах выполнимости действий.

Арифметические действия определены в работе явно, сама арифметика неявно представлена как совокупность этих действий. Никаких алгебраических или категорных подробностей не излагается. Заинтересованный читатель может взять любую функцию/уравнение по классической арифметике, и если они имеют смысл при замене обычного действия на действие из \mathbb{DR}_+ , он получит функцию/уравнение разнообразия. Скажем, квадратичная функция одной переменной в смысле функции разнообразия может выглядеть так:

$$y = a *_{\bar{1}}^3 x^2 +_{\bar{1}} b *_{\bar{2}}^3 x +_{\bar{2}} c,$$

где a, b, c могут равняться 0.

3. ОБЩИЕ СОГЛАШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Соглашение 3.1. Под десятичной записью неотрицательного действительного числа x будем понимать запись

$$x = x_n \dots x_1 x_0 . x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots,$$

в которой $x_n \dots x_1 x_0$ — цифры целой части, нумеруемые справа налево неотрицательными целыми числами, а $x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots$ — цифры дробной части, нумеруемые слева направо отрицательными числами, с минусом перенесенным для компактности наверх. Полагаем, что число 0 может записываться как конечная и как бесконечная десятичная дробь.

Соглашение 3.2. В пределах данной работы «целая часть числа» и «дробная часть числа» — это сокращение для «усечение до целой части числа» и «усечение до дробной части числа».

Для регулярного использования в нашей работе обозначим действительные числа

$$(3.1) \quad \mathbb{R}_+ \ni \begin{cases} g = g_{a'} \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots g_{b'} \dots, \\ h = h_{c'} \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots h_{d'} \dots, \\ p = p_{n'} \dots p_0 . p_{\bar{1}} \dots, \\ q = q_{e'} \dots q_0 . q_{\bar{1}} \dots q_{f'} \dots, \end{cases}$$

могущие начинаться незначащими нулями.

Определение 3.3. (неперенос и перенос) Если $G = \{0, \dots, 9\}$ — алфавит цифр, $G^2 = \{g_0 \bar{g}_0, \dots, g_{10^2} \bar{g}_{10^2}\}$ — множество пар цифр в алфавите G и $g \bar{g} \in G^2$, тогда g называется непереносом, а \bar{g} — переносом (в младший (правый) разряд).

ТАБЛИЦА 3.1. Таблица T арифметического действия \diamond_a .

\diamond_a	0	...	y	...	9
0	$g_{r_0}\bar{g}_{r_0}$...	$g_{r_1}\bar{g}_{r_1}$...	$g_{r_2}\bar{g}_{r_2}$
...
x	$g_{r_3}\bar{g}_{r_3}$...	$g_{r_4}\bar{g}_{r_4}$...	$g_{r_5}\bar{g}_{r_5}$
...
9	$g_{r_6}\bar{g}_{r_6}$...	$g_{r_7}\bar{g}_{r_7}$...	$g_{r_8}\bar{g}_{r_8}$

Определение 3.4. (таблица арифметического действия \diamond_a)

- (1) Положим в общем случае $g_r \neq \bar{g}_r$. Таблицей T арифметического действия $g_x \diamond_a g_y = g_{r_j}\bar{g}_{r_j} \in G^2$ будет таблица 3.1 на странице 7.
- (2) В случае, когда непереносы каждой строки (столбца) таблицы действия образуют все множество G , такая таблица называется полулатинской и обозначается SL .

Все таблицы В.1 страницы 56 — полулатинские.

Соглашение 3.5. (употребления слов «таблица», «сетка») Если в дальнейшем изложении мы будем подразумевать таблицу T действия, то будем говорить «таблица», а к ряду других таблиц, используемых в определениях сложений и умножений будем применять слово «сетка».

Определение 3.6. (выполнимая сетка) Сетка называется выполнимой, если она может быть заполнена по правилам заполнения данной сетки

Определение 3.7. (члены арифметического действия) Действительные числа g, h, p в выражении

$$g \diamond_a h = p$$

называются членами действия \diamond_a , первым, вторым и третьим соответственно.

Определение 3.8. (атом действия, атомарные уравнения) Выражение

$$r \diamond_a s = (t\bar{t})_{rs} = t\bar{t},$$

где $r, s \in G$ и $(t\bar{t})_{rs}$ — элемент ячейки rs таблицы T действия a называется атомом действия a (по таблице T). Если в данном выражении есть неизвестные, быть может, все, то имеем атомарное уравнение, при этом варианты

$$(3.2) \quad r \diamond_a s = x\bar{x},$$

$$(3.3) \quad y \diamond_a s = t\bar{x},$$

$$(3.4) \quad r \diamond_a z = t\bar{x},$$

с неизвестными x, \bar{x}, y, z называются прямым атомарным уравнением, левонезвестным атомарным и правонезвестным атомарным уравнениями соответственно.

По первому мы будем находить сумму или произведение цифр, по второму будем находить левую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель, по третьему — правую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель.

Определение 3.9. (решение атомарных уравнений) Решением уравнения 3.2 будет единственное $(t\bar{t})_{rs}$, т.е. $t\bar{t} = x\bar{x}$. Решением уравнения 3.3 будет всякое $(t\bar{t}')_{r's}$, которое найдется в столбце s , т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $y = r'$; иначе решения не существует. Решением уравнения 3.4 будет всякое $(t\bar{t}')_{rs'}$, которое найдется в строке r , т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $z = s'$; иначе решения не существует.

Предложим явный алгоритм решения двух последних уравнений тройки для случая, когда существует единственное решение.

Процедура 3.10. Для единственного решения уравнения 3.3 по таблице T :

- (1) зайти в столбец s таблицы T ;
- (2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с переносом t ;
- (3) \bar{t} положить решением переноса x ;
- (4) строку r , в которой находится найденное значение положить решением левой неизвестной цифры y .

Процедура 3.11. Для единственного решения уравнения 3.4 по таблице T :

- (1) зайти в строку r таблицы T ;
- (2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с переносом t ;
- (3) \bar{t} положить решением переноса x ;
- (4) столбец s , в котором находится найденное значение положить решением правой неизвестной цифры z .

Предложение 3.12. Уравнения 3.3, 3.4 разрешимы для любых r, s, t , если T есть SL -таблица. Кроме того, левонеизвестное и правонеизвестное уравнения точно восстанавливают аргументы прямого действия.

Доказательство. Доказательство следует прямо из определения: если в каждой строке и каждом столбце таблицы T существует любое $t \in G$, то уравнения разрешимы для любых r, s, t . Что касается восстановления аргументов прямого действия, то ясно: если выполняется условие полулатинской таблицы, то значение с таким началом находится только в строке r , и ни в какой другой, и в столбце s , и никаком другом. Следовательно, для левонеизвестного уравнения восстановится именно r , а для правонеизвестного — единственно s . \square

4. Действия

4.1. Сложения. Для сложения чисел нам потребуются подготовленные слагаемые.

Определение 4.1. (подготовленные для сложения слагаемые) Слагаемые g, h подготовлены для сложения, если для них выполнено:

- (1) в g, h отброшены незначущие нулевые цифры;
- (2) целые и дробные части выровнены нулевыми цифрами;

Например, имеем $g = 99.400000$, $h = 002.13$. Тогда (1) $g = 99.4$, $h = 2.13$, (2) $g = 99.40$, $h = 02.13$. Заметим, если бы мы не отбросили нули на первом шаге, то результат был бы другим: $g = 099.400000$, $h = 002.130000$.

Зачем числа подготовливаются? Если для обычного сложения верно

$$99.40 + 02.13 = 099.400000 + 002.130000,$$

то для вводимых сложений равенство может нарушиться, поскольку результат зависит от обрамления нулями:

$$99.40 +_a 02.13 \neq 099.400000 +_a 002.130000.$$

Это означало бы, вообще говоря, бесконечнозначность новых сложений, а подготовка дает нам однозначный результат.

На странице 56 находятся таблицы, используемые в дальнейших примерах. Их переносы — в точности латинские диагональные квадраты взяты из [13], а переносы — произвольные перестановки их строк. Собственно говоря, ячейки можно заполнять произвольными парами цифр, но для целей вычитания, выполнимого для любых неотрицательных действительных чисел, нам нужно, чтобы в каждой строке и каждом столбце существовал любой перенос из G .

Определение 4.2. (сложение начальных цифр) Пусть в последовательности сеток ниже: символ E_r — сетка, находящаяся с справа от него, черта $|$ в символе $= |$ показывает, что справа находится сетка, ϕ — таблица действия, $r, r - 1$ — номера разрядов, g_r, h_r — начальные цифры подготовленных к сложению чисел g, h из 3.1, точки «.» обозначают неизвестные цифры, необязательно равные, символ $= |$ обозначает равенство сеток слева и справа от него и $p_r m_{r-1} = g_r +_i h_r$ — решение прямого атомарного уравнения. Тогда последовательное заполнение сеток ниже есть сложение начальных цифр:

$$(4.1) \quad E_r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline r & | r-1 \\ \hline g_r & | \\ h_r & | \\ \hline & | . \\ \hline . & | \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline r & | r-1 \\ \hline g_r & | \\ h_r & | \\ \hline & | m_{r-1} \\ \hline . & | p_r \end{array} \right|$$

Определение 4.3. (сложение неначальных цифр) Пусть символы сеток ниже, совпадающие с символами из 4.1, обозначают то же самое, что и в 4.1, и, кроме того: g_n, h_n — неначальные цифры подготовленных чисел из 3.1, m_n — перенос из предыдущего разряда, а $l_n \bar{l}_{n-1} = g_n +_i h_n$, $p_n \bar{p}_{n-1} = l_n +_i m_n$, $m_{n-1} \bar{m}_{n-2} = \bar{l}_{n-1} +_i \bar{p}_{n-1}$ — решенные прямые атомарные уравнения, причем \bar{m}_{n-2} отброшен. Тогда последовательное заполнение указанными решениями сеток ниже есть сложение неначальных цифр:

$$(4.2) \quad D_n = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline n & | n-1 \\ \hline g_n & | \\ h_n & | \\ \hline . & | . \\ \hline m_n & | \\ \hline . & | . \\ \hline . & | . \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline n & | n-1 \\ \hline g_n & | \\ h_n & | \\ \hline l_n & | \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & | \\ \hline . & | . \\ \hline . & | . \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline n & | n-1 \\ \hline g_n & | \\ h_n & | \\ \hline l_n & | \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & | \\ \hline p_n & | \bar{p}_{n-1} \\ \hline . & | . \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & | \\ \hline n & | n-1 \\ \hline g_n & | \\ h_n & | \\ \hline l_n & | \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & | \\ \hline p_n & | \bar{p}_{n-1} \\ \hline & | m_{n-1} \end{array} \right|$$

Дополнительно введем для нена начального разряда равенство

$$\mathcal{D}_n = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \hline & m_{n-1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline m_n & m_{n-1} \\ \hline p_n & \end{array} \right| = \mathcal{E}_n.$$

Пример:

$$\mathcal{D}_1 = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline 6 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \cdot & 3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 0 & \\ \hline 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array} \right| = \mathcal{E}_1.$$

Предложение 4.4. *Сетки 4.3 ниже выполнимы.*

$$(4.3) \quad \mathcal{E}_r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ \hline h_r & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right|, \quad \mathcal{D}_n = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline m_n & \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \hline h_n & \\ \hline m_n & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right| = \mathcal{E}_n.$$

Это следует из разрешимости прямого атомарного уравнения: если известны аргументы действия, то результат определен.

Определение 4.5. (сетка сложения) Сеткой сложения подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип сложения цифр	\mathcal{E}_r	\mathcal{E}_{r-1}	\mathcal{E}_{r-2}	\dots	\mathcal{E}_0	$\mathcal{E}_{\bar{1}}$	\dots
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	\dots	0	$\bar{1}$ \dots
Левое слагаемое g	\dagger_i	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	\dots	g_0	$g_{\bar{1}}$ \dots
Правое слагаемое h		h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	\dots	h_0	$h_{\bar{1}}$ \dots
Строка переносов			m_{r-1}	m_{r-1}	\dots	m_0	$m_{\bar{1}}$ \dots
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	\dots	p_0	$p_{\bar{1}}$ \dots

где тип сложения — сложение начальных цифр (\mathcal{E}_r) или сложение нена начальных (\mathcal{E}_n) цифр.

Определение 4.6. (сложение действительных чисел, их сумма) Сложением \dagger_i действительных чисел $g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

по таблице 2 это выглядит так:

$$\frac{\begin{array}{c} 0 \\ g \\ h \\ \cdot \end{array}}{\cdot} \quad | = | \quad \frac{\begin{array}{c} 0 \\ g \\ h \\ p \end{array}}{p} \quad | = | \quad \frac{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \cdot \end{array}}{\cdot} \quad | = | \quad \frac{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{array}}{1}$$

Теорема 4.8. Сложение $+_i$ определено для любых $g, h \in \mathbb{R}_+$, причем $g +_i h = p \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Из 4.4 следует выполнимость E_r . Мы получили перенос m_{r-1} для разряда $r - 1$, следующего за начальным r , таким образом, у нас есть все аргументы для выполнимости \mathcal{E}_n при $n = r - 1$. Предположим, что выполнены сетки по разряд d . Это значит, что известен перенос m_{d-1} . Следовательно сетка \mathcal{E}_{d-1} выполнима. И наконец, процедура сложения любой паре цифр g_f, h_f слагаемых всегда сопоставляет цифру $p_f \in G$, давая запись—действительное число. \square

4.2. Вычитания. Введем обозначения для вычитаний, если $g +_i h = p$:

$$\begin{aligned} p \overleftarrow{-}_i g = h & \quad \text{— левое вычитание или вычитание левого слагаемого,} \\ p \overrightarrow{-}_i h = g & \quad \text{— правое вычитание или вычитание правого слагаемого.} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left. \begin{array}{l} p \overleftarrow{-}_i g = h \\ p \overrightarrow{-}_i h = g \end{array} \right\} \text{— вычитание без различения стороны.}$$

Мы перенесли привычный порядок членов обычного вычитания на наши вычитания; терминологию построили по принципу теории бинарных систем, но обращаем внимание, что в литературе используется другой порядок членов. Например, BRUCK [14] приводит:

In a halfquasigroup G , left-division (\backslash) and right-division ($/$) are defined by the requirement that the equations $ab = c$, $a \backslash c = b$, $c/b = a$ are equivalent; all hold or none hold.

Нам представляется более важным сохранить преемственность с обычным вычитанием, в перспективе использования вычитаний во всех алгебраических выражениях с обычным сложением и умножением, хотя бы это и вносило некоторую долю разночтения.

Определение 4.9. (подготовленные члены вычитания) Числа p , и $f = g \vee h$ называются подготовленными к вычитанию $\overleftarrow{-}_i$ по сложению $+_i$, если они прошли подготовку в определении 4.1, в которой символы g, h заменены символами p, f .

Начнем определения с вычитания левых начальных и неначальных цифр.

Предложение 4.12. *Сетки 4.4, 4.5 для любых $p_u, m_u, g_u, u = r \vee n$ выполняемы если ϕ является SL -таблицей.*

Это тривиально следует из условий разрешимости атомарных уравнений.

Определение 4.13. (сетка вычитания левого слагаемого) Сеткой левого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр	F_r^l	\mathcal{F}_{r-1}^l	\mathcal{F}_{r-2}^l	\dots	\mathcal{F}_0^l	$\mathcal{F}_{\bar{1}}^l$	\dots
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	\dots	0	$\bar{1}$ \dots
Левое слагаемое g	$\dagger_{\bar{i}}$	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	\dots	g_0	$g_{\bar{1}}$ \dots
Правое слагаемое h		\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\dots
Строка переносов			\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\dots
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	\dots	p_0	$p_{\bar{1}}$ \dots

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F_r^l) или вычитание неначальных (\mathcal{F}_n^l) цифр.

Определение 4.14. (левое вычитание действительных чисел, их разность) Левым вычитанием (вычитанием левого слагаемого) $p \underset{\bar{i}}{\dashv} g = h$ для действительных чисел $p, g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

- (1) подготовить числа p, g ;
- (2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $F_r^l = g_r \dagger_{\bar{i}} h_r = p_r m_{r-1}$; цифра h_r есть r -ая цифра результата h ; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
- (3) для всех следующих вправо цифр $p_{n < r}, g_{n < r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}_n^l = \mathcal{S}_n^l = (g_n \dagger_{\bar{i}} h_n) \dagger_{\bar{i}} m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами h_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
- (4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $h = h_r h_{r-1} \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \underset{\bar{i}}{\dashv} g = h$.

Приведем пример вычитания $31.1900 \underset{\bar{i}}{\dashv} 99.8000$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \underset{\bar{i}}{\dashv} 99.8$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \underset{\bar{i}}{\dashv} 99.80$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.15. *Левое вычитание чисел $31.19 \underset{\bar{i}}{\dashv} 99.80 = 04.57$.*

$F_1^l \mathcal{F}_0^l \mathcal{F}_{\bar{1}}^l \mathcal{F}_{\bar{2}}^l$	$F_{\bar{1}}^l$	\mathcal{S}_0^l	$\mathcal{S}_{\bar{1}}^l$	$\mathcal{S}_{\bar{2}}^l$	$F_1^l \mathcal{F}_0^l \mathcal{F}_{\bar{1}}^l \mathcal{F}_{\bar{2}}^l$
$\underline{2\ 1\ 0 \bar{1}\ \bar{2}}$	$\underline{1 0}$	$\underline{0 \bar{1}}$	$\underline{\bar{1} \bar{2}}$	$\underline{\bar{2} \bar{3}}$	$\underline{2\ 1\ 0 \bar{1}\ \bar{2}}$
$\dagger_{\bar{i}} \underline{9\ 9 8\ 0}$	$\underline{9 }$	$\underline{9 }$	$\underline{8 }$	$\underline{0 }$	$\dagger_{\bar{i}} \underline{9\ 9 8\ 0}$
$\underline{\cdot \cdot \cdot}$	$\underline{0 }$	$\underline{4 }$	$\underline{5 }$	$\underline{7 }$	$\dagger_{\bar{i}} \underline{0\ 4 5\ 7}$
$\underline{\cdot \cdot \cdot}$	$\underline{ 2}$	$\underline{0 6}$	$\underline{6 9}$	$\underline{5 2}$	$\underline{2 6\ 4}$
$\underline{3\ 1 1\ 9}$	$\underline{3 }$	$\underline{2 }$	$\underline{6 }$	$\underline{4 }$	$\underline{3\ 1 1\ 9}$
		$\underline{1 9}$	$\underline{1 6}$	$\underline{9 7}$	
		$\underline{ 6}$	$\underline{ 4}$	$\underline{ 1}$	

Или подробнее для F_1^l, \mathcal{F}_0^l в терминах преобразований сеток:

$$\frac{\frac{F_1^l}{2|} \quad \frac{F_1^l}{1|0}}{9|} = \frac{\frac{F_1^l}{2|} \quad \frac{F_1^l}{1|0}}{9|}$$

$$\frac{\cdot|}{3|} \quad \frac{0|}{3|}$$

$$\frac{\mathcal{F}_0^l}{2|} \quad \frac{S_0^l}{2|} \quad \frac{S_0^l}{0|\bar{1}} \quad \frac{S_0^l}{0|\bar{1}} \quad \frac{S_0^l}{0|\bar{1}} \quad \frac{\mathcal{F}_0^l}{2|}$$

$$\frac{0|\bar{1}}{9|} \quad \frac{0|\bar{1}}{9|} \quad \frac{0|\bar{1}}{9|} \quad \frac{0|\bar{1}}{9|} \quad \frac{0|\bar{1}}{9|} \quad \frac{0|\bar{1}}{9|}$$

$$\frac{\cdot|}{2|} \quad \frac{\cdot|}{2|} \quad \frac{0|\cdot}{2|} \quad \frac{4|}{0|6} \quad \frac{4|}{0|6} \quad \frac{4|}{2|6}$$

$$\frac{1|}{1|} \quad \frac{1|\cdot}{2|} \quad \frac{1|9}{2|} \quad \frac{1|9}{2|} \quad \frac{1|9}{2|} \quad \frac{1|}{1|}$$

$$\frac{\cdot|}{1|} \quad \frac{\cdot|}{1|} \quad \frac{\cdot|}{1|} \quad \frac{\cdot|}{1|} \quad \frac{\cdot|}{1|} \quad \frac{\cdot|}{1|}$$

Определение 4.16. (правое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.1. Тогда восстановление сетки сложения начальных цифр

$$(4.6) \quad F_r^r = \frac{\frac{\phi|}{r|r-1} \quad \frac{\phi|}{r|r-1}}{h_r|} = \frac{\frac{\phi|}{r|r-1} \quad \frac{\phi|}{r|r-1}}{h_r|} = E_r$$

$$\frac{\cdot|}{p_r|} \quad \frac{m_{r-1}}{p_r|}$$

решением левонезвестного уравнения $g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание правых начальных цифр.

Определение 4.17. (правое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$S_n^r = \frac{\frac{\phi|}{n|n-1} \quad \frac{\phi|}{n|n-1} \quad \frac{\phi|}{n|n-1} \quad \frac{\phi|}{n|n-1}}{h_n|} = \frac{\frac{\phi|}{n|n-1} \quad \frac{\phi|}{n|n-1} \quad \frac{\phi|}{n|n-1} \quad \frac{\phi|}{n|n-1}}{h_n|}$$

$$\frac{\cdot|}{l_n|} \quad \frac{g_n|}{l_n|\bar{l}_{n-1}} \quad \frac{g_n|}{l_n|\bar{l}_{n-1}} \quad \frac{g_n|}{l_n|\bar{l}_{n-1}}$$

$$\frac{m_n|}{p_n|} \quad \frac{m_n|}{p_n|\bar{p}_{n-1}} \quad \frac{m_n|}{p_n|\bar{p}_{n-1}} \quad \frac{m_n|}{p_n|\bar{p}_{n-1}}$$

$$\frac{\cdot|}{\cdot|} \quad \frac{\cdot|}{\cdot|} \quad \frac{\cdot|}{\cdot|} \quad \frac{\cdot|}{\cdot|}$$

последовательными решениями уравнений: левонезвестного $l_n +_i m_n = p_r \bar{p}_{n-1}$, левонезвестного $g_n +_i h_n = l_r \bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} +_i \bar{p}_{n-1} = m_{n-1} \bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание правых неначальных цифр.

Пример

$$\mathcal{S}_1^r = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \cdot & \\ \hline 0 & \\ \cdot & \cdot \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & \cdot \\ \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \cdot & \\ \hline 0 & \\ 0 & \cdot \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cdot & 3 \\ \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \cdot & \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 6 & 3 \\ \hline 5 & \\ \cdot & \end{array} \right| = \mathcal{E}_1.$$

Как для сложения и левого вычитания нам понадобится

$$(4.7) \quad \mathcal{S}_n^r = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \cdot & \\ \hline h_n & \\ \cdot & \cdot \\ \hline m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \cdot & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \cdot & \\ \hline h_n & \\ \cdot & \cdot \\ \hline m_n & \cdot \\ \hline p_n & \\ \cdot & \end{array} \right| = \mathcal{F}_n^r.$$

Предложение 4.18. *Сетки 4.6, 4.7 для любых $p_u, m_u, h_u, u = r \vee n$ выполняемы если ϕ является SL -таблицей.*

Почему так происходит, мы объясняли в левом случае.

Определение 4.19. (сетка вычитания правого слагаемого) Сеткой правого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр	\mathcal{F}_j	\mathcal{F}_r^r	\mathcal{F}_{r-1}^r	\mathcal{F}_{r-2}^r	\dots	\mathcal{F}_0^r	\mathcal{F}_1^r	\dots
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	\dots	0	$\bar{1}$	\dots
Левое слагаемое g	$\bar{+}_i$	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\dots
Правое слагаемое h	$\bar{+}_i$	h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	\dots	h_0	$h_{\bar{1}}$	\dots
Строка переносов		\cdot	\cdot	\dots	\cdot	\cdot	\cdot	\dots
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	\dots	p_0	$p_{\bar{1}}$	\dots

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (\mathcal{F}_r^r) или вычитание неначальных (\mathcal{F}_n^r) цифр.

Определение 4.20. (правое вычитание действительных чисел, их разность) Правым вычитанием (вычитанием правого слагаемого) $p \bar{-}_i h = g$ для действительных чисел $p, h, g \geq 0$ будет выполнение шагов:

- (1) подготовить числа p, h ;
- (2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $\mathcal{F}_r^r = g_r \bar{+}_i h_r = p_r m_{r-1}$; цифра g_r есть r -ая цифра результата g ; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
- (3) для всех следующих вправо цифр $p_{n < r}, h_{n < r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}_n^r = \mathcal{S}_n^r = (g_n \bar{+}_i h_n) \bar{+}_i m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами

g_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;

(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $g = g_r g_{r-1} \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \bar{\cdot} h = g$.

Приведем пример вычитания $31.1900 \bar{\cdot} 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \bar{\cdot} 4.57$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \bar{\cdot} 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.21. Правое вычитание чисел $31.19 \bar{\cdot} 04.57 = 99.80$.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{c} F_1^r F_0^r \\ \hline 2 \ 1 \ 0 \ | \ 1 \ 2 \\ \hline \cdot \cdot \ | \cdot \cdot \\ \hline \bar{\cdot} 0 \ 4 \ | \ 5 \ 7 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline 3 \ 1 \ | \ 1 \ 9 \end{array} & \begin{array}{c} F_1^r \\ \hline 1 \ | \ 0 \\ \hline 9 \ | \\ \hline 0 \ | \\ \hline 2 \ | \\ \hline 3 \ | \end{array} & \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline 9 \ | \\ \hline 4 \ | \\ \hline 0 \ | \ 6 \\ \hline 2 \ | \\ \hline 1 \ | \ 9 \\ \hline 6 \ | \end{array} & \begin{array}{c} S_1^r \\ \hline 1 \ | \ 2 \\ \hline 8 \ | \\ \hline 5 \ | \\ \hline 6 \ | \ 9 \\ \hline 6 \ | \\ \hline 1 \ | \ 6 \\ \hline 4 \ | \end{array} & \begin{array}{c} S_2^r \\ \hline 2 \ | \ 3 \\ \hline 0 \ | \\ \hline 7 \ | \\ \hline 5 \ | \ 2 \\ \hline 4 \ | \\ \hline 9 \ | \ 7 \\ \hline 1 \ | \end{array} & \begin{array}{c} F_1^r F_0^r | F_1^r S_2^r \\ \hline 2 \ 1 \ 0 \ | \ 1 \ 2 \\ \hline 9 \ 9 \ | \ 8 \ 0 \\ \hline \bar{\cdot} 0 \ 4 \ | \ 5 \ 7 \\ \hline 2 \ | \ 6 \ 4 \\ \hline 3 \ 1 \ | \ 1 \ 9 \end{array}
 \end{array}$$

Или подробнее для F_1^r, F_0^r в терминах преобразований сеток:

$$\begin{array}{c} F_1^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 1 \ | \ 0 \\ \hline \cdot \ | \\ \hline 0 \ | \\ \hline \cdot \ | \\ \hline 3 \ | \end{array} = \begin{array}{c} F_1^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 1 \ | \ 0 \\ \hline 9 \ | \\ \hline 0 \ | \\ \hline 2 \ | \\ \hline 3 \ | \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F_0^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline \cdot \ | \\ \hline 4 \ | \\ \hline 2 \ | \cdot \\ \hline 1 \ | \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline \cdot \ | \\ \hline 4 \ | \\ \hline \cdot \ | \cdot \\ \hline 1 \ | \cdot \\ \hline \cdot \ | \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline \cdot \ | \\ \hline 4 \ | \\ \hline 0 \ | \cdot \\ \hline 2 \ | \\ \hline 1 \ | \ 9 \\ \hline \cdot \ | \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline 9 \ | \\ \hline 0 \ | \ 6 \\ \hline 2 \ | \\ \hline 1 \ | \ 9 \\ \hline \cdot \ | \end{array} = \begin{array}{c} S_0^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline 9 \ | \\ \hline 0 \ | \ 6 \\ \hline 0 \ | \ 6 \\ \hline 2 \ | \\ \hline 1 \ | \ 9 \\ \hline \cdot \ | \end{array} = \begin{array}{c} F_0^r \\ \hline 2 \ | \\ \hline 0 \ | \ 1 \\ \hline 9 \ | \\ \hline 4 \ | \\ \hline 2 \ | \ 6 \\ \hline 1 \ | \end{array}$$

Теорема 4.22. (1) Если для любых $p, f \in \mathbb{R}_+$ выполнимо $p \bar{\cdot} f = d$, то $d \in \mathbb{R}_+$.

(2) Если таблица ϕ — полулатинская (SL), то $p \bar{\cdot} f = d_1$ и $p \bar{\cdot} f = d_2$ выполнимы одновременно для любых $p, f \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. (1) Если вычитание выполнимо, то оно цифрам аргументов p, f разряда k ставит в соответствие цифру результата d того же разряда, а поскольку $p, f \in \mathbb{R}_+$, то $d \in \mathbb{R}_+$.

(2) Условия выполнимости F, \mathcal{F} -сеток рассмотрены в предложениях 4.12, 4.18.

Доказательство. Рассмотрим случай

$$\frac{\begin{array}{c|cccc} g +_i h = p & & & & \\ \hline \phi & r & r-1 & \dots & 0 \\ \hline +_i & g_r g_{r-1} \dots g_0 & & & \\ & h_r h_{r-1} \dots h_0 & & & \\ & m_{r-1} \dots m_0 & & & \\ \hline p_r p_{r-1} \dots p_0 & & & & \end{array}}{\quad} = \frac{\begin{array}{c|cccc} p \bar{-}_i g & & & & \\ \hline \phi & r & r-1 & \dots & 0 \\ \hline +_i & g_r g_{r-1} \dots g_0 & & & \\ & . & . & \dots & . \\ & . & \dots & . & \\ \hline p_r p_{r-1} \dots p_0 & & & & \end{array}},$$

когда целые части подготовленных главных членов вычитания совпадают с частями одноименных членов сложения. Если в любой строке $g_r \in G$ таблицы ϕ любое начало $p_r \in G$ значения ячейки встречается только однажды,⁷ то оно будет в столбце h_r и никаком другом. Распространяя это рассуждение на неначальные разряды с должными заменами слов «строка v » на слово «столбец w » и наоборот, мы придем к заключению, что в $p \bar{-}_i g = h$ восстанавливается целая часть $h_r h_{r-1} \dots h_0$ и только она.

По ходу наших рассуждений для неначальных цифр, мы должны были заметить еще одно: если сложение имеет перенос m_s то такой же перенос будет иметь вычитание в разряде s . Следовательно, и дробная часть числа $h_{\bar{1}} h_{\bar{2}} \dots h_{\bar{y}}$ восстанавливается вычитанием однозначно.

Аналогичный результат получаем для правого вычитания.

Когда подготовка главных аргументов вычитания дает более короткие, чем в сложении, целые части (первые две сетки) —

$$\frac{\begin{array}{c|cccc} g +_i h = p & & & & \\ \hline \phi & r & r-1 & \dots & k \dots 0 \\ \hline +_i & g_r g_{r-1} \dots g_k \dots g_0 & & & \\ & h_r h_{r-1} \dots h_k \dots h_0 & & & \\ & m_{r-1} \dots m_k \dots m_0 & & & \\ \hline p_r p_{r-1} \dots p_k \dots p_0 & & & & \end{array}}{\quad} = \frac{\begin{array}{c|cccc} p \bar{-}_i g & & & & \\ \hline \phi & k & k-1 & \dots & 0 \\ \hline +_i & g_k g_{k-1} \dots g_0 & & & \\ & . & . & \dots & . \\ & . & \dots & . & \\ \hline p_k p_{k-1} \dots p_0 & & & & \end{array}}{\quad} = \frac{\begin{array}{c|cccc} g +_i h = p & & & & \\ \hline \phi & r & r-1 & \dots & k \dots 0 \\ \hline +_i & 0_r 0_{r-1} \dots g_k \dots g_0 & & & \\ & h_r h_{r-1} \dots h_k \dots h_0 & & & \\ & m_{r-1} \dots m_k \dots m_0 & & & \\ \hline 0_r 0_{r-1} \dots p_k \dots p_0 & & & & \end{array}}$$

— то p и g начинаются нулями (третья сетка). Значит, дописав нужное число нулей спереди к подготовленным главным аргументам вычитания, мы получим записи, идентичные записям одноименных членов сложения; для них мы повторяем доказательство первой части.

Повтором имеющихся приемов к дробным частям и правому вычитанию мы завершим доказательство теоремы. \square

4.3. Умножения. Умножение будет обозначаться либо символом $*^i_j$, либо \cdot^i_j , когда последний будет удобнее для чтения.

4.3.1. Подготовка чисел к умножению. Подготовка определит, сколько будет цифр в сомножителях перед умножением и количество цифр в будущем произведении и из множества представлений сомножителей, обрамленных незначащими нулями, выберет одно, чем задаст однозначность умножения.

Процедура 4.26. Для чисел 3.1:

- (1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей сомножителей, получив $g_{a \leq a'}$, $h_{c \leq c'}$ — старшие значащие цифры, $g_{b'' \geq b'}$, $h_{d'' \geq d'}$ — младшие значащие цифры конечных дробей;

⁷Это эквивалентно условию теоремы, что имеем SL-таблицу.

- (2) посчитать номер
- e
- старшей цифры
- q_e
- целой части произведения
- q
- :

$$e = a + c + 1;$$

- (3) если хотя бы один сомножитель является бесконечной дробью, перейти к шагу 5, иначе посчитать длину
- L
- выравнивания подготовленных членов как

$$L = \max\{a + |b''| + 1, c + |d''| + 1, e + 1 = a + c + 2\};$$

- (4) выровнять второй сомножитель по длине
- L
- , в дробной части дописывая незначащие нули, получив

$$(4.8) \quad \begin{cases} g = \underbrace{g_a \dots g_0 \cdot g_{\bar{1}} \dots g_b}_L, \\ h = \underbrace{h_c \dots h_0 \cdot h_{\bar{1}} \dots h_d}_L, \\ q = \underbrace{q_e \dots q_0 \cdot q_{\bar{1}} \dots q_f}_{L} \end{cases}$$

и остановив подготовку членов умножения;

- (5) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$(4.9) \quad \begin{cases} g = g_a \dots g_0 \cdot g_{\bar{1}} \dots, \\ h = h_c \dots h_0 \cdot h_{\bar{1}} \dots, \\ q = \underbrace{q_e \dots q_0}_{a+c+2} \cdot q_{\bar{1}} \dots \end{cases}$$

завершить подготовку членов умножения.

Определение 4.27. (символы подготовки) Символы a, b, c, d, e, f из процедуры 4.26 называются символами подготовки к умножению, L — длиной выравнивания, а числа g, h, q после данной процедуры — подготовленными членами умножения.

Пусть требуется умножить $g *_j^i h = 00.120 *_j^i 034.5670 = q$. Запишем в таблицах ниже левый сомножитель вверху, правый посередине, результат будет размещаться ниже под чертой:

A	B	C	D
$43210 \bar{1}234\bar{5}$	$43210 \bar{1}234\bar{5}$	$43210 \bar{1}234\bar{5}$	$43210 \bar{1}234\bar{5}$
$g *_j^i \quad 00 120$	$*_j^i \quad 0 12$	$*_j^i \quad 0 12$	$*_j^i \quad 0 1200$
$h *_j^i \quad 034 5670$	$*_j^i \quad 34 567$	$*_j^i \quad 34 567$	$*_j^i \quad 34 567$
q		$\dots $	$\dots \dots$

Выполняем отбрасывание незначащих нулей, получая в примере $0.12 *_j^i 34.567$ (колонка B). Следующим шагом будет вычисление номера разряда старшей цифры целой части произведения сложением $2 = 1 + 0 + 1$ (в примере в колонке C отметили ее и всю целую часть точками). Длина выравнивания равняется $L = \max\{0 + | - 2 | + 1, 1 + | - 3 | + 1, 2 + 1\} = 5$. В D подготовка конечных дробей закончена дописыванием 00 у g , дописыванием двух точек у q .

Если бы хотя бы один сомножитель был бесконечной дробью, например, $00.12 *_j^i 034.(5)$, то после вычисления e мы перешли бы к дополнению другого

сомножителя до бесконечной дроби дописыванием незначащих нулей с получением

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3} \dots} \\ g^{*^i} \quad 00 \overline{)12} \\ h^{*^j} \quad 034 \overline{)555 \dots} \\ \hline q \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3} \dots} \\ \quad \quad 0 \overline{)12} \\ \quad \quad *^i_j \quad 34 \overline{)555 \dots} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3} \dots} \\ \quad \quad 0 \overline{)12} \\ \quad \quad *^i_j \quad 34 \overline{)555 \dots} \\ \hline \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3} \dots} \\ \quad \quad 0 \overline{)120 \dots} \\ \quad \quad *^i_j \quad 34 \overline{)555 \dots} \\ \hline \dots \end{array}$

Произведение q тоже будет бесконечной дробью. А подготовленные к умножению одноразрядные сомножители-числа не требуют отбрасывания незначащих нулей — пустая B — и дадут

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3}\bar{4}\bar{5}} \\ g^{*^i} \quad 0 \overline{)} \\ h^{*^j} \quad 4 \overline{)} \\ \hline q \end{array}$		$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3}\bar{4}\bar{5}} \\ \quad \quad 0 \overline{)} \\ \quad \quad *^i_j \quad 4 \overline{)} \\ \hline \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \overline{)1\bar{1}2\bar{3}\bar{4}\bar{5}} \\ \quad \quad 0 \overline{)0} \\ \quad \quad *^i_j \quad 4 \overline{)0} \\ \hline \dots \end{array}$

поскольку $e = 0 + 0 + 1$, $L = \max\{0 + |0| + 1, 0 + |0| + 1, 1 + 1\} = 2$

4.3.2. *Умножение.* Как в обычном умножении, мы сначала будем перемножать цифры одного слагаемого на второе слагаемое, а затем складывать полученные произведения, используя модификацию сложения.

Определение 4.28. (сетка c -сложения) Пусть c, d, m, p — (непрерывные) последовательности десятичных цифр, занумерованных целыми числами, представленные в таблице ниже:

Тип сложения цифр		E_{u-1}	\mathcal{E}_{u-2}	\mathcal{E}_{u-3}	\dots
Таблица, номера разрядов	$\phi \quad t \in \mathbb{Z} \quad \dots \quad u$	$u-1$	$u-2$	$u-3$	\dots
Запись c	$c_t \quad \dots \quad c_u$	c_{u-1}	c_{u-2}	c_{u-3}	\dots
Запись d	\vdash_ϕ	d_{u-1}	d_{u-2}	d_{u-3}	\dots
Переносы m			m_{u-2}	m_{u-3}	\dots
Запись p	$c_t \quad \dots \quad c_u$	p_{u-1}	p_{u-2}	p_{u-3}	\dots

Тогда таблица выше называется сеткой c -сложения $c \vdash_\phi d$ записей c и d .

Примечание 4.29. (о сносимых цифрах) Сносимые цифры будут иметь другие обозначения, продиктованные именем строки, в которой они находятся.

Определение 4.30. (c -сложение, c -сумма) Заполнение сетки c -сложения по шагам:

- (1) символы $c_t \dots c_u$, из которых все или некоторые, быть может, равны нулю, для которых нет соответственных символов $d_t \dots d_u$ записать в строку p ;
- (2) для разряда $u - 1$ выполнить сложение начальных цифр E_{u-1} , записывая результат $c_{u-1} \vdash_\phi d_{u-1} = p_{u-1} m_{u-2}$ в строки p, m , столбцы $u - 1, u - 2$ соответственно;
- (3) начиная с разряда $u - 2$ выполнить сложение неначальных цифр \mathcal{E} , записывая результат $c_{u-n} \vdash_\phi d_{u-n} = p_{u-n} m_{u-n-1}$ в строки p, m , столбцы $u - n, u - n - 1$ соответственно;

— называется c -сложением записей c, d , запись p называется c -суммой данных записей, а символы $c_t \dots c_u$ — сносимые (в c -сумму) цифры, называемые так же поднимаемыми (из c -суммы) цифрами,

Оно определено не только для чисел, но и для «псевдоцифр» — непрерывных последовательностей десятичных цифр, с начальным разрядом-целым числом.

Примеры этого действия будут в примере умножения.

Определение 4.31. (умножение цифр сомножителей, их произведение) Если g_v, h_w — цифры правого и левого сомножителей g и h из 3.1, то взятие значения $(Q\bar{Q})_{g_v h_w}$ из ячейки $g_v h_w$ таблицы T и присвоение подындкса $v + w + 1$ для Q , подындкса $v + w$ для \bar{Q} и надындкса v обеим цифрам значения ячейки называется умножением данных цифр, а значение ячейки — их произведением. Все вместе обозначается

$$(4.10) \quad g_v *^i_j h_w = (Q\bar{Q})_{g_v h_w} = Q_{v+w+1}^v \bar{Q}_{v+w}^v.$$

Например, имеем $4.5 = 4_0.5_1$, $39 = 3_1 9_0$. Тогда

$$5_1 *^3_j 3_1 = (06)_{53} = 0_{-1+1+1}^1 6_{-1+1}^1 = 0_1^1 6_0^1.$$

Определение 4.32. (сетка умножения цифры на сомножитель) Если g_v цифра левого сомножителя g и h из 3.1 — правый сомножитель, c — номер старшей цифры числа h , $t = v + c$ то таблица ниже

	Тип сложения цифр	$t+1$	E_t	E_{t-1}	E_{t-2}	...
	Номера разрядов		t	$t-1$	$t-2$...
блок v	q^v — непереносы по $*^i_j$	Q_{t+1}^v	Q_t^v	Q_{t-1}^v	Q_{t-1}^v	...
	\bar{q}^v — переносы по $*^i_j$		Q_t^v	Q_{t-1}^v	Q_{t-2}^v	...
	m^v — переносы по \dagger_j			M_{t-1}^v	M_{t-2}^v	...
	$p^v = q^v \dagger_j \bar{q}^v = g_v *^i_j h$	Q_{t+1}^v	P_t^v	P_{t-1}^v	P_{t-2}^v	...

называется сеткой умножения $g_v *^i_j h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h .⁸

Определение 4.33. (умножение цифры на сомножитель) Умножением $g_v *^i_j h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h называется заполнение сетки умножения из определения 4.32 по шагам:

- (1) умножить цифру g_v на каждую цифру $h_{w \leq c}$ правого сомножителя h и неперенос Q_{v+w+1}^v произведения 4.10 записать в строку q^v , столбец $v + w + 1$ сетки, а перенос \bar{Q}_{v+w}^v — в строку \bar{q}^v , в столбец $v + w$;
- (2) выполнить c -сложение строк q^v, \bar{q}^v ;

Строка $p^v = Q_{t+1}^v P_t^v P_{t-1}^v P_{t-2}^v \dots$ есть произведение $g_v *^i_j h$ (незначащие нули сохраняются).

⁸Иногда идентификатором i умножения будет выступать идентификатор таблицы умножения, используемого в данном умножении $*^i_j$.

Пример 4.34. Умножение $5_1 *^3_1 1_1 9_0 . 7_1 5_2$ по таб. 3 со сложением по таб. 1.

		Номера разрядов			
		3	2	1	0
1	q^1	6	1	2	9
	\bar{q}^1		1	2	9
	m^1			4	7
	$p^1 = 5_1 *^3_1 1_1 9_0 . 7_1 5_2$	=	6	1	3

Далее определяем сетку умножения чисел.

Определение 4.35. (сетка умножения чисел-конечных дробей) Сетка 4.1 на странице 24 умножения $g *^i_j h$ чисел-конечных дробей состоит:

- (1) строка -1 — идентификаторы таблицы умножения λ и таблицы сложения ϕ , номера разрядов; строка 0 — символы подготовки; строки $1 - 3$ — подготовленные члены умножения (цифры q_s произведения q неизвестны); строка 3 носит вспомогательную функцию, предназначенную, прежде всего, для деления;
- (2) ниже идет блок 2 вычислений произведений цифр $g_k *^i_j h = p^k, a \geq k \geq b$; блок 2 — это последовательность сверху вниз подблоков $a, a-1, \dots, b+1, b$ из определения 4.32;
- (3) ниже идет блок Σ последовательного суммирования произведений $g_k *^i_j h = p^k$ из блока 2 ; верхняя его строка $\Sigma^a = p^a$ составляет однострочный блок $\binom{a}{a}$, а всякий остальной блок $\binom{a}{k}, k < a$, состоит из трех строк: p^k — копии одноименной строки блока $2, n^k$ — строки переносов s -сложения $\Sigma^{k+1} +_i p^k = \Sigma^k$, и, собственно, Σ^k — строки упомянутой s -суммы.

Символы разрядов $u < f$ всех строк блоков $2, \Sigma$ не записываются.

На странице 25 приводим сетку 4.2 вместе с примером умножения.

Определение 4.36. (умножение чисел-конечных дробей, их произведение) Умножение конечных дробей $g *^i_j h = q$ — это выполнение шагов:

- (1) подготовить члены-конечные дроби умножения g, h, q ;
- (2) определить таблицы λ, ϕ ;
- (3) выполнить умножение $g_k *^i_j h, a \leq k \leq b$ цифры g_k левого сомножителя g на правый сомножитель h для всех k и вписать результат в блок k ;
- (4) последовательно в блоках $\binom{a}{a-1}, \dots, \binom{a}{b}$ выполнять s -сложения полученных произведений p^a, \dots, p^b :

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a +_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} +_i p^{a-2}, \quad \dots, \quad \Sigma^b = \Sigma^{b+1} +_i p^b.$$

Число $\Sigma^b = q$ есть произведение чисел-конечных дробей g, h .

Разбираем пример $0060.21 *^i_j 0.243$ страницы 25. Подготовка:

A	B	C	D
$\begin{array}{r} 43210 \bar{1}2345 \\ \hline g \quad 0060 21 \\ h *^i_j \quad 0 243 \\ \hline q \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \bar{1}2345 \\ \hline \quad 60 21 \\ *^i_j \quad 0 243 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \bar{1}2345 \\ \hline \quad 60 21 \\ *^i_j \quad 0 243 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43210 \bar{1}2345 \\ \hline \quad 60 21 \\ *^i_j \quad 0 243 \\ \hline \dots \cdot \end{array}$

— отбросили незначащие нули (B); посчитали $e = a + c + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ — разряд старшей цифры произведения и отметили целую его часть точками (C);

ТАБЛИЦА 4.1. Сетка умножения к определению 4.35 на странице 23

-1	λ, ϕ	e	$e-1$	$e-2$	\dots	c	\dots	a	\dots	f	\dots	d	\dots	b	
0		e				c		a		f		d		b	
1		g						g_a	\dots	g_f	\dots	g_d	\dots	g_b	
2		h				h_c	\dots	h_a	\dots	h_f	\dots	h_d			
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	\dots	q_c	\dots	q_a	\dots	q_f				
2	a	q^a	Q_e^a	Q_{e-1}^a	Q_{e-2}^a	\dots	Q_c^a	\dots	Q_a^a	\dots	Q_f^a				
		\bar{q}^a		\bar{Q}_{e-1}^a	\bar{Q}_{e-2}^a	\dots	\bar{Q}_c^a	\dots	\bar{Q}_a^a	\dots	\bar{Q}_f^a				
		m^a			M_{e-2}^a	\dots	M_c^a	\dots	M_a^a	\dots	M_f^a				
		p^a	P_e^a	P_{e-1}^a	P_{e-2}^a	\dots	P_c^a	\dots	P_a^a	\dots	P_f^a				
	$a-1$	q^{a-1}		Q_{e-1}^{a-1}	Q_{e-2}^{a-1}	\dots	Q_c^{a-1}	\dots	Q_a^{a-1}	\dots	Q_f^{a-1}				
		\bar{q}^{a-1}			\bar{Q}_{e-2}^{a-1}	\dots	\bar{Q}_c^{a-1}	\dots	\bar{Q}_a^{a-1}	\dots	\bar{Q}_f^{a-1}				
		m^{a-1}				\dots	M_c^{a-1}	\dots	M_a^{a-1}	\dots	M_f^{a-1}				
		p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	\dots	P_c^{a-1}	\dots	P_a^{a-1}	\dots	P_f^{a-1}				
	$a-2$	q^{a-2}			Q_{e-2}^{a-2}	\dots	Q_c^{a-2}	\dots	Q_a^{a-2}	\dots	Q_f^{a-2}				
		\bar{q}^{a-2}				\dots	\bar{Q}_c^{a-2}	\dots	\bar{Q}_a^{a-2}	\dots	\bar{Q}_f^{a-2}				
m^{a-2}					\dots	M_c^{a-2}	\dots	M_a^{a-2}	\dots	M_f^{a-2}					
p^{a-2}				P_{e-2}^{a-2}	\dots	P_c^{a-2}	\dots	P_a^{a-2}	\dots	P_f^{a-2}					
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
b	q^b													Q_f^b	
	\bar{q}^b														
	m^b														
	p^b													P_f^b	
Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ_e^a	Σ_{e-1}^a	Σ_{e-2}^a	\dots	Σ_c^a	\dots	Σ_a^a	\dots	Σ_f^a				
	$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	\dots	P_c^{a-1}	\dots	P_a^{a-1}	\dots	P_f^{a-1}				
		n^{a-1}			N_{e-2}^{a-1}	\dots	N_c^{a-1}	\dots	N_a^{a-1}	\dots	N_f^{a-1}				
		Σ^{a-1}	Σ_e^{a-1}	Σ_{e-1}^{a-1}	Σ_{e-2}^{a-1}	\dots	Σ_c^{a-1}	\dots	Σ_a^{a-1}	\dots	Σ_f^{a-1}				
	$\binom{a}{a-2}$	p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	\dots	P_c^{a-2}	\dots	P_a^{a-2}	\dots	P_f^{a-2}				
		n^{a-2}				\dots	N_c^{a-2}	\dots	N_a^{a-2}	\dots	N_f^{a-2}				
	Σ^{a-2}	Σ_e^{a-2}	Σ_{e-1}^{a-2}	Σ_{e-2}^{a-2}	\dots	Σ_c^{a-2}	\dots	Σ_a^{a-2}	\dots	Σ_f^{a-2}					
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$\binom{a}{b}$	p^b													P_f^b	
	n^b														
	Σ^b	Σ_e^b	Σ_{e-1}^b	Σ_{e-2}^b	\dots	Σ_c^b	\dots	Σ_a^b	\dots	Σ_f^b					

посчитали длину выравнивания $L = 4 = \max\{1 + |-2| + 1, 0 + |-3| + 1, 2 + 1\}$, выравнивали все члены по ней (D).

Определим таблицу умножения $\lambda = 2$ и таблицу сложения $\phi = 0$. Производим умножение $6_1 * 0_0 2_1 4_2 3_3$. Индекс 1 при 6 определяет номер v блока. Перемножаем цифры $6_1 * 0_0$:

$$6_1 * 0_0 = (95)_{60} = 9_{1+0+1}^1 5_{1+0}^1 = 9_2^1 5_1^1 = Q_2^1 \bar{Q}_1^1.$$

ТАБЛИЦА 4.2. Сетка и пример умножения для случая $g_1 g_0 \cdot g_{\bar{1}} g_{\bar{2}} *_j^i h_0 \cdot h_{\bar{1}} h_{\bar{2}} h_{\bar{3}}$

-1		$2, 0$	$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$	$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$	
0			$e \ a \ c \mid f \ b \ d$	$e \ a \ c \mid f \ b \ d$	
1		g	$g_1 \ g_0 \mid g_{\bar{1}} \ g_{\bar{2}}$	$6 \ 0 \mid 2 \ 1$	
2		h	$h_0 \mid h_{\bar{1}} \ h_{\bar{2}} \ h_{\bar{3}}$	$0 \mid 2 \ 4 \ 3$	
3		x	$x_2 \ x_1 \ x_0 \mid x_{\bar{1}}$	$x_2 x_1 x_0 \mid x_{\bar{1}}$	
4	1	q^1	$Q_2^1 Q_1^1 Q_0^1 \mid Q_{\bar{1}}^1$	$9 \ 4 \ 3 \mid 5$	
5		\bar{q}^1	$\bar{Q}_1^1 \bar{Q}_0^1 \mid \bar{Q}_{\bar{1}}^1$	$5 \ 7 \mid 0$	
6		m^1	$M_0^1 \mid M_{\bar{1}}^1$	$1 \mid 0$	
7		$p^1 = g_1 *_0^2 h$	$P_2^1 P_1^1 P_0^1 \mid P_{\bar{1}}^1$	$9 \ 7 \ 4 \mid 7$	
8		0	q^0	$Q_1^0 Q_0^0 \mid Q_{\bar{1}}^0$	$2 \ 1 \mid 8$
9			\bar{q}^0	$\bar{Q}_0^0 \mid \bar{Q}_{\bar{1}}^0$	$0 \mid 9$
10			m^0	$\mid M_{\bar{1}}^0$	$\mid 5$
11	$p^0 = g_0 *_0^2 h$		$P_1^0 P_0^0 \mid P_{\bar{1}}^0$	$2 \ 3 \mid 5$	
12	$\bar{1}$	$\bar{q}^{\bar{1}}$	$Q_{\bar{0}}^{\bar{1}} \mid Q_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$6 \mid 0$	
13		$\bar{q}^{\bar{1}}$	$\mid \bar{Q}_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$\mid 7$	
14		$m^{\bar{1}}$	\mid	\mid	
15		$p^{\bar{1}} = g_{\bar{1}} *_0^2 h$	$P_{\bar{0}}^{\bar{1}} \mid P_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$	
16	$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	$\mid Q_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$\mid 8$	
17		$\bar{q}^{\bar{2}}$	\mid	\mid	
18		$m^{\bar{2}}$	\mid	\mid	
19		$p^{\bar{2}} = g_{\bar{2}} *_0^2 h$	$\mid P_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$\mid 8$	
20	Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1 = p^1 \quad \Sigma_2^1 \Sigma_1^1 \Sigma_0^1 \mid \Sigma_{\bar{1}}^1$	$9 \ 7 \ 4 \mid 7$	
21			$p^0 \quad P_1^0 P_0^0 \mid P_{\bar{1}}^0$	$2 \ 3 \mid 5$	
22		$\binom{1}{0}$	$n^0 \quad N_0^0 \mid N_{\bar{1}}^0$	$3 \mid 9$	
23			$\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0 \quad \Sigma_2^0 \Sigma_1^0 \Sigma_0^0 \mid \Sigma_{\bar{1}}^0$	$9 \ 4 \ 7 \mid 5$	
24			$p^{\bar{1}} \quad P_{\bar{0}}^{\bar{1}} \mid P_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$6 \mid 3$	
25		$\binom{1}{\bar{1}}$	$n^{\bar{1}} \quad \mid N_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$\mid 2$	
26			$\Sigma^{\bar{1}} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar{1}} \quad \Sigma_2^{\bar{1}} \Sigma_1^{\bar{1}} \Sigma_0^{\bar{1}} \mid \Sigma_{\bar{1}}^{\bar{1}}$	$9 \ 4 \ 5 \mid 4$	
27			$p^{\bar{2}} \quad \mid P_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$\mid 8$	
28		$\binom{1}{\bar{2}}$	$n^{\bar{2}} \quad \mid$	\mid	
29		$\Sigma^{\bar{2}} = \Sigma^{\bar{1}} +_0 p^{\bar{2}} \quad \Sigma_2^{\bar{2}} \Sigma_1^{\bar{2}} \Sigma_0^{\bar{2}} \mid \Sigma_{\bar{1}}^{\bar{2}}$	$9 \ 4 \ 5 \mid 1$		

Неперенос $9 = 9_{\bar{2}}^1 = Q_{\bar{2}}^1$ записываем в строку q^1 , столбец 2, определяемый подындеком 2; перенос $5 = 5_{\bar{1}}^1 = Q_{\bar{1}}^1$ — в строку \bar{q}^1 . В таблице примера надчеркивания и индексы опущены, чтобы не загромождать значения ячеек. Аналогично с другими цифрами:

$$\begin{aligned}
 6_1 *_0^2 2_{\bar{1}} &= (47)_{62} = 4_{1-1+1}^1 7_{1-1}^1 = 4_1^1 7_0^1 = Q_1^1 \bar{Q}_0^1 \\
 6_1 *_0^2 4_{\bar{2}} &= (30)_{64} = 3_{1-2+1}^1 0_{1-2}^1 = 3_0^1 0_{\bar{1}}^1 = Q_0^1 \bar{Q}_{\bar{1}}^1 \\
 6_1 *_0^2 3_{\bar{3}} &= (51)_{63} = 5_{1-3+1}^1 1_{1-3}^1 = 5_1^1 1_{\bar{2}}^1 = Q_1^1 \bar{Q}_{\bar{2}}^1.
 \end{aligned}$$

Перенос 1 последнего произведения цифр отбрасываем, поскольку его разряд -2 правее $f = -1$.

Выполняем c -сложение полученных строк $q^1 +_0 \bar{q}^1 = 9_2^1 4_1^1 3_0^1 5_1^1 + 5_1^1 7_0^1 0_1^1 = 9_2^1 7_1^1 4_0^1 7_1^1$. Произведение $6_1 *^2_0 0_0.2_1 4_2 3_3 = 9_2^1 7_1^1 4_0^1 7_1^1$ готово.

Выполнив аналогичные вычисления для умножений других цифр левого сомножителя на правый сомножитель, мы заполним оставшиеся блоки $1 - \bar{2}$. Скопируем строки 7, 11, 15, 19 в строки 20, 21, 24, 27 соответственно и перейдем к блокам строк 20 – 29. Последовательно произведя уже знакомые нам c -сложения для $\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$, $\Sigma^1 = \Sigma^0 +_0 p^1$, $\Sigma^2 = \Sigma^1 +_0 p^2 = g *^2_0 h$, мы завершим умножение $60.21 *^2_0 0.243 = 945.1$.

Приведем пример умножения одноразрядных чисел, поскольку оно не является простым взятием значения ячейки таблицы подстановок, как это имеет место в классической арифметике. Для этого продолжим пример подготовки на странице 21, заменив 4 на 5, выполнив его по таблицам: 2 — для умножения, 0 — сложения (для экономии высоты таблицы символы внесены слева от знака умножения):

$$\begin{array}{r}
 210 \mid \overline{12345} \\
 *^2_0 \quad 0 \mid 0 \\
 \quad \quad 5 \mid 0 \\
 \hline
 \quad \quad \cdot \mid \cdot \\
 \quad \quad 92 \mid \\
 \quad \quad \quad 6 \mid \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \\
 \quad \quad 93 \mid \\
 \hline
 \quad \quad \quad 9 \mid \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \\
 \quad \quad \quad 9 \mid \\
 \hline
 \quad \quad 93 \mid \\
 \hline
 \quad \quad \quad 9 \mid \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \\
 \quad \quad \quad \quad \mid \\
 \quad \quad 92 \mid
 \end{array}$$

Таким образом, имеем $0 *^2_0 5 = 92$ вместо 96, если бы просто взяли значение ячейки 05.

Известные определения умножения конечных дробей изменим на бесконечный случай

Определение 4.37. (сетка умножения бесконечных дробей) Таблица 4.3 на странице 27 повторяющая сетку умножения конечных дробей из определения 4.35 страницы 23, но продолженная бесконечно вправо и вниз, называется сеткой умножения бесконечных дробей.

Определение 4.38. (умножение чисел-бесконечных дробей, их произведение) Умножением $g *^i_j h = q$ бесконечных дробей называется выполнение шагов:

- (1) подготовить члены-бесконечные дроби умножения g, h, q ;
- (2) выполнить умножение $g_k *^i_j h_c h_{c-1} \dots h_0 . h_{-1} \dots$, где $k = a, a-1, \dots$ цифры g_k левого сомножителя на правый сомножитель h и вписать результат в блок k ;

ТАБЛИЦА 4.3. Сетка умножения к определению 4.37 на странице 26

-1	λ, ϕ	e	$e-1$	$e-2$	\dots	c	\dots	a	\dots	0	$\bar{1}$	
0		e				c		a				
1		g						g_a	\dots	g_0	$g_{\bar{1}}$ \dots	
2		h				h_c	\dots	h_a	\dots	h_0	$h_{\bar{1}}$ \dots	
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	\dots	q_c	\dots	q_a	\dots	q_0	$q_{\bar{1}}$ \dots
2	a	q^a	Q_e^a	Q_{e-1}^a	Q_{e-2}^a	\dots	Q_c^a	\dots	Q_a^a	\dots	Q_0^a	$Q_{\bar{1}}^a$ \dots
		\bar{q}^a		\bar{Q}_{e-1}^a	\bar{Q}_{e-2}^a	\dots	\bar{Q}_c^a	\dots	\bar{Q}_a^a	\dots	\bar{Q}_0^a	$\bar{Q}_{\bar{1}}^a$ \dots
		m^a			M_{e-2}^a	\dots	M_c^a	\dots	M_a^a	\dots	M_0^a	$M_{\bar{1}}^a$ \dots
		p^a	P_e^a	P_{e-1}^a	P_{e-2}^a	\dots	P_c^a	\dots	P_a^a	\dots	P_0^a	$P_{\bar{1}}^a$ \dots
	$a-1$	q^{a-1}		Q_{e-1}^{a-1}	Q_{e-2}^{a-1}	\dots	Q_c^{a-1}	\dots	Q_a^{a-1}	\dots	Q_0^{a-1}	$Q_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
		\bar{q}^{a-1}			\bar{Q}_{e-2}^{a-1}	\dots	\bar{Q}_c^{a-1}	\dots	\bar{Q}_a^{a-1}	\dots	\bar{Q}_0^{a-1}	$\bar{Q}_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
		m^{a-1}				\dots	M_c^{a-1}	\dots	M_a^{a-1}	\dots	M_0^{a-1}	$M_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
		p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	\dots	P_c^{a-1}	\dots	P_a^{a-1}	\dots	P_0^{a-1}	$P_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
	$a-2$	q^{a-2}			Q_{e-2}^{a-2}	\dots	Q_c^{a-2}	\dots	Q_a^{a-2}	\dots	Q_0^{a-2}	$Q_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots
		\bar{q}^{a-2}				\dots	\bar{Q}_c^{a-2}	\dots	\bar{Q}_a^{a-2}	\dots	\bar{Q}_0^{a-2}	$\bar{Q}_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots
		m^{a-2}				\dots	M_c^{a-2}	\dots	M_a^{a-2}	\dots	M_0^{a-2}	$M_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots
		p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	\dots	P_c^{a-2}	\dots	P_a^{a-2}	\dots	P_0^{a-2}	$P_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots \dots		
Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ_e^a	Σ_{e-1}^a	Σ_{e-2}^a	\dots	Σ_c^a	\dots	Σ_a^a	\dots	Σ_0^a	$\Sigma_{\bar{1}}^a$ \dots
	$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	\dots	P_c^{a-1}	\dots	P_a^{a-1}	\dots	P_0^{a-1}	$P_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
		n^{a-1}			N_{e-2}^{a-1}	\dots	N_c^{a-1}	\dots	N_a^{a-1}	\dots	N_0^{a-1}	$N_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
		Σ^{a-1}	Σ_e^{a-1}	Σ_{e-1}^{a-1}	Σ_{e-2}^{a-1}	\dots	Σ_c^{a-1}	\dots	Σ_a^{a-1}	\dots	Σ_0^{a-1}	$\Sigma_{\bar{1}}^{a-1}$ \dots
	$\binom{a}{a-2}$	p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	\dots	P_c^{a-2}	\dots	P_a^{a-2}	\dots	P_0^{a-2}	$P_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots
		n^{a-2}				\dots	N_c^{a-2}	\dots	N_a^{a-2}	\dots	N_0^{a-2}	$N_{\bar{1}}^{a-2}$ \dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots \dots		
	q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	\dots	q_c	\dots	q_a	\dots	q_0	$q_{\bar{1}}$ \dots	

(3) последовательно выполнить в блоках $\binom{a}{a}, \binom{a}{a-1}, \dots$ c -сложения полученных произведений p^a, p^{a-1}, \dots :

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a \underset{i}{+} p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} \underset{i}{+} p^{a-2}, \quad \dots$$

Предел $\lim_{k \rightarrow -\infty} \Sigma^k = q$ последовательности $\{\Sigma^k\}$ сумм выше есть произведение бесконечных дробей g, h .

Теорема 4.39. Умножение $*_j^i$ определено для любых $g, h \in \mathbb{R}_+$, причем $g *_j^i h = q \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Для любых цифр-сомножителей g_k, h_j , выполнимо умножение $g_k *_j^i h_j$, следовательно, можно получить любые строки q^k, \bar{q}^k . c -сложение $q^k \underset{i}{+} \bar{q}^k = p^k$ выполнимо в силу выполнимости сложения $\underset{i}{+}$. Это же верно для сложения $\Sigma^k = \Sigma^{k+1} \underset{i}{+} p^k$, при любом $k < a$. Для конечных дробей получаем неотрицательное действительное число.

Покажем, что предел $\lim_{k \rightarrow -\infty} \Sigma^k = q$ существует для любых g, h . В самом деле, мы видим, что в частичную сумму Σ^k сносится $a - k$, $k < a$, начальных цифр. Это значит, мы каждый раз получаем увеличивающееся неизменяемое начало числа из k цифр, а предел q будет действительным неотрицательным числом. \square

4.4. Деления. Аналогично вычитаниям, мы переносим порядок членов обычного деления на наши. Введем обозначения для делений по умножению $g *_j^i h = q$:

$$\begin{aligned} q \rangle_j^i g = h & \quad \text{— левое деление или деление на левый сомножитель,} \\ q \rangle_j^i h = g & \quad \text{— правое деление или деление на правый сомножитель.} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} q \rangle_j^i g = h \\ q \rangle_j^i h = g \end{aligned} \right\} \text{— деление без различия стороны.}$$

Первые два символа без индексов взяты из [14].⁹

4.4.1. Подготовка чисел к делению. Как вычитание восстанавливает сетку сложения, так деление восстанавливает сетку умножения и требует подготовки членов для выполнимости и однозначности. Символы подготовки к делениям — те же символы определения 4.27, по-другому посчитанные, а подготовленные члены деления соответствуют подготовленным членам 4.8, и 4.9, с учетом замечаний о восстановлении на странице 37. Определим

Процедура 4.40. (Подготовка к делению) Для чисел 3.1 пусть

$$y = y_{t'} \dots y_0 \cdot y_{\bar{1}} \dots y_{u'} \dots$$

— делитель числа q ,

$$x = x_{r'} \dots x_0 \cdot x_{\bar{1}} \dots x_{s'} \dots$$

— частное от деления $q \rangle_j^i x$ тогда:

- (1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей произведения и делителя, получив $q_{e'' \leq e'}$, $y_{t \leq t'}$ — старшие значащие цифры, $q_{f'' \geq f'}$, $y_{u'' \geq u'}$ — младшие значащие цифры, для конечных дробей;
- (2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q :

$$e = \begin{cases} e'', & \text{если } e'' > t, \\ t + 1, & \text{если } e'' \leq t; \end{cases}$$

- (3) посчитать номер старшей цифры частного

$$r = e - t - 1$$

- (4) если хотя бы один член из q или y — бесконечная дробь, перейти к шагу 6, иначе вычислить длину L подготовленных членов умножения

$$L = \max\{e + |f''| + 1, t + |u''| + 1\};$$

⁹Там другой порядок следования членов деления, как упоминалось ранее.

- (5) выровнять второй аргумент по длине L , в дробной части дописывая незначащие нули, и с получением

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \underbrace{q_e \dots q_0 \cdot q_{\bar{1}} \dots q_f}_{L}, \\ y = \underbrace{y_t \dots y_0 \cdot y_{\bar{1}} \dots y_u}_{L}, \\ x = \underbrace{x_r \dots x_0 \cdot x_{\bar{1}} \dots x_s}_{L} \end{array} \right.$$

остановить подготовку членов деления;

- (6) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$\left\{ \begin{array}{l} q = q_e \dots q_0 \cdot q_{\bar{1}} \dots, \\ y = y_t \dots y_0 \cdot y_{\bar{1}} \dots, \\ x = x_r \dots x_0 \cdot x_{\bar{1}} \dots \end{array} \right.$$

завершить подготовку членов деления.

Определение 4.41. (символы подготовки) Символы r, s, t, u, e, f из процедуры 4.40 называются символами подготовки к делению, L — длиной выравнивания, а числа x, y, q после данной процедуры — подготовленными членами деления.

Пример ниже показывает в колонке B отбрасывание незначащих нулей; в C — что номер старшей цифры делимого q остается без изменений, поскольку $3 > 0$, номер же старшей цифры частного равен $2 = 3 - 0 - 1$ (отмечена точкой вместе со всей целой частью); а выровненные по длине $L = 5 = \max\{3 + |-1| + 1, 0 + |-1| + 1\}$ члены мы находим в D : для g дописали 000, в h всего пять точек:

A	B	C	D
$\frac{43210 \overline{12345}}{g \quad 001}$	$\frac{43210 \overline{12345}}{*^i_j \quad 01}$	$\frac{43210 \overline{12345}}{*^i_j \quad 01}$	$\frac{43210 \overline{12345}}{*^i_j \quad 01000}$
$\frac{h \quad }{q \quad 9870 40}$	$\frac{h \quad }{q \quad 9870 4}$	$\frac{h \quad }{q \quad 9870 4}$	$\frac{h \quad }{q \quad 9870 4}$

Взятые в другом порядке —

A	B	C	D
$\frac{43210 \overline{12345}}{g \quad 9870 40}$	$\frac{43210 \overline{12345}}{*^i_j \quad 9870 4}$	$\frac{43210 \overline{12345}}{*^i_j \quad 9870 4}$	$\frac{43210 \overline{12345}}{*^i_j \quad 9870 40}$
$\frac{h \quad }{q \quad 001}$	$\frac{h \quad }{q \quad 01}$	$\frac{h \quad }{q \quad 00000 1}$	$\frac{h \quad }{q \quad 00000 1}$

— дают другой результат подготовки: поскольку для номера старшей цифры делимого выполняется $e'' = 0 < 3$, то $e = 4 = 3 + 1$ (C); старшая цифра частного будет в разряде $0 = 4 - 3 - 1$ (там же); длина выравнивания $L = 6 = \max\{4 + |-1| + 1, 3 + |-1| + 1\}$ диктует дописать 0 для g и пять точек для h (колонка D).

Последовательность таблиц

A	B	C	D
$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ g & \\ h^{*j} & 034 555 \dots \\ \hline q & 9999 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ *^i_j & \\ 34 & 555 \dots \\ \hline 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ *^i_j & \cdot\cdot \\ 34 & 555 \dots \\ \hline 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} \dots \\ *^i_j & \cdot\cdot \dots \dots \\ 34 & 555 \dots \\ \hline 9999 & 000 \dots \end{array}$

показывает каким будет деление, если делимое — бесконечная дробь. Процедура отбрасывает незначущий ноль у h (см. B), оставляет без изменения номер $e = 3$, дает разряд $r = 1 = 3 - 1 - 1$ старшей цифры частного (C), дописывает для q бесконечное число нулей в дробную часть и обозначает бесконечную запись дробной части частного (D).

Делению однаразрядного числа на однаразрядное число соответствует последовательность

A	B	C	D
$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ g & \\ h^{*j} & 0 \\ \hline q & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ *^i_j & \cdot \\ 0 & \\ \hline 00 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ *^i_j & \cdot \\ 0 & 0 \\ \hline 00 & \end{array}$	

Умножая числа, мы производили копирования цифр и начальные цифры произведения получают последовательным копированием начал частичных сумм. Поскольку при делении произведение известно, то автоматически известными становятся соответственные начала всех частичных сумм и, кроме того, первая цифра P_e^a строки p^a , первая цифра Q_e^a строки q^a . Восстанавливается все это посредством

Процедура 4.42. (копирование известных цифр делимого) Пусть a, b, e — символы подготовки из сетки умножения, $o, w \in \mathbb{Z}$. Тогда:

- (1) в сетке умножения из строки делимого (произведения) q в ячейки Q_e^a , P_e^a строк q^a , p^a соответственно скопировать первую цифру q_e делимого;
- (2) установить $o = a$, $w = 1$;
- (3) в строку Σ^o , начиная со столбца e скопировать первые w цифр делимого q из строки 3;
- (4) уменьшить o на 1, увеличить w на 1;
- (5) если делимое — бесконечная дробь перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу;
- (6) (для конечной дроби) если $o \geq b$, перейти к шагу 3, иначе остановить копирование.

Соберем для удобства вместе выполнимые сетки сложения и вычитания цифр в сетки 4.13, 4.14, а также введенные для удобства разбора примеров деления выполнимые сетки умножения-деления цифр (не чисел) 4.11 и сетки копирования 4.12. Общими для всех указанных сеток обозначениями будут: A — номер колонки таблицы примера (см. верхнюю строку таблицы 4.5, например); z — номер столбца в данной колонке A ; v — номер подблока в блоке 2 примера; $\binom{a}{j}$ — номер подблока в блоке Σ примера. Символы $g, h, Q, \bar{Q}, M, P, \Sigma, N$, с опущенными над-, подындксами трактуются как цифры из определения сетки

умножения, причем трактуются позиционно: Σ в разных строках могут быть не равными друг другу. Для экономии ширины, номер $z - 1$ опущен во всех сетках.

Определение 4.43. (сетки умножения-деления цифр¹⁰) С учетом абзаца на с. 30, сетки

$$(4.11) \quad \begin{array}{c} \frac{A}{g_v *^i_j h_w} \\ \frac{z=v+w+1}{z} \\ \hline k \cdot \end{array} \quad \frac{A}{\cdot v *^i_j h_w} \quad \frac{z=v+w+1}{z} \quad \hline k \begin{array}{c} Q \\ \cdot \end{array} \quad \frac{A}{g_v *^i_j \cdot w} \quad \frac{z=v+w+1}{z} \quad \hline k \begin{array}{c} Q \\ \cdot \end{array}$$

называются выполнимыми сетками умножения-деления цифр и являются табличным представлением прямого, левонеизвестного и правонеизвестного атомарных уравнений 3.2–3.4, переписанных как

$$g_v *^i_j h_w = Q\bar{Q}, \quad \cdot v *^i_j h_w = Q \cdot, \quad g_v *^i_j \cdot w = Q \cdot$$

соответственно; точка заменяет неизвестную цифру уравнения; $z = v + w + 1$ — формула расчета столбца z , в который записывается неперенос произведения цифр.

Определение 4.44. (сетки копирования) Сетками копирования цифр будут таблицы

$$(4.12) \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\text{П}q^v} \\ \downarrow \\ \text{П}p^v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ Q \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\text{П}q^v} \\ \uparrow \\ \text{П}p^v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ \cdot \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\text{П}p^v} \\ \downarrow \\ \Sigma p^v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ P \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\text{П}p^v} \\ \uparrow \\ \Sigma p^v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ \cdot \\ P \end{array}$$

в которых символы $\text{П}q^v, \text{П}p^v, \Sigma p^v$ указывают на строки q^v, p^v в блоках, обозначенных префиксами $\text{П}, \Sigma$. Стрелка указывает откуда и куда копируется цифра.

К двум группам сеток ниже определения и комментарии озвучивались; нижние сетки — это те же верхние, но данные для большей визуальной связи с блоком Σ .

$$(4.13) \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\mathcal{E}} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ Q \\ \bar{Q} \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\mathcal{E}} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ Q \\ \bar{Q} \\ M \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\mathcal{F}^l} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ Q \\ \cdot \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\mathcal{F}^l} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ Q \\ \cdot \\ M \cdot \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\mathcal{F}^r} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ \cdot \\ \bar{Q} \\ \cdot \\ P \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{A}{\mathcal{F}^r} \\ v \end{array} \begin{array}{c} \frac{A}{z} \\ \cdot \\ \bar{Q} \\ M \cdot \\ P \end{array}$$

¹⁰Но не однознарядных чисел!

(4.14)

A		A		A		A		A		A	
E	z	ε	z	F ^l	z	F ^l	z	F ^r	z	F ^r	z
	Σ		Σ		Σ		Σ		.		.
	P		P		.		.		P		P
$\binom{a}{j}$.	$\binom{a}{j}$	N.	$\binom{a}{j}$.	$\binom{a}{j}$	N.	$\binom{a}{j}$.	$\binom{a}{j}$	N.
	.		.		Σ		Σ		Σ		Σ

Определение 4.45. (деление дробей, их частное) Пусть, если $y = g$, то $x = h$, и наоборот, если $y = h$, то $x = g$. Делением $q :_j^i y = x$ дробей по умножению $*_j^i$ будет выполнение шагов для заполнения сетки умножения

- (1) подготовить дроби q, y, x ;
- (2) построить сетку умножения подготовленных членов деления;
- (3) взять таблицы умножения и сложения для умножения $*_j^i$;
- (4) скопировать известные цифры произведения q в ячейки блока Σ сетки умножения процедурой 4.42 копирования;
- (5) если дроби бесконечны и существует выполнимая сетка из групп 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 выполнять ее, иначе, если дроби конечны, перейти к шагу 6;
- (6) если дроби конечны, $z \geq f$ и существует выполнимая сетка разряда z из групп 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, выполнять сетку.

Число в строке x будет частным от деления $q :_j^i y = x$.

Это определение общее и для правого, и для левого деления. Тем не менее, они будут несколько отличаться в порядке восстановления сетки умножения.

Разбираем пример правого деления $q \overset{i}{j} h = 945.13 \overset{2}{0} 0.243 = x$ по умножению $x *_0^2 0.243 = 945.13$, представленный в таблицах 4.5, 4.6, 4.7 на страницах 39, 40, 41 соответственно. В них мы последовательно по колонкам отобрали ход деления. (Все это можно было бы выполнить в одной колонке.) В целом правое деление восстанавливает сетку умножения так: процедура копирования заполнит блок Σ «треугольником» начала частичных сумм, когда первая (самая верхняя) частичная сумма будет иметь одну цифру, вторая сумма — две, ..., последняя будет иметь $|a - b| + 1$ цифр; затем восстановится блок Πa и сумма Σ^a , блок $\Pi(a - 1)$ и сумма Σ^{a-1} , ..., $\Pi(b)$ (сумма Σ^b уже скопирована процедурой). Помним, что $\Sigma^a = (\Pi)p^a$.

Готовим члены умножения $0060.21 *_0^2 0.243 = 945.1$ к правому делению $945.1 \overset{2}{0} 0.243$.

A	B	C	D
$\begin{array}{r l} 43210 & 12345 \\ g & \\ h *_0^2 & 0 243 \\ \hline q & 945 1 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & 12345 \\ *_0^2 & \cdot\cdot \\ & 0 243 \\ \hline & 945 1 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 43210 & 12345 \\ *_0^2 & \cdot\cdot \cdot\cdot \\ & 0 243 \\ \hline & 945 1 \end{array}$	

Отбрасывание незначащих нулей не нужно (пустая B). В силу $2 > 0$ верно $e = 2$ для старшей цифры произведения. Старшая цифра частного g будет находиться в разряде $1 = 2 - 0 - 1$. Длина: $L = 4 = \max\{2 + |-1| + 1, 0 + |-3| + 1\}$. По ней мы дописываем только две точки дробной части у частного.

Теперь построим сетку умножения и определим таблицы подстановок (это уже известно по умножению $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$) — колонка A . После копирования начал (колонка B) в блоке 1 мы имеем первую выполнимую сетку

$$\begin{array}{c|c} \hline B & \\ \hline .1 *_0^2 0_0 & \\ \hline 2=1+0+1 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & . \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline C & \\ \hline 6_1 *_0^2 0_0 & \\ \hline 2=1+0+1 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \hline & 5 \\ \hline \end{array}$$

автоматически влекущую умножение $6 *_0^2 0.243 = 974.7$ (C) — комбинацию выполнимых сеток умножений и сложений цифр. Дальше, помня из умножения, мы копируем 974.7 в строку Σ^1 , что является серией выполнимых сеток копирования цифр. Это влечет выполнимость сетки вычитания и двух копирований

$$\begin{array}{c|c} \hline C & \\ \hline F^l & 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \hline \binom{1}{0} & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline F^l & 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & 2 \\ \hline \binom{1}{0} & 3 \\ \hline & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline & 1 \\ \hline \text{Пр}^0 & 2 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \Sigma p^0 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline & 1 \\ \hline \text{П}q^0 & 2 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \text{Пр}^0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Снова будем иметь выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{c|c} \hline D & \\ \hline .0 *_0^2 0_0 & \\ \hline 1=0+0+1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline & . \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline E & \\ \hline 0_0 *_0^2 0_0 & \\ \hline 1=0+0+1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

с последующим перемножением $0 *_0^2 0.24 = 23.5^{11}$ в блоке 0 и копированием его результата в строку Σp^0 (колонка E). Коль скоро у нас есть два произведения цифр (строки 20–21), мы их можем сложить в блоке $\binom{1}{0}$, колонке F . Это влечет выполнимое вычитание начальных цифр блоком ниже и копирования

$$\begin{array}{c|c} \hline F & \\ \hline F^l & 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} & 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c} \hline G & \\ \hline F^l & 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & 6 \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} & 2 \\ \hline & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G & \\ \hline & 0 \\ \hline \text{Пр}^{\bar{1}} & 6 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \Sigma p^{\bar{1}} & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G & \\ \hline & 0 \\ \hline \text{П}q^{\bar{1}} & 6 \\ \hline & \uparrow \\ \hline \text{Пр}^{\bar{1}} & 6 \\ \hline \end{array}$$

¹¹Умножение на цифру 0 из 0.24 уже отражено в сетке; последнюю цифру 3 умножать не обязательно, т.к. это произведение лежит правее последнего разряда произведения. В дальнейшем аналогичные ситуации мы будем подразумевать.

Опять получим выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{r} \overline{G} \\ \cdot \bar{1} *_{0}^2 0_0 \\ \hline 0=\bar{1}+0+1 \\ \hline 0 \\ \bar{1} \mid 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} \overline{H} \\ 2\bar{1} *_{0}^2 0_0 \\ \hline 0=\bar{1}+0+1 \\ \hline 0 \\ \bar{1} \mid 6 \\ \hline 7 \end{array}$$

За ним последует перемножение $2 *_{0}^2 0.2 = 6.3$, копирование результата в блок Σ , строку $\Sigma p^{\bar{1}}$. Получаем новую частичную сумму $947.5 +_0 6.3 = 945.4$ в колонке I , строке $\Sigma^{\bar{1}}$ и повторяем вычитание начальных цифр с копированиями

$$\begin{array}{r} \overline{I} \\ F^{\bar{1}} \mid \bar{1} \\ \hline 4 \\ \hline \cdot \\ \hline (\frac{1}{2}) \mid 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} \overline{J} \\ F^{\bar{1}} \mid \bar{1} \\ \hline 4 \\ \hline 8 \\ \hline (\frac{1}{2}) \mid 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{J} \\ \hline \bar{1} \\ \hline \text{Пр} p^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \uparrow \\ \hline \Sigma p^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \overline{J} \\ \hline \bar{1} \\ \hline \text{П} q^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \uparrow \\ \hline \text{Пр} p^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \end{array}$$

Остается посчитать последнюю цифру искомого сомножителя:

$$\begin{array}{r} \overline{K} \\ \cdot \bar{2} *_{0}^2 0_0 \\ \hline \bar{1}=\bar{2}+0+1 \\ \hline \bar{1} \\ \bar{2} \mid 8 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} \overline{K} \\ 1\bar{2} *_{0}^2 0_0 \\ \hline \bar{1}=\bar{2}+0+1 \\ \hline \bar{1} \\ \bar{2} \mid 8 \\ \hline \end{array}$$

Правое деление $945.1 \stackrel{2}{\%} 0.243 = 60.21$ закончено и восстановило умножение $60.21 *_{0}^2 0.243 = 945.1$.

Приступаем к примеру левого деления $q \stackrel{j}{\setminus} g = 945.1 \stackrel{0}{\%} 60.21 = h$ по умножению $60.21 *_{0}^2 x = 945.1$, таблиц 4.8, 4.9, 4.10 на страницах 42, 43, 44 соответственно. В целом левое деление восстановит сетку умножения иначе, нежели правое, но начала частичных сумм восстановятся аналогично. Затем сетка заполняется по «диагоналям»: сначала первые цифры строк блоков $\text{Па} - \text{Пб}$ и первые цифры (после скопированных процедурой копирования) блоков $\Sigma \binom{a}{a} - \Sigma \binom{a}{b}$, затем вторые цифры этих же блоков секций П , Σ , после — третьи, и т.д.

Для левого деления $945.1 \stackrel{j}{\setminus} 0060.21$ по умножению $0060.21 *_{0}^2 0.243 = 945.1$ подготовка выглядит так:

$$\begin{array}{c} \overline{A} \qquad \overline{B} \qquad \overline{C} \qquad \overline{D} \\ \hline \begin{array}{r} 43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ g *_{0}^2 0060 \mid 21 \\ h *_{0}^2 \quad \quad \mid \\ \hline q \quad 9451 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ *_{0}^2 \quad 60 \mid 21 \\ \quad \quad \quad \mid \\ \hline 9451 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ *_{0}^2 \quad 60 \mid 21 \\ \quad \quad \quad \mid \\ \hline 9451 \mid \end{array} \quad \begin{array}{r} 43210 \mid \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ *_{0}^2 \quad 60 \mid 21 \\ \quad \quad \quad \mid \dots \\ \hline 9451 \mid \end{array} \end{array}$$

— отброшены незначащие нули у g , номер старшей цифры делимого остается без изменений в силу $2 > 0$, старшей цифрой частного h будет $0 = 2 - 1 - 1$, а длина $L = 4 = \max\{2 + |-1| + 1, 1 + |-2| + 1\}$ дописывает три точки в дробной части результата.

Состояние после копирования эквивалентно колонке B правого деления на с. 39, следовательно и первой выполнимой сеткой будет деление цифр, с разницей, что неизвестна правая цифра (первые две сетки ниже):

$$\begin{array}{c} \overline{B} \\ \hline 6_1 *_{\circ}^2 \cdot 0 \\ \hline 2=1+0+1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \mid 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 6_1 *_{\circ}^2 0_0 \\ \hline 2=1+0+1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \mid 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 0_0 *_{\circ}^2 0_0 \\ \hline 1=0+0+1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \mid 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 2_{\bar{1}} *_{\circ}^2 0_0 \\ \hline 0=\bar{1}+0+1 \\ \hline 0 \\ \hline \bar{1} \mid 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 1_{\bar{2}} *_{\circ}^2 0_0 \\ \hline \bar{1}=\bar{2}+0+1 \\ \hline \bar{1} \\ \hline \bar{2} \mid 8 \\ \hline \end{array}$$

Становятся возможными перемножения цифр $0.21 *_{\circ}^2 0$ (три последние сетки), вносимые по правилам умножения в подблоки $0 - \bar{2}$, и копирования из строк q в строки p блоков Π, Σ :

$$\begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 1 \\ \hline \Pi q^0 \mid 2 \\ \hline \downarrow \\ \hline \Pi p^0 \mid 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 1 \\ \hline \Pi p^0 \mid 2 \\ \hline \downarrow \\ \hline \Sigma p^0 \mid 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 0 \\ \hline \Pi q^{\bar{1}} \mid 6 \\ \hline \downarrow \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} \mid 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline 0 \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} \mid 6 \\ \hline \downarrow \\ \hline \Sigma p^{\bar{1}} \mid 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline \bar{1} \\ \hline \Pi q^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \downarrow \\ \hline \Pi p^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline \bar{1} \\ \hline \Pi p^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \downarrow \\ \hline \Sigma p^{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline \end{array}$$

В блоке Σ это влечет выполнимые сетки вычитаний в подблоках $\binom{1}{0}, \binom{1}{\bar{1}}$ —

$$\begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline Fr \mid 1 \\ \hline \cdot \\ \hline \binom{1}{0} \mid 2 \\ \hline \cdot \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \overline{D} \\ \hline Fr \mid 1 \\ \hline 7 \\ \hline \binom{1}{0} \mid 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline Fr \mid 0 \\ \hline \cdot \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} \mid 6 \\ \hline \cdot \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \overline{D} \\ \hline Fr \mid 0 \\ \hline 7 \\ \hline \binom{1}{\bar{1}} \mid 6 \\ \hline 2 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

— такое же вычитание в подблоке $\binom{1}{\bar{2}}$, одно копирование из Σ^1 в Πp^1 и вычитание в подблоке 1 блока Π :

$$\begin{array}{c} \overline{C} \\ \hline Fr \mid \bar{1} \\ \hline \cdot \\ \hline \binom{1}{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \overline{D} \\ \hline Fr \mid \bar{1} \\ \hline 4 \\ \hline \binom{1}{\bar{2}} \mid 8 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{D} \\ \hline 1 \\ \hline \Pi p^1 \mid 7 \\ \hline \uparrow \\ \hline \Sigma^1 \mid 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{D} \\ \hline Fr \mid 1 \\ \hline \cdot \\ \hline 1 \mid 5 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \overline{E} \\ \hline Fr \mid 1 \\ \hline 4 \\ \hline 1 \mid 5 \\ \hline 1 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$$

Теперь нам доступно вычисление второй цифры неизвестного сомножителя (первые две сетки) посредством

$$\begin{array}{c} \overline{E} \\ \hline 6_1 *_{\circ}^2 \cdot \bar{1} \\ \hline 1=1+\bar{1}+1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \mid 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \overline{F} \\ \hline 6_1 *_{\circ}^2 2_{\bar{1}} \\ \hline 1=1+\bar{1}+1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \mid 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{F} \\ \hline 0_0 *_{\circ}^2 2_{\bar{1}} \\ \hline 0=0+\bar{1}+1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \mid 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{F} \\ \hline 2_{\bar{1}} *_{\circ}^2 2_{\bar{1}} \\ \hline \bar{1}=\bar{1}+\bar{1}+1 \\ \hline \bar{1} \\ \hline \bar{1} \mid 0 \\ \hline \end{array}$$

С учетом того, что правее разряда $\bar{1}$ цифры не следует писать, нам можно перемножить вместо $60.21 *_{\circ}^2 2$ только $0.2 *_{\circ}^2 2$ (последние две сетки выше).

Появляются выполнимые сетки сложения цифр и выполнимые сетки копирования их результатов

$$\begin{array}{c|c} \hline F \\ \hline \text{E} & 0 \\ \hline & 1 \\ & 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline G \\ \hline \text{E} & 0 \\ \hline & 1 \\ & 0 \\ & 5 \\ & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline F \\ \hline \text{E} & \bar{1} \\ \hline & 0 \\ & 7 \\ & \cdot \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline G \\ \hline \text{E} & \bar{1} \\ \hline & 0 \\ & 7 \\ & \cdot \\ & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G \\ \hline & 0 \\ \hline \text{П}p^0 & 3 \\ \hline & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \text{П}p^{\bar{1}} & 3 \\ \hline & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar{1}} & 3 \\ \hline \end{array}$$

автоматически влекущие сетки вычитания и копирования

$$\begin{array}{c|c} \hline G \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & \cdot \\ & 3 \\ & \cdot \\ \binom{1}{0} & 3 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline H \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & 4 \\ & 3 \\ & \cdot \\ \binom{1}{0} & 39 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline G \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & \cdot \\ & 3 \\ & \cdot \\ \binom{1}{\bar{1}} & 2 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline H \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 5 \\ & 3 \\ & \cdot \\ \binom{1}{\bar{1}} & 2 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline H \\ \hline & 0 \\ \hline \text{П}p^1 & 4 \\ \hline & \uparrow \\ \Sigma^1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Выполняем вычитание в подблоке 1 и там же деление цифр для нахождения очередной цифры правого сомножителя:

$$\begin{array}{c|c} \hline H \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & \cdot \\ & 7 \\ & 1 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline I \\ \hline \mathcal{F}^r & 0 \\ \hline & 3 \\ & 7 \\ & 10 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline I \\ \hline & 6_1 * 0^2 \cdot \bar{2} \\ \hline & 0=1+2+1 \\ \hline & 0 \\ & 3 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline J \\ \hline & 6_1 * 0^2 \cdot 4_2 \\ \hline & 0=1+2+1 \\ \hline & 0 \\ & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline J \\ \hline & 0 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

Известность цифры сомножителя дает перемножения с цифрами другого сомножителя — в нашем случае только одно — и последующее сложение неначальных цифр с копированием:

$$\begin{array}{c|c} \hline J \\ \hline & 0_0 * 0^2 \cdot 4_2 \\ \hline & \bar{1}=0+2+1 \\ \hline & \bar{1} \\ & 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline J \\ \hline \varepsilon & \bar{1} \\ \hline & 8 \\ & 9 \\ & 5 \\ & \cdot \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline K \\ \hline \varepsilon & \bar{1} \\ \hline & 8 \\ & 9 \\ & 5 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline K \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \text{П}p^0 & 5 \\ \hline & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Вычитанием (первые две сетки ниже)

$$\begin{array}{c|c} \hline K \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & \cdot \\ & 5 \\ & \cdot \\ \binom{1}{0} & 9 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline L \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 7 \\ & 5 \\ & \cdot \\ \binom{1}{0} & 9 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline L \\ \hline & \bar{1} \\ \hline \text{П}p^1 & 7 \\ \hline & \uparrow \\ \Sigma^1 & 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \hline L \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & \cdot \\ & 0 \\ & 0 \\ & 7 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \hline M \\ \hline \mathcal{F}^r & \bar{1} \\ \hline & 5 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 7 \\ \hline \end{array}$$

находим последнюю цифру частичной суммы Σ^1 , копируем ее в подблок 1 (средняя сетка), вычитаем в блоке 1 (две последние сетки), делением цифр

$$\frac{\begin{array}{r} M \\ \hline 6_1 * 0^2 \cdot \bar{3} \\ \hline \bar{1}=1+\bar{3}+1 \\ \hline \bar{1} \\ \hline 1 \end{array}}{5} = \frac{\begin{array}{r} N \\ \hline 6_1 * 0^2 \cdot 3_{\bar{3}} \\ \hline \bar{1}=1+\bar{3}+1 \\ \hline \bar{1} \\ \hline 1 \end{array}}{5}$$

находим последнюю цифру неизвестного множителя, завершая правое деление $945.1 \overset{\circ}{\setminus} 60.21 = 0.243$ верным восстановлением множителя в умножении $60.21 * 0.243 = 945.1$.

- Теорема 4.46.** (1) Если для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$ выполнимо $q \overset{i}{:} y = x$, то $x \in \mathbb{R}_+$.
 (2) Если таблицы i, j — полулатинские (SL), то $q \overset{i}{\setminus} y = x_1$ и $q \overset{j}{/} y = x_2$ выполнимы одновременно для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. (1) Поскольку деление восстанавливает сетку умножения, то доказательство утверждения $y \in \mathbb{R}_+$ заимствуется из доказательства замкнутости умножения.

(2) Подготовка, копирование и построение сетки умножения выполнимы. Копирование предоставляет цифру для первой выполнимой сетки. Для сеток деления цифр выполнимость доказана условиями решения атомарных уравнений в предложении 3.12; выполнимость сеток вычитания рассматривалась в разделе о вычитаниях (предложения 4.12, 4.18) — все эти условия совпадают с условиями теоремы. Для сеток умножения и сложения цифр ограничений на таблицы подстановок нет. Процедура деления определена так, что каждая выполненная сетка дает цифры для следующей выполнимой сетки хоть конечных, хоть бесконечных дробей. \square

В вопросе восстановления аргументов умножения существует та же ситуация, что и с вычитанием: деление всегда выполнимо, но не всегда восстанавливает множители; дописыванием нужного количества нулей, тем не менее, мы их точно восстановим.

На странице 38 находятся примеры. Слева помещено умножение $93.555 * 71.198 = 0012.3 = 12.3$, с появляющимися двумя незначащими нулями результата впереди. В середине — деление $012.30 \overset{\circ}{\setminus} 93.555 = 7.6191$; подготовка деления добавила 0 к целой части 12.3 и дала $L = 5$. Как видим, оно не восстановило множитель 71.198, однако, проведя деление в правой незаполненной таблице с произведением 0012.3 вместо 012.30 читатель получит искомое 71.198.

- Теорема 4.47.** Пусть имеем $g \overset{i}{*} h = q$ с таблицами i, j . Тогда, если i, j — полулатинские (SL), то $q \overset{i}{\setminus} g = h$, $q \overset{j}{/} h = g$, для любых $q, g, h \in \mathbb{R}_+$, при надлежащем обрамлении незначащими нулями, когда это необходимо.

Доказательство. Как и для аналогичной теоремы о восстановлении вычитанием нам нужно сказать, что, как только выполнимая сетка вычитания и деления цифр получает все аргументы для восстановления, она восстанавливает точно сетки сложения и умножения цифр в силу предложения 3.12.

Если подготовка чисел к делению дала ту же длину выравнивания и те же номера старших разрядов, которые были у аргументов умножения, то, в силу ранее сказанного, деление восстановит сомножитель x и никакой другой. Если подготовка дает другую, нежели у умножения, длину выравнивания и (или) другие номера старших разрядов, то это произошло только из-за нехватки незначащих нулей у аргументов деления. Значит, дописав нужное число нулей, мы восстановим обе характеристики подготовленных членов деления. Как только это сделано, найденный неизвестный сомножитель будет в точности аргументом умножения $g *_j^i h = q$. \square

ТАБЛИЦА 4.4. Примеры восстановления сомножителей.

$93.555 *_3^3 71.198 = 0012.3$	$012.30 \backslash_3^3 93.555 = 7.6191$	$0012.3 \backslash_3^3 93.555 = h$
$\bar{3}, \bar{3}$	$\bar{3}, \bar{3}$	$\bar{3}, \bar{3}$
g	g	g
h	h	h
q	q	q
3 2 1 0 1 2 3	2 1 0 1 2 3 4	3 2 1 0 1 2 3
9 3 5 5 5	9 3 5 5 5	9 3 5 5 5
7 1 1 9 8	7 6 1 9 1	. . .
0 5 5 3 2	0 8 5 3 5
1 3 3 0	1 6 3 0
1 1 8	8 8 3
0 6 9 1 0	0 2 8 9 8
4 0 0 5	4 9 0 5
6 5 5	6 7 5
3 9	6 5
4 5 7 3	4 8 7 1
2 6 6	2 3 6
9 1	9 8
1	4
2 4 2	2 5 8
2 6	2 3
9	9
2 4	2 5
2	2
2	2
0 6 9 1 0	0 2 8 9 8
4 5 7 3	4 8 7 1
9 8 5	3 9 4
0 0 0 3 8	0 1 3 7 1
2 4 2	2 5 8
8 3	3 8
0 0 1 3 6	0 1 2 2 2
2 4	2 5
3	0
0 0 1 2 2	0 1 2 3 4
2	2
0 0 1 2 3	0 1 2 3 0	0 0 1 2 3

ТАБЛИЦА 4.5. Правое деление $945.1 \frac{2}{10} 0.243$ (начало)

		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>		
-1	$\bar{2}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$		
0	0	<i>e a c</i> <i>f b d</i>	<i>e a c</i> <i>f b d</i>	<i>e a c</i> <i>f b d</i>	<i>e a c</i> <i>f b d</i>		
1		$x_1 x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$	$x_1 x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$	6 $x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$	6 $x_0 x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$		
2		0 2 4 3	0 2 4 3	0 2 4 3	0 2 4 3		
3		9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1		
4	Π	1	q^1	9	9 4 3 5	9 4 3 5	
5			\bar{q}^1	5 7 0	5 7 0	
6			m^1	1 0	1 0	
7			p^1	9	9 7 4 7	9 7 4 7	
8		0	q^0	2 . . .	
9			\bar{q}^0	
10			m^0	
11			p^0	2 . . .	
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$	
14			$m^{\bar{1}}$	
15			$p^{\bar{1}}$	
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$	
18			$m^{\bar{2}}$	
19			$p^{\bar{2}}$	
20		Σ	$\binom{1}{\bar{1}}$	Σ^1	9	9 7 4 7	9 7 4 7
21			$\binom{1}{0}$	p^0	2 . . .
22				n^0	3 . . .
23	Σ^0			9 4 . . .	9 4 . . .	9 4 . . .	
24	$\binom{1}{\bar{1}}$		$p^{\bar{1}}$	
25			$n^{\bar{1}}$	
26			$\Sigma^{\bar{1}}$	9 4 5 . .	9 4 5 . .	9 4 5 . .	
27	$\binom{1}{\bar{2}}$		$p^{\bar{2}}$	
28			$n^{\bar{2}}$	
29		$\Sigma^{\bar{2}}$ 9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1		

ТАБЛИЦА 4.6. Правое деление $945.1 \frac{2}{10} 0.243$ (продолжение)

		E	F	G	H	
-1	\varnothing	2 1 0 $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$	2 1 0 $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$	2 1 0 $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$	2 1 0 $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$	
0	0	$e a c f b d$	$e a c f b d$	$e a c f b d$	$e a c f b d$	
1		6 0 $x_1 x_2$	6 0 $x_1 x_2$	6 0 $x_1 x_2$	6 0 $2_1 x_2$	
2		0 2 4 3	0 2 4 3	0 2 4 3	0 2 4 3	
3		9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	
4	II	q^1 9 4 3 5	9 4 3 5	9 4 3 5	9 4 3 5	
5		1	\bar{q}^1 5 7 0	5 7 0	5 7 0	5 7 0
6		m^1 1 0	1 0	1 0	1 0	
7		p^1 9 7 4 7	9 7 4 7	9 7 4 7	9 7 4 7	
8		0	q^0 2 1 8	2 1 8	2 1 8	2 1 8
9			\bar{q}^0 0 9	0 9	0 9	0 9
10			m^0 5	5	5	5
11			p^0 2 3 5	2 3 5	2 3 5	2 3 5
12			$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	6 .
13		$\bar{q}^{\bar{1}}$.		.	.	7
14		$m^{\bar{1}}$				
15		$p^{\bar{1}}$	6 .	6 3
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$			
18			$m^{\bar{2}}$			
19			$p^{\bar{2}}$
20			Σ	$\binom{1}{1}$ Σ^1 9 7 4 7	9 7 4 7	9 7 4 7
21		p^0 2 3 5		2 3 5	2 3 5	2 3 5
22		$\binom{1}{0}$ n^0 3 .		3 9	3 9	3 9
23	Σ^0 9 4 7 .	9 4 7 5		9 4 7 5	9 4 7 5	
24	$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$	6 .	6 3
25		$n^{\bar{1}}$.		.	2	2
26		$\Sigma^{\bar{1}}$ 9 4 5 .		9 4 5 .	9 4 5 .	9 4 5 .
27	$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$
28		$n^{\bar{2}}$				
29		$\Sigma^{\bar{2}}$ 9 4 5 1		9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1

ТАБЛИЦА 4.7. Правое деление $945.1 \frac{2}{10} 0.243$ (окончание)

		I	J	K		
-1	2	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0\ \ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$		
0	0	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$	$e\ a\ c\ \ f\ b\ d$		
1		$6\ 0\ \ 2\ x_2$	$6\ 0\ \ 2\ x_2$	$6\ 0\ \ 2\ 1$		
2		$0\ \ 2\ 4\ 3$	$0\ \ 2\ 4\ 3$	$0\ \ 2\ 4\ 3$		
3		$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$		
4	II	$q^1\ 9\ 4\ 3\ \ 5$	$9\ 4\ 3\ \ 5$	$9\ 4\ 3\ \ 5$		
5		$\bar{1}$	$\bar{q}^1\ 5\ 7\ \ 0$	$5\ 7\ \ 0$	$5\ 7\ \ 0$	
6		m^1	$1\ \ 0$	$1\ \ 0$	$1\ \ 0$	
7		p^1	$9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	
8		0	$q^0\ 2\ 1\ \ 8$	$2\ 1\ \ 8$	$2\ 1\ \ 8$	
9			$\bar{q}^0\ 0\ \ 9$	$0\ \ 9$	$0\ \ 9$	
10			m^0	$\quad\quad\quad\ \ 5$	$\quad\quad\quad\ \ 5$	$\quad\quad\quad\ \ 5$
11			p^0	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}\ 6\ \ 0$	$6\ \ 0$	$6\ \ 0$	
13			$\bar{q}^{\bar{1}}\ \quad\quad\quad\ \ 7$	$\quad\quad\quad\ \ 7$	$\quad\quad\quad\ \ 7$	
14			$m^{\bar{1}}\ \quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	
15			$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$	
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}\ \quad\quad\quad\ \cdot$	$\quad\quad\quad\ 8$	$\quad\quad\quad\ 8$	
17			$\bar{q}^{\bar{2}}\ \quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	
18			$m^{\bar{2}}\ \quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	
19			$p^{\bar{2}}\ \quad\quad\quad\ \cdot$	$\quad\quad\quad\ 8$	$\quad\quad\quad\ 8$	
20		Σ	$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1\ 9\ 7\ 4\ \ 7$	$9\ 7\ 4\ \ 7$	
21				$p^0\ 2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$	$2\ 3\ \ 5$
22			$\binom{1}{0}$	$n^0\ 3\ \ 9$	$3\ \ 9$	$3\ \ 9$
23			$\Sigma^0\ 9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$	$9\ 4\ 7\ \ 5$	
24	$\binom{1}{\bar{1}}$		$p^{\bar{1}}\ 6\ \ 3$	$6\ \ 3$	$6\ \ 3$	
25			$n^{\bar{1}}\ \quad\quad\quad\ 2$	$\quad\quad\quad\ 2$	$\quad\quad\quad\ 2$	
26			$\Sigma^{\bar{1}}\ 9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$	$9\ 4\ 5\ \ 4$	
27				$p^{\bar{2}}\ \quad\quad\quad\ \cdot$	$\quad\quad\quad\ 8$	$\quad\quad\quad\ 8$
28	$\binom{1}{\bar{2}}$		$n^{\bar{2}}\ \quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	$\quad\quad\quad\ $	
29			$\Sigma^{\bar{2}}\ 9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	$9\ 4\ 5\ \ 1$	

ТАБЛИЦА 4.8. Левое деление $945.1 \overset{2}{\underset{0}{\setminus}} 60.21$ (начало)

		C	D	E	F	
$\bar{1}$	$\bar{2}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	
0	0	e a c f b d	e a c f b d	e a c f b d	e a c f b d	
1		6 0 2 1	6 0 2 1	6 0 2 1	6 0 2 1	
2		0 $x_1 x_2 x_3$	0 $x_1 x_2 x_3$	0 $x_1 x_2 x_3$	0 $2 x_2 x_3$	
3		9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	
4	Π	q^1 9 . . .	9 . . .	9 4 . .	9 4 . .	
5		1	\bar{q}^1 5 . .	5 . .	5 . .	5 7 .
6		m^1	1 .	1 .	
7		p^1 9 . . .	9 7 . .	9 7 . .	9 7 . .	
8		0	q^0 2 . .	2 . .	2 . .	2 1 .
9			\bar{q}^0 0 .	0 .	0 .	0 9
10			m^0
11			p^0 2 . .	2 . .	2 . .	2 . .
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$ 6 .	6 .	6 .	6 0
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$ 7	7	7	7
14			$m^{\bar{1}}$			
15			$p^{\bar{1}}$ 6 .	6 .	6 .	6 .
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$ 8	8	8	8
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$			
18			$m^{\bar{2}}$			
19			$p^{\bar{2}}$ 8	8	8	8
20		Σ	$\binom{1}{1}$ Σ^1 9 . . .	9 7 . .	9 7 . .	9 7 . .
21			p^0 2 . .	2 . .	2 . .	2 . .
22			$\binom{1}{0}$ n^0 . .	3 .	3 .	3 .
23	Σ^0 9 4 . .		9 4 7 .	9 4 7 .	9 4 7 .	
24	$\binom{1}{\bar{1}}$		$p^{\bar{1}}$ 6 .	6 .	6 .	6 .
25			$n^{\bar{1}}$.	2	2	2
26			$\Sigma^{\bar{1}}$ 9 4 5 .	9 4 5 4	9 4 5 4	9 4 5 4
27			$p^{\bar{2}}$ 8	8	8	8
28	$\binom{1}{\bar{2}}$ $n^{\bar{2}}$					
29	$\Sigma^{\bar{2}}$ 9 4 5 1		9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	

ТАБЛИЦА 4.9. Левое деление $945.1 \overset{2}{\underset{0}{\setminus}} 60.21$ (продолжение)

		G	H	I	J	
$\bar{1}$	$\bar{2}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 1 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	
0	0	e a c f b d	e a c f b d	e a c f b d	e a c f b d	
1		6 0 2 1	6 0 2 1	6 0 2 1	6 0 2 1	
2		0 2 $x_2 x_3$	0 2 $x_2 x_3$	0 2 $x_2 x_3$	0 2 4 x_3	
3		9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	
4	Π	q^1 9 4 . .	9 4 . .	9 4 3 .	9 4 3 .	
5		1	\bar{q}^1 5 7 .	5 7 .	5 7 .	5 7 0
6		m^1 1 .	1 .	1 0	1 0	
7		p^1 9 7 . .	9 7 4 .	9 7 4 .	9 7 4 .	
8		0	q^0 2 1 .	2 1 .	2 1 .	2 1 8
9			\bar{q}^0 0 9	0 9	0 9	0 9
10			m^0 5	5	5	5
11			p^0 2 3 .	2 3 .	2 3 .	2 3 .
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$ 6 0	6 0	6 0	6 0
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$ 7	7	7	7
14			$m^{\bar{1}}$			
15			$p^{\bar{1}}$ 6 3	6 3	6 3	6 3
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$ 8	8	8	8
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$			
18			$m^{\bar{2}}$			
19			$p^{\bar{2}}$ 8	8	8	8
20		Σ	$\binom{1}{\bar{1}}$ Σ^1 9 7 . .	9 7 4 .	9 7 4 .	9 7 4 .
21			p^0 2 3 .	2 3 .	2 3 .	2 3 .
22			$\binom{1}{0}$ n^0 3 .	3 9	3 9	3 9
23	Σ^0 9 4 7 .		9 4 7 5	9 4 7 5	9 4 7 5	
24	$\binom{1}{\bar{1}}$		$p^{\bar{1}}$ 6 3	6 3	6 3	6 3
25			$n^{\bar{1}}$ 2	2	2	2
26			$\Sigma^{\bar{1}}$ 9 4 5 4	9 4 5 4	9 4 5 4	9 4 5 4
27	$\binom{1}{\bar{2}}$		$p^{\bar{2}}$ 8	8	8	8
28			$n^{\bar{2}}$			
29		$\Sigma^{\bar{2}}$ 9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	9 4 5 1	

ТАБЛИЦА 4.10. Левое деление $945.1 \setminus_{0}^2 60.21$ (окончание)

		K	L	M	
$\bar{1}$		$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$	$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$	$2 \ 1 \ 0 \mid \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$	
0		$e \ a \ c \mid f \ b \ d$	$e \ a \ c \mid f \ b \ d$	$e \ a \ c \mid f \ b \ d$	
1		$6 \ 0 \mid 2 \ 1$	$6 \ 0 \mid 2 \ 1$	$6 \ 0 \mid 2 \ 1$	
2		$0 \mid 2 \ 4 \ x_{\bar{3}}$	$0 \mid 2 \ 4 \ x_{\bar{3}}$	$0 \mid 2 \ 4 \ 3$	
3		$9 \ 4 \ 5 \mid 1$	$9 \ 4 \ 5 \mid 1$	$9 \ 4 \ 5 \mid 1$	
4	II	$q^1 \ 9 \ 4 \ 3 \mid \cdot$	$9 \ 4 \ 3 \mid \cdot$	$9 \ 4 \ 3 \mid 5$	
5		1	$\bar{q}^1 \ 5 \ 7 \mid 0$	$5 \ 7 \mid 0$	$5 \ 7 \mid 0$
6		$m^1 \ 1 \mid 0$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$	
7		$p^1 \ 9 \ 7 \ 4 \mid \cdot$	$9 \ 7 \ 4 \mid 7$	$9 \ 7 \ 4 \mid 7$	
8		0	$q^0 \ 2 \ 1 \mid 8$	$2 \ 1 \mid 8$	$2 \ 1 \mid 8$
9			$\bar{q}^0 \ 0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$
10			$m^0 \ \mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$
11			$p^0 \ 2 \ 3 \mid 5$	$2 \ 3 \mid 5$	$2 \ 3 \mid 5$
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}} \ 6 \mid 0$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$
13			$\bar{q}^{\bar{1}} \ \mid 7$	$\mid 7$	$\mid 7$
14			$m^{\bar{1}} \ \mid$	\mid	\mid
15			$p^{\bar{1}} \ 6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}} \ \mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$
17			$\bar{q}^{\bar{2}} \ \mid$	\mid	\mid
18			$m^{\bar{2}} \ \mid$	\mid	\mid
19			$p^{\bar{2}} \ \mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$
20		Σ	$\binom{1}{1} \Sigma^1 \ 9 \ 7 \ 4 \mid \cdot$	$9 \ 7 \ 4 \mid 7$	$9 \ 7 \ 4 \mid 7$
21			$p^0 \ 2 \ 3 \mid 5$	$2 \ 3 \mid 5$	$2 \ 3 \mid 5$
22			$\binom{1}{0} n^0 \ 3 \mid 9$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$
23	$\Sigma^0 \ 9 \ 4 \ 7 \mid 5$		$9 \ 4 \ 7 \mid 5$	$9 \ 4 \ 7 \mid 5$	
24	$\binom{1}{\bar{1}}$		$p^{\bar{1}} \ 6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
25			$n^{\bar{1}} \ \mid 2$	$\mid 2$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar{1}} \ 9 \ 4 \ 5 \mid 4$	$9 \ 4 \ 5 \mid 4$	$9 \ 4 \ 5 \mid 4$
27	$\binom{1}{\bar{2}}$		$p^{\bar{2}} \ \mid 8$	$\mid 8$	$\mid 8$
28			$n^{\bar{2}} \ \mid$	\mid	\mid
29		$\Sigma^{\bar{2}} \ 9 \ 4 \ 5 \mid 1$	$9 \ 4 \ 5 \mid 1$	$9 \ 4 \ 5 \mid 1$	

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГРАФИКИ DR -РАЗНООБРАЗИЙ

Все функции, изображенные на графиках ниже, являются однозначными. Буквенное окончание индекса функции, как, например, у f_{16A} , f_{16B} , указывает на то, что это графики одной функции, которые, либо изображают разные ее интервалы, либо ее подынтервалы с меньшим приращением Δx .

Примечание А.1. Графики функций f_{16A} , f_{19} , f_{20} , f_{21B} (с.с. 52, 54, 55 соответственно) в целях облегчения файлов изображены с неполным набором точек, но передают характер функций достаточно точно для целей демонстрации. Удалялись только точки, находящиеся очень близко друг от друга, что сохранило адекватность графиков. Для краткости, их приращения Δx в подрисуночных определениях указаны для полного набора точек; фактическое соответствие «интервал x — приращение Δx » перечислено ниже:

- (1) f_{16A} , f_{19} и f_{20} :
 $[0, 20000)$, $[40000, 50000)$ — $\Delta x = 10^1$;
 $[20000, 40000)$, $[50000, 100000)$ — $\Delta x = 10^2$;
- (2) f_{21B} :
 $[0, 1000)$, $[8000, 10000)$, $[22000, 23000)$,
 $[34000, 35000)$, $[36000, 37000)$, $[38000, 39000)$,
 $[52000, 54000)$, $[55000, 57000)$, $[81000, 82000)$, $[87000, 89000)$ — $\Delta x = 10^0$;
 $[1000, 8000)$, $[20000, 22000)$, $[23000, 34000)$, $[35000, 36000)$,
 $[37000, 38000)$, $[39000, 40000)$, $[50000, 52000)$, $[54000, 55000)$,
 $[57000, 60000)$, $[80000, 81000)$, $[82000, 87000)$, $[89000, 90000)$ — $\Delta x = 10^1$;
 $[10000, 20000)$, $[40000, 50000)$, $[60000, 80000)$, $[90000, 100000)$ — $\Delta x = 10^2$.

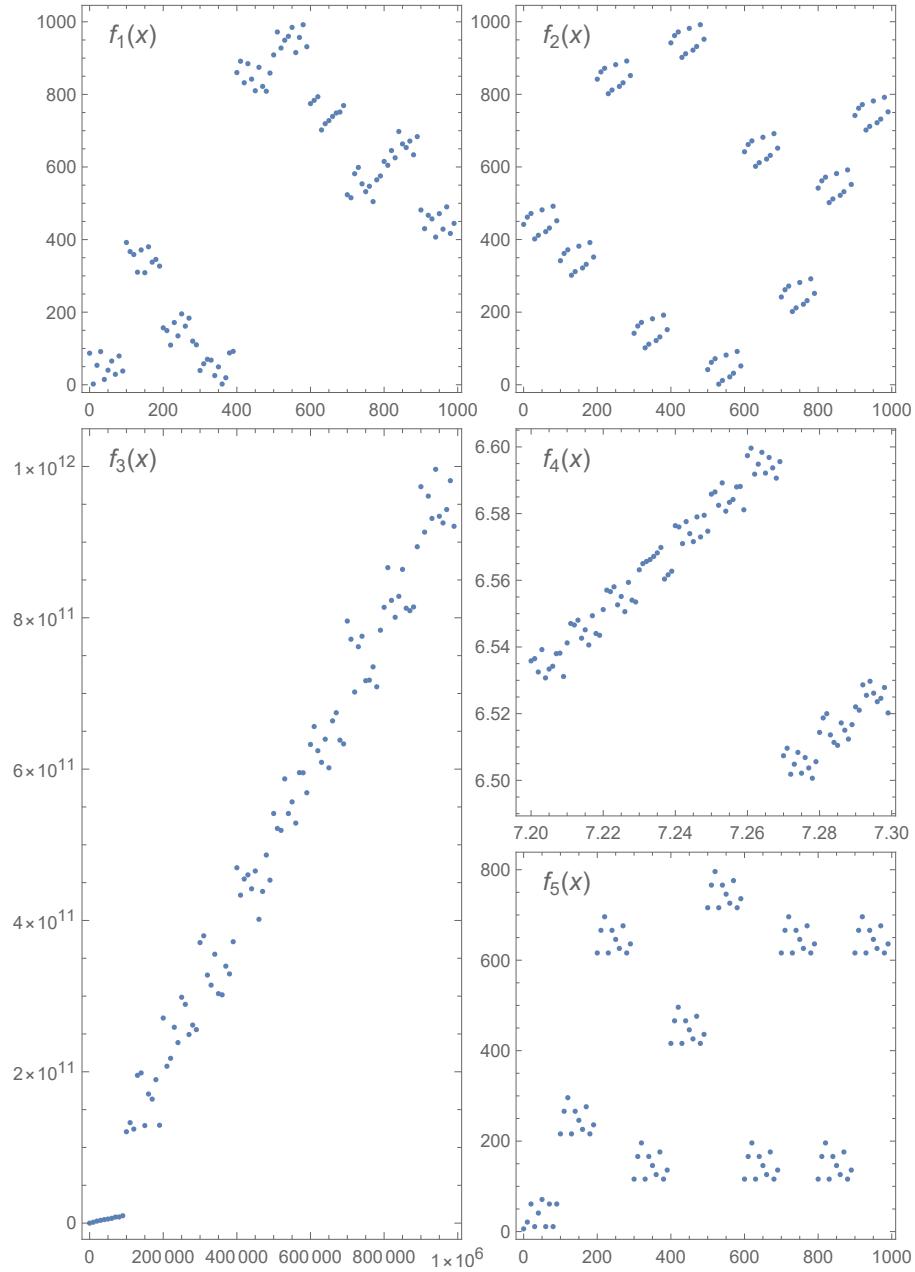


Рис. 1. Определения:

$$f_1(x) = 12.3456 +_2 x, \quad \Delta x = 10$$

$$f_2(x) = x +_4 987.654, \quad \Delta x = 10$$

$$f_3(x) = x *_2^0 x, \quad \Delta x = 10^4$$

$$f_4(x) = x \frac{0.123456}{2}, \quad \Delta x = 10^{-3}$$

$$f_5(x) = x \frac{1}{6} x, \quad \Delta x = 10$$

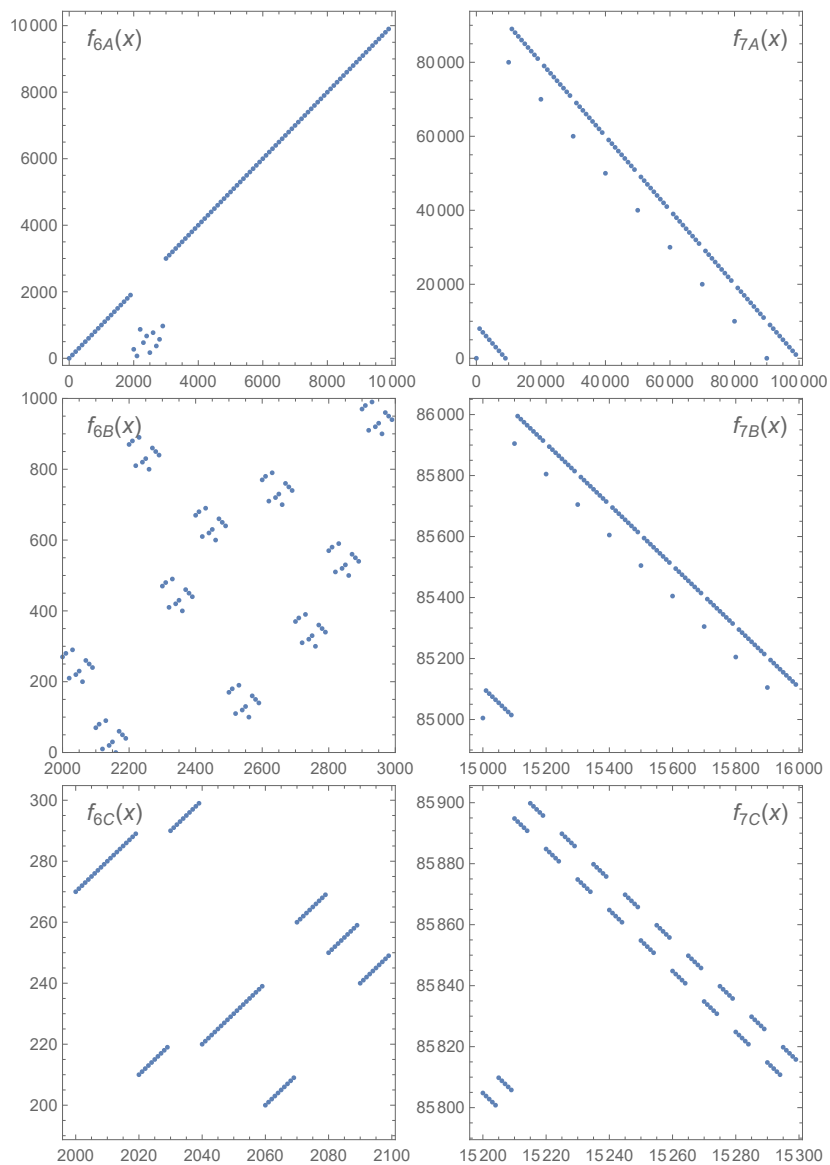


Рис. 2. Определения:

$$\begin{aligned}
 f_{6A}(x) &= 987.654 \underset{4}{+} (x \underset{4}{\tau} 987.654), & \Delta x &= 10^2 \\
 f_{6B}(x) &= f_{6A}(x), x \in [2000, 3000], & \Delta x &= 10 \\
 f_{6C}(x) &= f_{6A}(x), x \in [2000, 2100], & \Delta x &= 1 \\
 f_{7A}(x) &= [(a(x) \underset{2}{*} b(x)) \underset{4}{\div} (c(x) \underset{3}{\div} b(x))] \underset{8}{\tau} x, & \Delta x &= 10^3 \\
 a(x) &= (x \underset{0}{\tau} 199992.34) \underset{1}{\lambda}^8 x, \\
 b(x) &= (x \underset{8}{*} x) \underset{0}{\div} (x \underset{8}{*} x), c(x) = (a(x) \underset{2}{*} b(x)) \underset{3}{*} x, \\
 f_{7B}(x) &= f_{7A}(x), x \in [15000, 16000], & \Delta x &= 10 \\
 f_{7C}(x) &= f_{7A}(x), x \in [15200, 15300], & \Delta x &= 1
 \end{aligned}$$

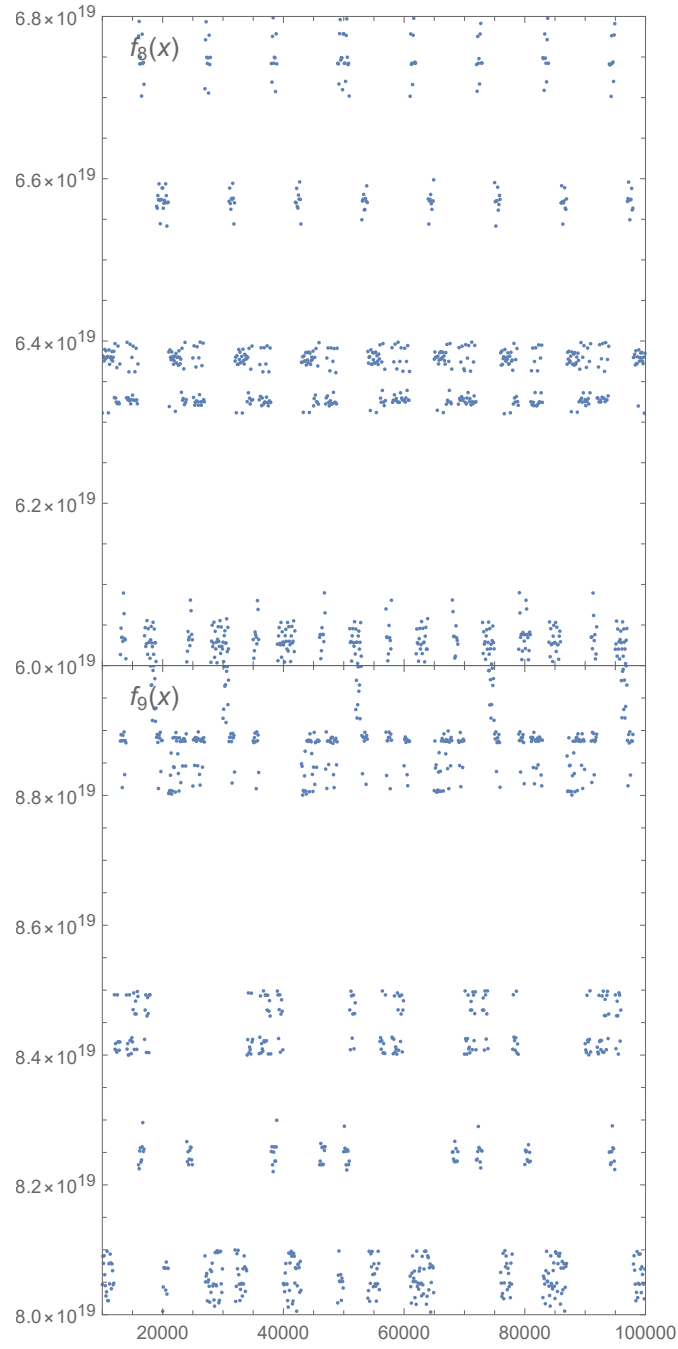


Рис. 3. Определения:

$$f_8(x) = [(x *_{6} x) \overline{5} x] *_{4}^0 [(x *_{6} x) \overline{5} x], \quad \Delta x = 10^2$$

$$f_9(x) = [(x *_{6}^7 x) \overline{5} x] *_{4}^3 [(x *_{6}^7 x) \overline{5} x], \quad \Delta x = 10^2$$

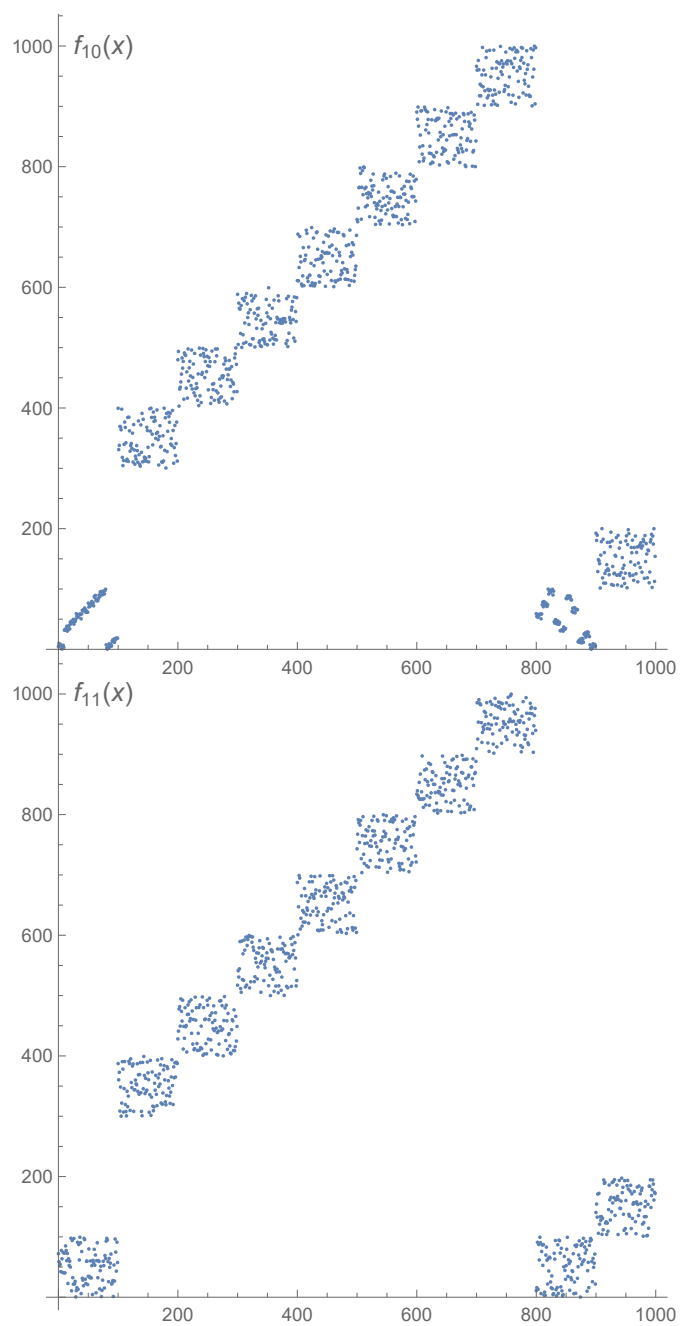


Рис. 4. Определения:

$$f_{10}(x) = [(5.55 \frac{1}{3} x)]^{\frac{5}{2}} [(5.55 \frac{1}{3} x)] *_{\frac{5}{4}} (5.55 \frac{1}{3} x), \quad \Delta x = 1$$

$$f_{11}(x) = [(5.55 \frac{1}{3} x)]^{\frac{5}{2}} [(5.55 \frac{1}{3} x)] *_{\frac{5}{4}} (8.88 \frac{1}{3} x), \quad \Delta x = 1$$

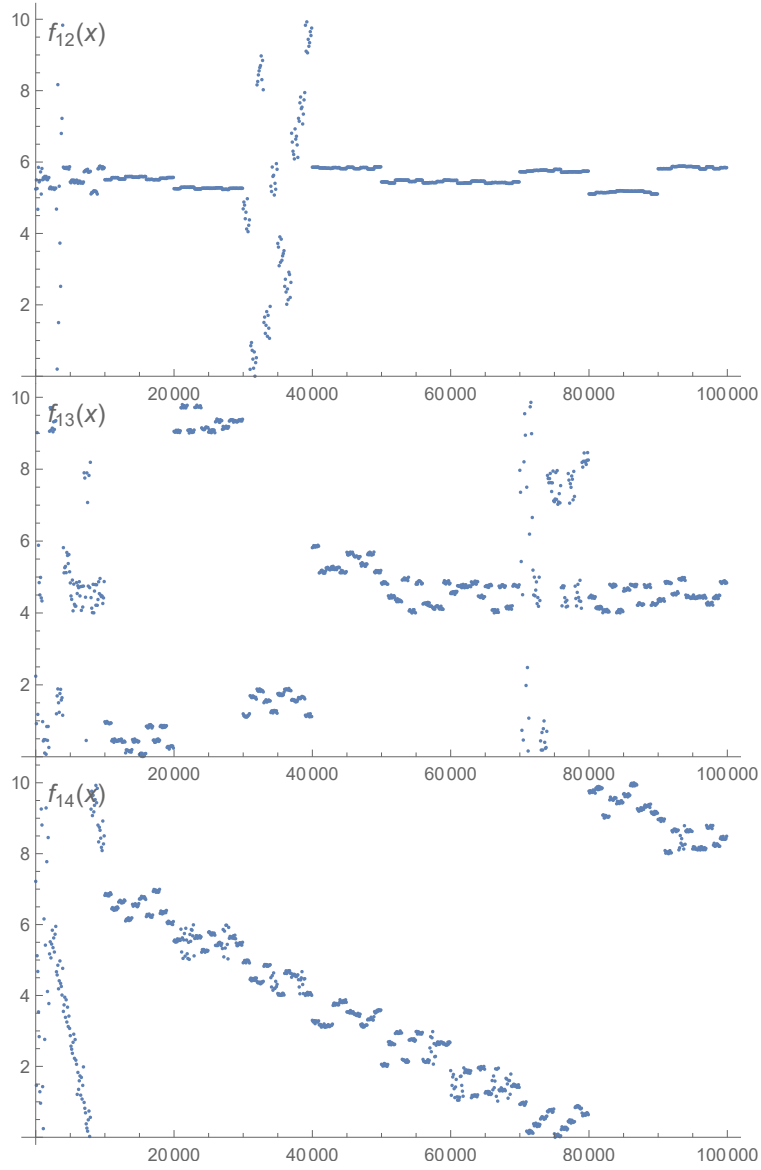


Рис. 5. Определения:

$$f_{12}(x) = [((x \text{ } \overset{6}{+}_0 \text{ } 12.34) \text{ } \overset{6}{/}_1 \text{ } x) \text{ } \overset{2}{*}_2 \text{ } a(x)] \text{ } \overset{2}{/}_4 \text{ } [(98.76 \text{ } \overset{6}{*}_3 \text{ } x) \text{ } \overset{6}{/}_3 \text{ } x], \quad \Delta x = 10^2$$

$$a(x) = (x \text{ } \overset{1}{*}_1 \text{ } x) \text{ } \overset{1}{/}_2 \text{ } (x \text{ } \overset{1}{*}_1 \text{ } x),$$

$$f_{13}(x) = (c(x) \text{ } \overset{0}{*}_2 \text{ } b(x)) \text{ } \overset{2}{/}_4 \text{ } [(c(x) \text{ } \overset{0}{*}_2 \text{ } b(x)) \text{ } \overset{7}{*}_3 \text{ } x] \text{ } \overset{6}{/}_3 \text{ } b(x), \quad \Delta x = 10^2$$

$$b(x) = (x \text{ } \overset{1}{*}_1 \text{ } x) \text{ } \overset{2}{/}_6 \text{ } (x \text{ } \overset{1}{*}_1 \text{ } x), \quad c(x) = (x \text{ } \overset{0}{-}_0 \text{ } 12.34) \text{ } \overset{8}{/}_1 \text{ } x,$$

$$f_{14}(x) = [(d(x) \text{ } \overset{0}{*}_2 \text{ } e(x)) \text{ } \overset{2}{/}_4 \text{ } f(x)] \text{ } \overset{7}{/}_7 \text{ } d(x), \quad \Delta x = 10^2$$

$$d(x) = (x \text{ } \overset{0}{-}_0 \text{ } 199992.34) \text{ } \overset{8}{/}_1 \text{ } x, \quad e(x) = (x \text{ } \overset{1}{*}_8 \text{ } x) \text{ } \overset{2}{/}_0 \text{ } (x \text{ } \overset{1}{*}_8 \text{ } x),$$

$$f(x) = [(d(x) \text{ } \overset{0}{*}_2 \text{ } e(x)) \text{ } \overset{7}{*}_3 \text{ } x] \text{ } \overset{4}{/}_3 \text{ } e(x),$$

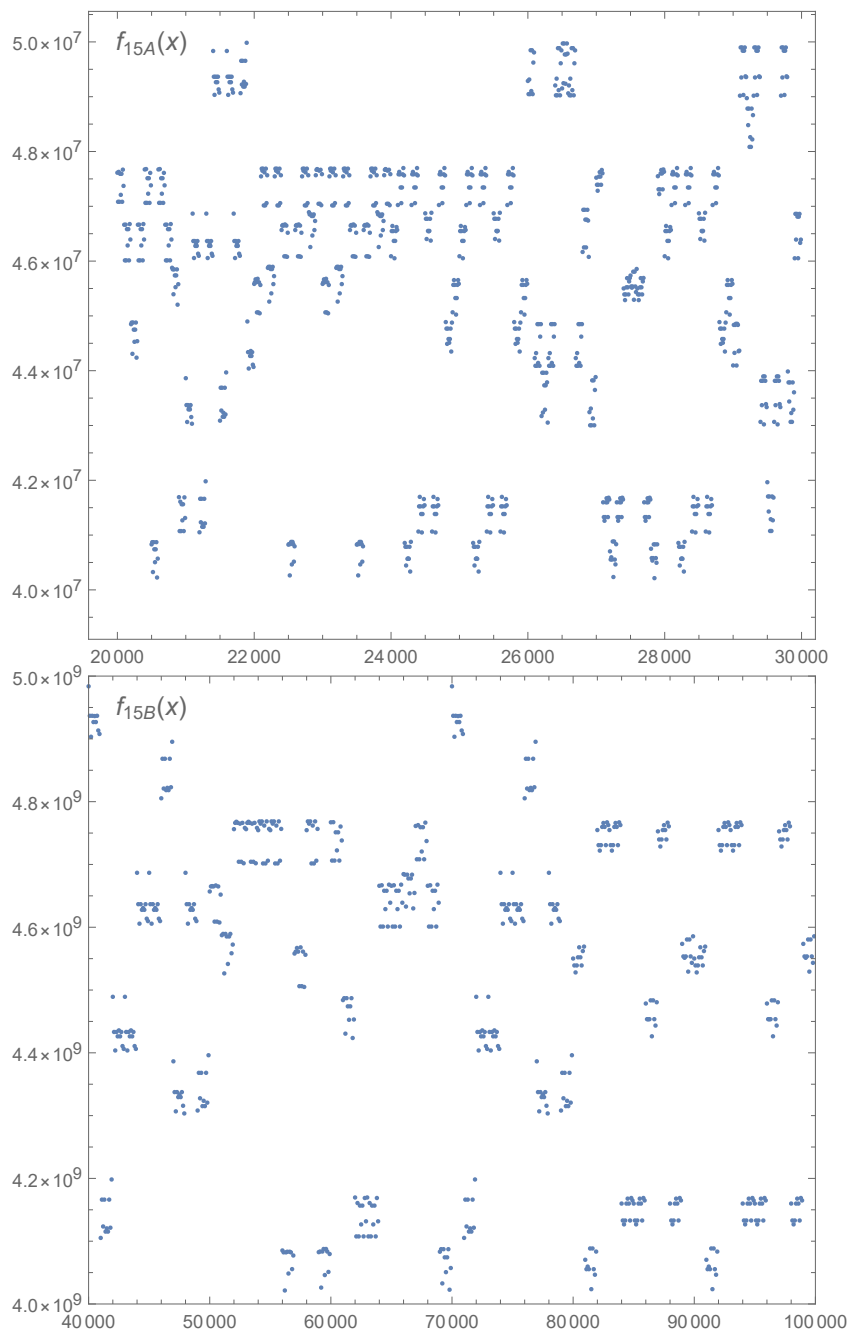


Рис. 6. Определения:

$$f_{15A}(x) = [(x \overline{6} x) \overline{5} x] *_4^7 [(x \overline{6} x) \overline{5} x], \quad \Delta x = 10$$

$$f_{15B}(x) = f_{15A}(x), \quad \Delta x = 10^2$$

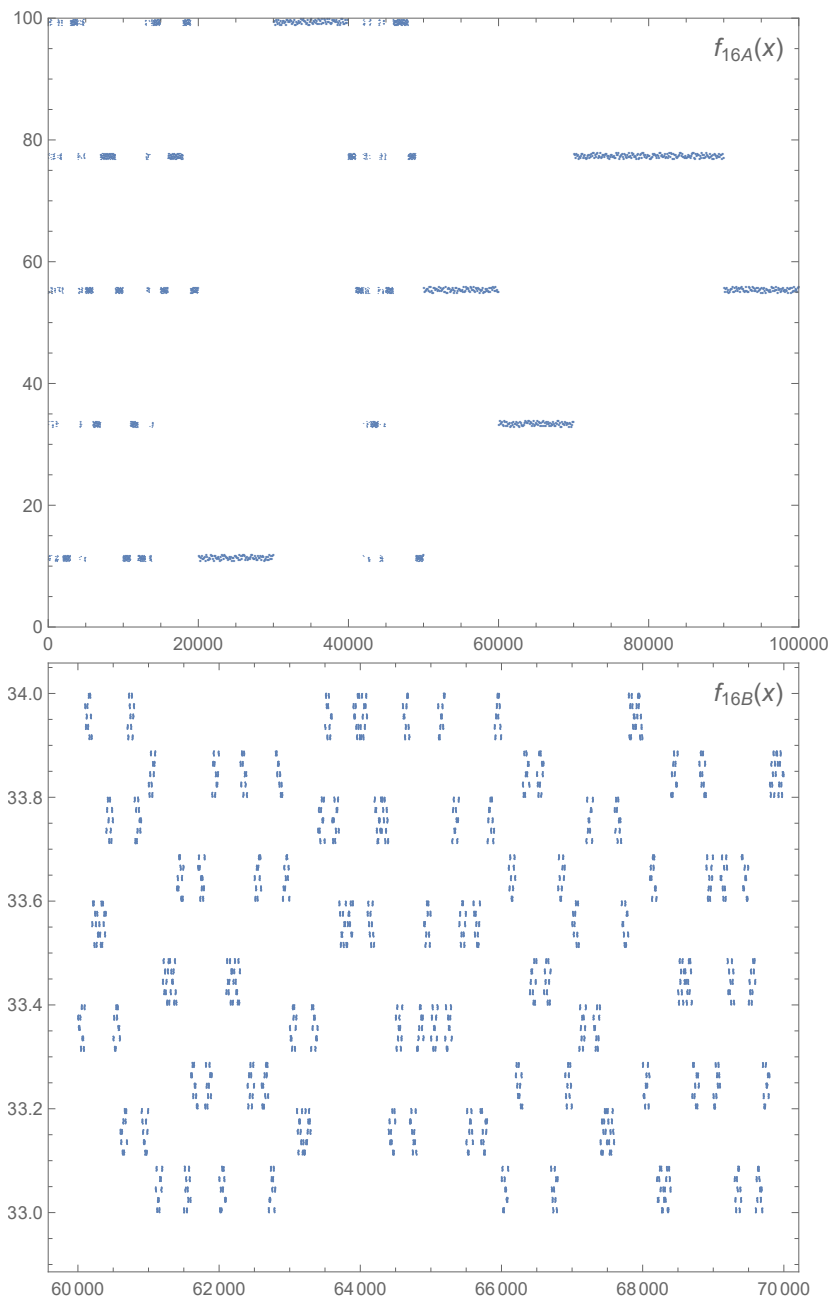


Рис. 7. Определения:

$$f_{16A}(x) = (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)) * \overset{8}{\otimes} (a(x) \overset{4}{/}_3 b(x)), \quad \Delta x = 10$$

$$a(x) = (x \overset{+}{_0} 248.136) \overset{0}{_2} \backslash (11.22 \overset{8}{/}_1 x),$$

$$b(x) = (767.01 * \overset{1}{_8} x) \overset{+}{_3} (x \overset{-}{_0} 903.425),$$

$$f_{16B}(x) = f_{16A}(x), \quad \Delta x = 1$$

См. примечание А.1 на с. 45.

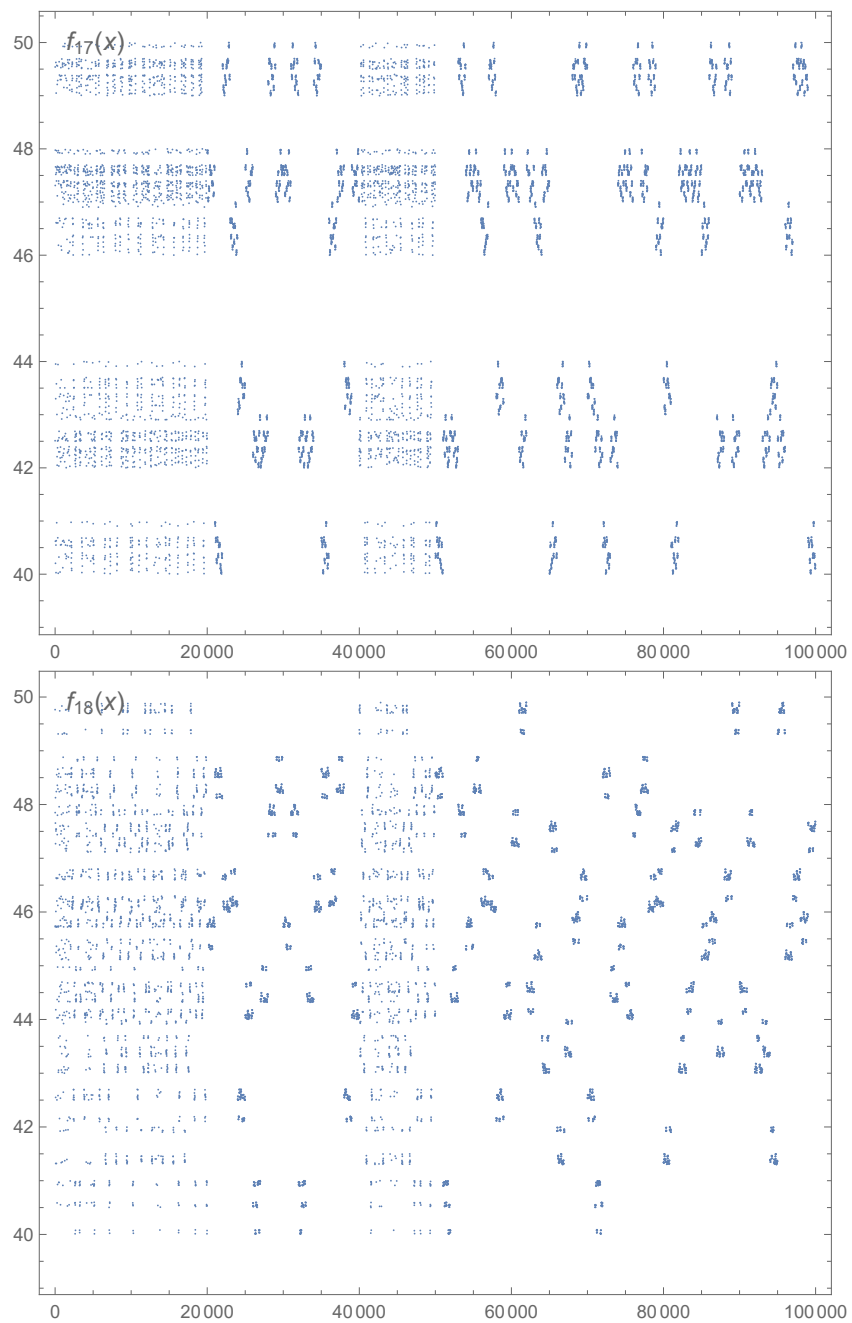


Рис. 8. Определения:

$$f_{17}(x) = (a(x) \frac{4}{3} b(x)) *_{5}^6 (a(x) \frac{4}{3} b(x)), \quad \Delta x = 10$$

$$a(x) = (x +_0 248.136) \frac{0}{2} (11.22 \frac{8}{1} x),$$

$$b(x) = (767.01 *_{8}^1 x) \frac{+}{3} (x \frac{-}{0} 903.425),$$

$$f_{18}(x) = (a(x) \frac{4}{3} b(x)) *_{8}^7 (a(x) \frac{4}{3} b(x)), \quad \Delta x = 10$$

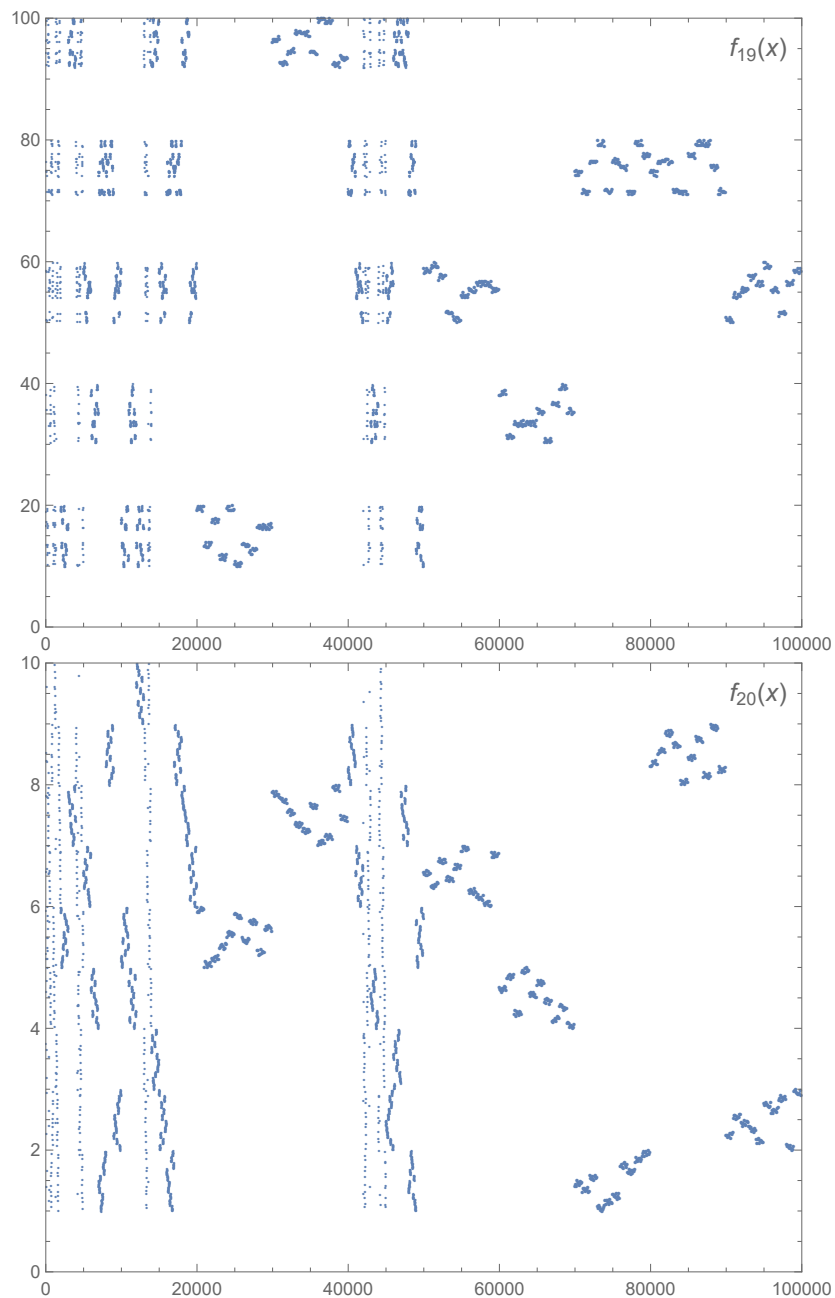


Рис. 9. Определения:

$$f_{19}(x) = (a(x) \frac{4}{3} b(x)) *_{0}^{8} (a(x) \frac{4}{3} b(x)), \quad \Delta x = 10$$

$$a(x) = (x +_{0} 248.136) \frac{0}{2} \setminus (11.22 \frac{8}{1} x),$$

$$b(x) = (767.01 *_{8}^1 x) +_{3} (x -_{0} 903.425),$$

$$f_{20}(x) = (a(x) \frac{4}{3} b(x)) \frac{2}{3} (a(x) \frac{4}{3} b(x)), \quad \Delta x = 10$$

См. примечание А.1 на с. 45.

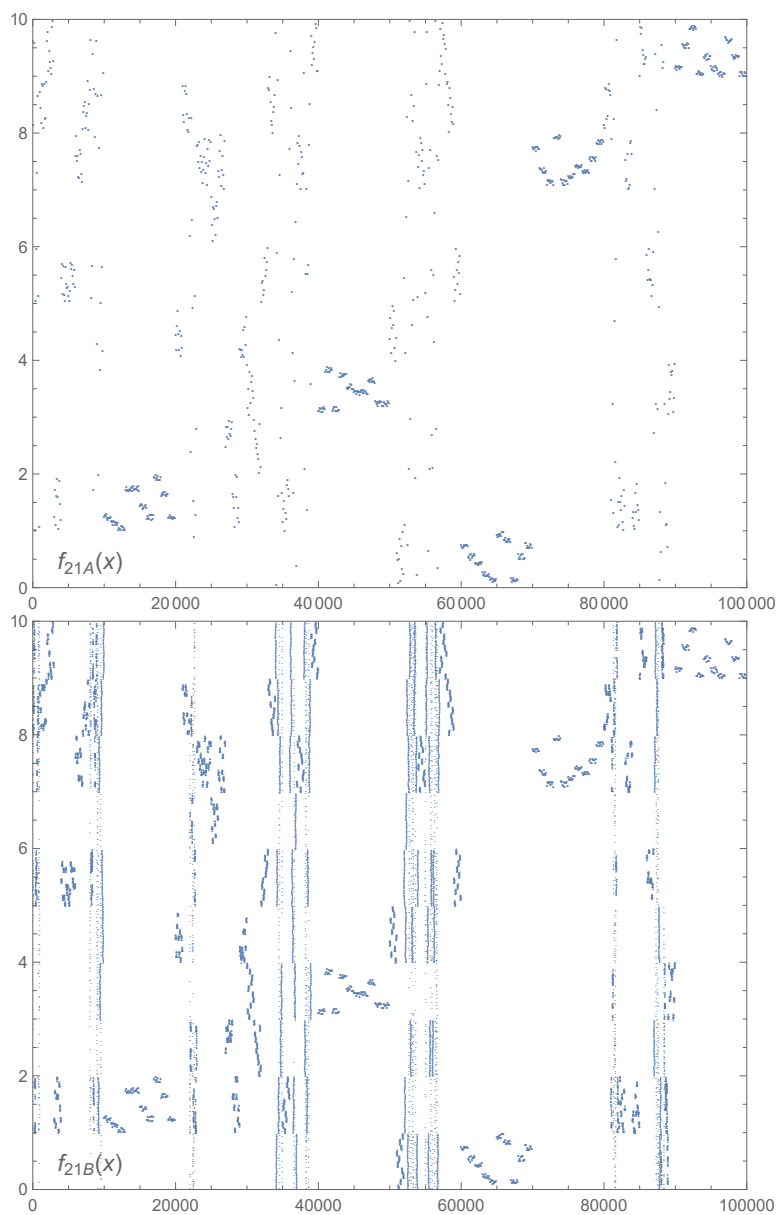


Рис. 10. Определения:

$$f_{21A}(x) = d(x) \text{ }_8^8 \{ [(a(x) \text{ }_2^0 b(x)) \text{ }_3^7 b(x)] \text{ }_4^2 c(x) \}, \quad \Delta x = 10^2$$

$$a(x) = (x \text{ }_0^9 98765.43) \text{ }_1^8 5.43,$$

$$b(x) = (x \text{ }_8^1 5.43) \text{ }_0^2 (x \text{ }_8^1 5.43),$$

$$c(x) = [(a(x) \text{ }_2^0 b(x)) \text{ }_3^7 b(x)] \text{ }_3^4 b(x),$$

$$d(x) = \{ [(a(x) \text{ }_2^0 b(x)) \text{ }_3^7 b(x)] \text{ }_4^2 c(x) \} \text{ }_0^0 c(x),$$

$$f_{21B}(x) = f_{21A}(x), \quad \Delta x = 1$$

См. примечание А.1 на с. 45.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ТАБЛИЦЫ ОПЕРАЦИЙ

Таблица В.1: Таблицы операций.

<i>0</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	48	15	91	87	23	74	36	59	62
1	35	11	67	82	29	98	40	53	04	76
2	61	57	22	49	95	06	38	80	73	14
3	19	86	54	33	70	42	97	01	65	28
4	93	20	08	56	44	71	85	69	12	37
5	84	63	30	78	16	55	09	92	27	41
6	47	02	79	25	51	34	66	18	90	83
7	26	94	43	10	68	89	52	77	31	05
8	72	39	96	64	03	17	21	45	88	50
9	58	75	81	07	32	60	13	24	46	99
<i>1</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	02	97	43	65	16	70	54	81	29	38
1	79	14	95	40	57	33	81	06	68	22
2	40	63	28	87	31	16	75	52	94	09
3	64	09	70	36	22	81	48	95	13	57
4	57	38	66	71	43	29	92	10	05	84
5	85	40	19	22	94	58	06	63	37	71
6	23	56	31	09	88	94	60	47	72	15
7	38	25	87	93	00	42	19	74	51	66
8	91	72	54	18	65	07	33	29	86	40
9	16	81	02	54	79	65	27	38	40	93
<i>2</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	20	38	19	07	85	96	74	52	63	41
1	89	01	54	96	12	47	63	28	70	35
2	67	94	02	75	41	23	58	16	39	80
3	08	46	75	83	69	52	31	90	24	17
4	56	72	31	68	24	10	89	45	07	93
5	14	69	83	42	97	35	20	71	56	08
6	95	23	47	51	30	78	16	09	82	64
7	73	15	60	39	58	04	92	87	41	26
8	41	87	26	10	73	69	05	34	98	52
9	32	50	98	24	06	81	47	63	15	79

<i>3</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	80	97	18	29	31	42	53	64	05	76
1	69	10	86	31	28	53	42	75	94	07
2	07	42	30	94	13	89	61	58	76	25
3	38	05	23	10	72	61	97	46	89	54
4	56	39	05	73	40	27	14	82	61	98
5	74	61	57	06	85	90	38	29	43	12
6	25	84	92	68	09	36	70	13	57	41
7	13	76	41	87	54	08	25	90	32	69
8	41	28	64	52	96	75	09	37	10	83
9	92	53	79	45	67	14	86	01	28	30
<i>4</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	22	32	12	02	82	92	72	52	62	42
1	82	02	52	92	12	42	62	22	72	32
2	62	92	02	72	42	22	52	12	32	82
3	02	42	72	82	62	52	32	92	22	12
4	52	72	32	62	22	12	82	42	02	92
5	12	62	82	42	92	32	22	72	52	02
6	92	22	42	52	32	72	12	02	82	62
7	72	12	62	32	52	02	92	82	42	22
8	42	82	22	12	72	62	02	32	92	52
9	32	52	92	22	02	82	42	62	12	72
<i>5</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	40	10	90	80	20	70	30	50	60
1	30	10	60	80	20	90	40	50	00	70
2	60	50	20	40	90	00	30	80	70	10
3	10	80	50	30	70	40	90	00	60	20
4	90	20	00	50	40	70	80	60	10	30
5	80	60	30	70	10	50	00	90	20	40
6	40	00	70	20	50	30	60	10	90	80
7	20	90	40	10	60	80	50	70	30	00
8	70	30	90	60	00	10	20	40	80	50
9	50	70	80	00	30	60	10	20	40	90
<i>6</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	45	75	35	95	05	65	25	85	55	15
1	15	45	75	35	95	05	65	25	85	55
2	55	15	45	75	35	95	05	65	25	85
3	85	55	15	45	75	35	95	05	65	25
4	25	85	55	15	45	75	35	95	05	65
5	65	25	85	55	15	45	75	35	95	05
6	05	65	25	85	55	15	45	75	35	95
7	95	05	65	25	85	55	15	45	75	35
8	35	95	05	65	25	85	55	15	45	75
9	75	35	95	05	65	25	85	55	15	45

7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	45	76	35	96	05	66	25	86	55	16
1	15	46	75	36	95	06	65	26	85	56
2	55	16	45	76	35	96	05	66	25	86
3	85	56	15	46	75	36	95	06	65	26
4	25	86	55	16	45	76	35	96	05	66
5	65	26	85	56	15	46	75	36	95	06
6	05	66	25	86	55	16	45	76	35	96
7	95	06	65	26	85	56	15	46	75	36
8	35	96	05	66	25	86	55	16	45	76
9	75	36	95	06	65	26	85	56	15	46

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	99	88	77	66	55	44	33	22	11	00
1	88	77	66	55	44	33	22	11	00	99
2	77	66	55	44	33	22	11	00	99	88
3	66	55	44	33	22	11	00	99	88	77
4	55	44	33	22	11	00	99	88	77	66
5	44	33	22	11	00	99	88	77	66	55
6	33	22	11	00	99	88	77	66	55	44
7	22	11	00	99	88	77	66	55	44	33
8	11	00	99	88	77	66	55	44	33	22
9	00	99	88	77	66	55	44	33	22	11

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] DeBenedictis, E.A., Chory, E.J., Gretton, D.W. et al. Systematic molecular evolution enables robust biomolecule discovery. *Nat Methods* 19, 55–64 (2022).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01348-4>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [2] Delgado, R.N., Allen, D.E., Keefe, M.G. et al. Individual human cortical progenitors can produce excitatory and inhibitory neurons. *Nature* (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04230-7>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [3] Shim, H.S., Horner, J.W., Wu, C.J. et al. Telomerase reverse transcriptase preserves neuron survival and cognition in Alzheimer’s disease models. *Nat Aging* 1, 1162–1174 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s43587-021-00146-z>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [4] Liu, K., Deng, S., Ye, C. et al. Mapping single-cell-resolution cell phylogeny reveals cell population dynamics during organ development. *Nat Methods* 18, 1506–1514 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01325-x>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [5] Foley, E.D.B., Kushwah, M.S., Young, G. et al. Mass photometry enables label-free tracking and mass measurement of single proteins on lipid bilayers. *Nat Methods* 18, 1247–1252 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01261-w>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [6] Goodwin, A., Jones, E.J.H., Salomone, S. et al. INTERSTAARS: Attention training for infants with elevated likelihood of developing ADHD: A proof-of-concept randomised controlled trial. *Transl Psychiatry* 11, 644 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41398-021-01698-9>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [7] Asteria, L., Zahn, H.P., Kosch, M.N. et al. Quantum gas magnifier for sub-lattice-resolved imaging of 3D quantum systems. *Nature* 599, 571–575 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04011-2>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [8] Trapp, A., Kerepesi, C. & Gladyshev, V.N. Profiling epigenetic age in single cells. *Nat Aging* 1, 1189–1201 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s43587-021-00134-3>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [9] Graham, S.E., Clarke, S.L., Wu, K.H. et al. The power of genetic diversity in genome-wide association studies of lipids. *Nature* 600, 675–679 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-04064-3>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

- [10] Watts, S., McElroy, M., Migicovsky, Z. et al. Cannabis labelling is associated with genetic variation in terpene synthase genes. *Nat. Plants* 7, 1330–1334 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41477-021-01003-y>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [11] Zhao, D., Tian, X., Doronkin, D.E. et al. In situ formation of ZnOx species for efficient propane dehydrogenation. *Nature* 599, 234–238 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41586-021-03923-3>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [12] Akemann, W., Wolf, S., Vilette, V. et al. Fast optical recording of neuronal activity by three-dimensional custom-access serial holography. *Nat Methods* 19, 100–110 (2022).
<https://doi.org/10.1038/s41592-021-01329-7>. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)
- [13] S.E. Kochemazov, O.S. Zaikin, The search for pairs of orthogonal diagonal latin squares of order 10 in the volunteer computing project sat@home. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Computational Mathematics and Software Engineering”*, 2015, vol. 4, no. 3, (In Russian) pp. 95–108
- [14] Bruck, R.H. (1971). *A Survey of Binary Systems*. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-43119-1, section I.2

Email address: a.n.zhvanko@gmail.com