НЕМНОГО О МОДЕЛЯХ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

И.В.Коннов

Казань, e-mail: konn-igor@ya.ru

Нет царского пути в геометрии
Евклид

Почему нужны подобные статьи? Общаясь с коллегами по работе, на конференциях, семинарах и т.п., автор обратил внимание, что споры зачастую возникают не собственно по вопросам математики, а по вопросам приложений обсуждаемых результатов, то есть по вопросам адекватности используемых моделей. При этом многие докладчики часто старались как можно быстрее «проскочить» эти вопросы и перенести всё внимание на чисто математические стороны, а не останавливаться на «мелочах». Оказалось, что во многих случаях приходится повторять одни и те же аргументы и приводить одни и те же примеры, показывающие, как пренебрежение этими «мелочами» приводит к бесполезной и многозатратной работе.

Поэтому была написана статья [1], в которой в достаточно простой форме обращалось внимание на общие проблемы построения математических моделей, которые могут приводить к значительным трудностям. Потом оказалось, что такие трудности и появление неадекватных моделей могут возникать даже из-за различного смысла, вкладываемого в один и тот же термин. Подробно пример такой ситуации описан в статье [2]. Ясно, что проблемы адекватности используемых моделей заслуживают более серьезного внимания, чем то, которое им уделяется в настоящее время. Попытки просто отмахнуться от них, апеллируя к технической сложности используемого математического аппарата, либо к успешному применению подобных моделей для каких-то частных случаев или в других прикладных областях, вряд ли состоятельны.

Особенно часто появляются неадекватные модели для сложных систем, содержащих различные активные элементы со своими интересами и наборами действий, примеры таких моделей приведены в [1, 2]. При этом следует отметить, что вообще плохих или хороших моделей не бывает, всё зависит от выполнения в реальной системе набора условий, обеспечивающих достаточную применимость используемых моделей. В частности, достаточно хорошо развит аппарат математических моделей в физике, так что для многих моделей указаны границы применимости, скажем, для моделей механики твердого тела, динамики жидкости и газа и т.п. Для моделей сложных систем такие чёткие границы применимости пока отсутствует, что и побуждает хотя бы в предварительном виде обсудить эти вопросы. В настоящей статье, в дополнение к материалам из [1, 2], они обсуждаются применительно к моделям систем децентрализованного типа. Прежде всего нас интересует, можно ли указать свойства систем, которые будут соответствовать моделям данного типа? Если да, то на этой основе можно будет проводить предварительный отбор подходящей модели конкретной реальной системы.

Модели децентрализованных систем можно разбить на два больших класса. Первый класс составляют модели, в которых любой активный элемент своими действиями может изменить состояние системы в целом. Кроме того, любой активный элемент должен иметь информацию о возможностях (множествах стратегий) и интересах (функциях выигрыша или отношениях предпочтения) других элементов, в той или иной мере, иначе его действия будут бессмысленными. Ясно, что теоретико-игровые модели будет удобно использовать для описания систем этого (игрового) класса. Например, в экономике ему соответствуют модели несовершенной конкуренции. Прогнозирование поведения системы осуществляется на основе анализа состояния (траектории) равновесия, в зависимости от структуры взаимодействия активных элементов (игроков). Однако такое равновесие может существовать лишь при дополнительных ограничительных предположениях, что обычно приводит к смене исходной модели для получения удовлетворительного решения.

Смена игровой модели при использовании смешанных стратегий

Типичный пример – равновесие по Нэшу в бескоалиционной игре или даже седловая точка в матричной игре могут не существовать в исходных (чистых) стратегиях игроков. Стандартным приемом в этих условиях является переход к смешанным стратегиям. С математическим обоснованием здесь всё обстоит достаточно корректно. Исходные множества стратегий заменяются более широкими, функции выигрыша переопределяются так, чтобы на ситуациях в чистых стратегиях их значения совпадали с прежними. В итоге получаем более общую игру, точки равновесия которой существуют при вполне естественных условиях. Но в реальности всё обстоит не так просто. Если в исходной постановке у нас было полное описание однократной игры, то теперь из-за применения смешанных стратегий её требуется заменить фактически бесконечной последовательностью одинаковых игр, поскольку ожидаемое значение выигрыша в смешанных стратегиях можно будет получить лишь в пределе, согласно определению. Очевидно, что такой переход не тривиален и не всегда возможен, как, например, и явное использование долей чистых стратегий вместо целых. Конечно, бесконечное разыгрывание не обязательно, но для хорошей аппроксимации новой целевой функции количество розыгрышей должно быть достаточно большим. Более того, по соответствующей предельной теореме сходимость к пределу достигается для последовательности независимых случайных величин, а здесь игроки вполне могут использовать накопленный опыт предыдущих этапов и прийти к зависимости стратегий. Заметим, что в известном методе фиктивного разыгрывания игроки только пытаются найти свои оптимальные смешанные стратегии, используя каждый раз наилучший ответ на текущее приближение стратегий других игроков в бесконечной серии розыгрышей, а не реализуют сами оптимальные стратегии за счёт бесконечной серии случайных экспериментов. Поэтому требуется обязательная проверка выполнимости всех этих условий в рамках исходной реальной системы

Что касается часто используемого аргумента о трудности распознавания стратегии, определяемого в результате случайного эксперимента согласно вероятностям смешанной стратегии, то здесь всё зависит от информационной схемы игры. Если заменить игру многократный последовательностью и применять одну и ту же стратегию, то к ней, конечно, приспособятся другие игроки, тогда динамическая смена стратегий будет иметь явное преимущество при отсутствии равновесия. В однократной игре способ определения чистой стратегии совершенно неважен, если она становится известной другим игрокам. В этих условиях нужно уточнить саму постановку задачи, привлекая её дополнительные свойства.

Модели игрового типа при связывающих ограничениях

Во многих моделях, построенных на основе теоретико-игрового подхода, присутствуют связывающие всех игроков ограничения. Для таких задач использовалось также название - игры с запрещёнными ситуациями. Опять же математическое обоснование здесь по существу сводится к применению обобщенного понятия равновесия, после чего исследование и решение задачи проводится так же, как и в стандартном случае; см., например, [3, 4]. Однако проверка адекватности таких моделей реальной системе заслуживает достаточно серьезного внимания. Действительно, в иерархических системах такие модели выглядят вполне естественно и хорошо изучены [5, 6]. Другое дело, если общие связывающие ограничения вводятся в бескоалиционных играх. Зачастую основное внимание уделяется только решению задачи обобщенного равновесия по Нэшу и преодолению различных трудностей, связанных с невыпуклостью и немонотонностью задачи; см., например, [7]. Однако главный вопрос состоит в том, может ли данная точка обобщенного равновесия быть найдена в рамках информационной схемы бескоалиционной игры? Действительно, в бескоалиционной игре все игроки равноправны и принимают решения независимо и одновременно. Пи введении общих ограничений эта независимость теряется, поэтому необходимо указать специальный механизм достижения обобщенного состояния равновесия.

Приведём простой иллюстративный пример. Пусть имеется n предприятий, сбрасывающих отходы производства в коллектор для утилизации. Прибыль каждого предприятия определяется доходами от произведённой продукции и издержками от платы за утилизацию отходов, причём цена утилизации единицы объёма зависит от общего объёма сброса отходов производства. При отсутствии ограничений на общий объем сброса получаем игровую модель типа олигополии, с обычным равновесием по Нэшу. Но в реальности такое ограничение всегда присутствует, тогда независимое принятие решений невозможно. Если, например, при текущем векторе объёмов сброса $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ каждый i-й игрок выберет свою наилучшую реакцию y_i, то нет никакой гарантии, что вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ будет удовлетворять ограничениям по объёму. Кроме того, известные итерационные методы поиска точек равновесия неявно используют зависимость игроков друг от друга из-за связывающих ограничений, что противоречит информационной схеме бескоалиционной игры. Эти трудности подробно обсуждаются в [8, 9]. Для достижения точки равновесия в этих условиях в указанных работах предложен подход, связанный с декомпозиции по долям общих ограничений, что приводит к необходимости включения в схему верхнего уровня управления величинами долей. На нижнем уровне при заданных долях игроки находят обычные равновесия по Нэшу.

Децентрализованные модели массового типа

Помимо моделей игрового типа, достаточно часто применяются модели массового типа, где активные элементы по отдельности не могут изменить состояние всей системы своими действиями. В экономике к ним относятся модели совершенной конкуренции. При этом для выбора своих действий (стратегий) элементы могут использовать как информацию об отдельных интегральных показателях всей системы (цены на товары), так и о различных ограничениях. Здесь для описания поведения системы также используется понятие равновесия, однако оно обычно определяется в виде задачи дополнительности или вариационного неравенства [10, 11]. Основное отображение в этих задачах определяется коллективной реакцией всех элементов на текущее состояние системы. При этом сами активные элементы (потребители и производители товаров) не идентичны, поскольку могут использовать различные функции полезности (в неоклассических моделях) и учитывать различные технологические и информационные ограничения. Тем не менее, игровые модели равновесия здесь выглядят не вполне естественными из-за ограниченных возможностей участников.

Наряду с ними существуют задачи с большим количеством идентичных элементов, для которых тоже применялись игровые модели. К ним относится модель выбора способа передвижения [12, гл.III, пример 1]. В максимально упрощённом виде в ней описан выбор жителей некоторого города между общественным и личным транспортом при поездке, причём издержки отдельного участника зависят от распределения долей и всех горожан между этими способами. Как показано в [13], эта задача достаточно просто формулируется в виде вариационного неравенства. Определим допустимое множество распределения долей горожан по способам передвижения

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\},$$

пусть $a_i(x_i)$ – издержки i-го способа передвижения при доле его выбора x_i горожанами. Поскольку население может быть достаточно большим, то отдельный участник не использует информацию о действиях других и точка равновесия будет определяться условиями:

$$\exists \bar{\lambda}, \quad a_i(\bar{x}_i) \begin{cases} \geq \bar{\lambda} & \text{при } \bar{x}_i = 0, \\ = \bar{\lambda} & \text{при } \bar{x}_i > 0; \end{cases} \text{ для } i = 1, 2.$$

Это условия равновесия односторонней рыночной системы с фиксированным общим спросом, где способы передвижения играют роль продавцов услуги, а функции $a_i(x_i)$ – цен на услугу. Эта задача равновесия эквивалентна вариационному неравенству: найти $x \in X$, такой что

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(\bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i) \geq 0 \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

Такая формулировка легко обобщается на большее количество способов передвижения, а также допускает учет дополнительных условий. Например, в указанной постановке все горожане обязаны выбрать способ передвижения. А теперь рассмотрим случай, когда это необязательно, т.е. присутствует функция $h(y)$, она указывает издержки, при которых данное количество (доля) горожан согласно сделать выбор одного из m возможных способов передвижения. Тогда допустимое множество приобретёт вид:

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i = y,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

а состояние равновесия будет определяться условиями:

$$\exists \bar{\lambda}, \quad a_i(\bar{x}_i) \begin{cases} \geq \bar{\lambda} & \text{при } \bar{x}_i = 0, \\ = \bar{\lambda} & \text{при } \bar{x}_i > 0; \end{cases} \qquad h(\bar{y}) \begin{cases} \leq \bar{\lambda} & \text{при } \bar{y} = 0, \\ = \bar{\lambda} & \text{при } \bar{y} \in (0, 1), \\ \geq \bar{\lambda} & \text{при } \bar{y} = 1. \end{cases}$$

для $i = \overline{1, m}$;

Снова эти условия эквивалентны вариационному неравенству: найти $(\bar{x}, \bar{y}) \in W$, такие что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(\bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i) - h(\bar{y})(y - \bar{y}) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in W.$$

ср. с (1). Ясно, что эти постановки более естественны по сравнению с игровым равновесием в [12].

В этой модели различиями в поведении участников можно пренебречь, поскольку всё сводится только к выбору одного из способов передвижения, без учета всех остальных сопутствующих этому факторов. Поэтому количество участников может быть любым, даже бесконечным (несчетным), становится возможным переход к долям от общего количества. Такой же подход применяется в моделях сетевого (потокового) равновесия; см., например, [14, 15]. Там выбор участников также сводится к определению одного из путей, соединяющих источник и адресат на основе текущих издержек, без учета других факторов. Вообще в системах, где активные элементы оказываются идентичными по поведению, кажется более целесообразным моделировать сразу поведение групп элементов, а не каждого по отдельности. Данные модели применяются как к транспортным, так и к компьютерным (информационным) сетям, несмотря на различия в условиях функционирования. Действительно, в транспортных сетях получается модель с большим числом однотипных элементов, если пренебречь различиями в транспортных средствах и принципами выбора следующего сегмента пути их водителями, что вполне соответствует по типу описанной выше модели. В информационных сетях всё зависит от протокола передачи стандартных фрагментов сообщений (пакетов). Если топология сети простая, с небольшим количеством дуг и вершин, то оконечные абоненты сами могут выбирать наилучший маршрут передачи, исходя из текущей загрузки линий. Здесь вполне уместно будет применение модели игрового равновесия. Но в реальных сетях топология достаточно сложна, загрузка линий очень быстро меняется, поэтому оконечные абоненты не могут адекватно управлять всем процессом передачи по сети, управление осуществляют локальные маршрутизаторы, тогда система становится весьма похожий на транспортную сеть и применение модели сетевого равновесия становится более приемлемым. Это значит, что игровые модели сетевого равновесия имеют достаточно ограниченное применение. Различия в игровом и сетевом равновесии приведены, например, в [15]. Эти примеры ещё раз подчёркивают необходимость содержательного, а не поверхностного анализа исходной системы для выбора правильной модели.

Возможности применения вероятностных моделей

Прежде всего необходимо отметить существование очень большого количества работ по применению вероятностных моделей для анализа сложных систем различной природы, в том числе децентрализованных. Это обусловлено, по мнению автора, наличием мощного инструментального аппарата теории вероятностей, опирающегося, как правило, на систему аксиом А.Н. Колмогорова [16] и позволяющего находить решение довольно сложных задач по стандартной методике, в том числе в явном виде. Данные вопросы уже обсуждались в статьях [1, 2], где подчеркивалась ограниченность применения вероятностных моделей, связанная с необходимостью выполнения условий статистической устойчивости, независимости и т.п. Но главная проблема состоит в отсутствии четкого определения случайной величины и реализуемых способов проверки случайностей тех или иных событий. В результате во многих работах случайность просто вводится на основе аргумента о сложности изучаемой системы, без какого-либо обоснования, т.е. всё что не вполне точно определимо, считается случайным. Ясно, что такой подход порождает массу неадекватных моделей, поэтому применение вероятностных моделей к децентрализованным системам заслуживает серьезного внимания. Достаточно ярким примером построения неадекватных вероятностных моделей является так называемая «новая хронология».

Поэтому вначале напомним, что для задания случайной величины требуется определить пространство элементарных событий и вероятности (меры) для всех возможных событий, т.е. множеств этого пространства, после чего каждому событию ставится в соответствие значение случайной величины на нём. Таким образом, элементарные события можно ассоциировать с идентичными активными элементами, а значение события будет определяться лишь плотностью (мерой) их размещения на множестве, соответствующем этому событию, без учёта какой-то иерархии или ограничений для элементарных событий. Можно сделать вывод, что на этой основе вполне можно строить модели массового типа с идентичными элементами, например, для задач сетевого равновесия, при выполнении в системе условий случайного поведения элементов. Ситуация ненамного изменится при использовании однотипных, но не идентичных элементов, как например в цепях Маркова, поскольку поведение элементов здесь также одинаково. Распространенность подобных моделей во многом объясняется использованием успешных принципов моделирования из математической физики, достаточно подробное описание и библиографию по ним можно найти, например, в книге [17]. Однако во многих реальных сложных системах поведение активных элементов более сложное, требующее самостоятельного описания, как, например, в моделях совершенной конкуренции или в игровых моделях. Для них полное вероятностное описание системы поэтому выглядит весьма проблематичным и достаточно искусственным, как это отмечается в [1] для игр среднего поля на конкретных примерах. В то же время в моделях таких систем случайные факторы вполне могут присутствовать при задании функций и отображений, описывающих поведение самих элементов или ограничений системы, если выполняется обычные условия для их применения. Например, вряд ли имеет смысл определять модель как бескоалиционную игру, в которой все функции выигрыша игроков одинаковы с точностью до случайного отклонения, но в то же время вполне уместна бескоалиционная игра, где каждая функция выигрыша игрока может содержать свои случайные параметры. Ситуация меняется при переходе от бескоалиционных игр к кооперативным, где игроки объединяются в коалиции и координируют свои действия, подчинённые достижению максимального выигрыша коалиции. В итоге получается игра с «агрегированными» игроками-коалициями, каждый из которых определяется мерой на множестве игроков, причём это множество может быть достаточно произвольным. Здесь, конечно, модели вероятностного типа являются достаточно естественными, см., например, [18]. Эти свойства переносятся и на динамические модели.

Модели при ограниченной информации

Ограниченность доступной агентам информации является достаточно типичным свойствам децентрализованных систем, поэтому её следует в той или иной мере учитывать при построении моделей. Эти вопросы достаточно подробно обсуждаются для игровых моделей [12, 5]. Для систем массового типа обычным подходом является переход к различным вероятностным моделям [11, 19]. При этом принципиальным вопросом для определения модели является сохранение рациональности действий активных элементов. Для иллюстрации обратимся к моделям экономики в условиях совершенной конкуренции, которые уже упоминались выше как модели массового типа. Основным здесь является неоклассический подход, в котором агенты используют для выбора своих действий задачи параметрической оптимизации (максимизации полезности или прибыли), где в качестве параметров используются общие цены рыночной системы на все товары. Это значит, что неявно предполагается возможность любого агента точно определить глобальные цены на все товары при каждом состоянии рынка, а также сопоставить все имеющиеся (и будущие) товары по полезности. Из-за неточности возможных оценок этих величин обычно осуществляется переход к ожидаемым (средним) значениям функции. Но в реальности определить подлинные цены всего рынка на товары вряд ли возможно из-за наличия различных ограничений, технологических и информационных. Если агенты обладают только частичной и локальной информацией о поведении системы, то требуется пересмотр модели с сохранением рациональности поведения участников. В самом деле, если взять простейший вид задачи принятия решений как задачи оптимизации с ограничениями, то её всегда можно заменить задачей без ограничений, если известны точные значения множителей Лагранжа, к таким множителям и относятся цены в рыночных моделях и их вполне можно найти с помощью известных итерационных процессов, скажем, двойственного или прямо-двойственного типа; см., например, [20]. Однако в условиях, когда все существующие ограничения системы неизвестны агентам, такие множители (цены) будет найти очень трудно, но это не значит, что в системе отсутствует состояние равновесия, Просто оно должно определяться на основе имеющихся свойств.

Опишем такую модель, следуя [21]. В этой модели m агентов заключают сделки по купле-продаже n товаров, так что вектор $x^i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^\top$ задаёт текущие объемы сделок i-го агента, причём $x_{ij} > 0$ ($x_{ij} < 0$) определяет количество $|x_{ij}|$ проданного (купленного) j-го товара i-м агентом. Пусть $I = \{1, \dots, m\}$ для краткости. После достижения равновесия все объемы сделок фиксируются. Текущее состояние системы определяется набором $x = (x^i)_{i \in I}$. По текущему состоянию системы каждый i-й агент определяет допустимое множество объёмов сделок $Y_i(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ и допустимое множество своих цен $P_i(x) \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Оба множества определяются агентами на основе своих текущих знаний и их технологических и информационных ограничений. После этого можно определить для каждого состояния рынка x множество допустимых сделок

$$D(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{nm} \;\middle|\; \sum_{i \in I} y^i = \mathbf{0},\ y^i \in Y_i(x),\ i \in I \right\},$$

включающее условия баланса. Тогда состояние $\bar{x} \in D(\bar{x})$ будет равновесием системы, если

$$\exists \bar{p}^i \in P_i(\bar{x}),\ i \in I,\ \sum_{i \in I} \langle \bar{p}^i, y^i - \bar{x}^i \rangle \geq 0 \quad \forall y \in D(\bar{x}).$$

Иначе говоря, в состоянии равновесия $\bar{x}$ существуют текущие цены агентов $\bar{p}^i$, при которых достигается максимальная прибыль рынка в целом. При этом равновесные цены участников могут отличаться от общих цен рынка на товары, а изменение информации (ограничений) участников может приводить к смене состояния равновесия. В [21] приведены конкретные примеры задания множеств допустимых сделок и цен, а также динамических процессов изменения состояния системы. В целом такой подход кажется более приспособленным к условиям ограниченности возможностей агентов при сохранении рационального поведения.

Список литературы

[1] Коннов И.В. Немного о моделях // Препринт от 22.06.2020. http://dx.doi.org/10.24108/preprints-3111972

[2] Коннов И.В. Информация или данные? // Препринт от 21.09.2021. https://doi.org/10.24108/preprints-3112275

[3] Rosen J.B. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games// Econometrica. - 1965. - V.33,№3. - P.520–534.

[4] Зуховицкий С.И., Поляк Р.А., Примак М.Е. Вогнутые игры многих лиц// Экономика и математические методы. - 1971. - Т.7,№6. - С.888–900.

[5] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. -М.: Наука, 1976.

[6] Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. - М.: Радио и связь, 1991.

[7] Facchinei F., Kanzow C. Generalized Nash equilibrium problems // 4OR. - 2007.- V.5,№3. - P.173–210.

[8] Konnov I.V. Shares allocation methods for generalized game problems with joint constraints// Set-Valued and Variational Analysis. - 2016. - V.24, №3. - P. 499–516.

[9] Konnov I.V. Decomposable penalty method for generalized game problems with joint constraints // Optimization. - 2021. - V. 70, №12. - P.2655–2673.

[10] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

[11] Arrow K.J., Hahn F.H. General competitive analysis. New York: Holden Day, 1971.

[12] Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. - М: Мир, 1985.

[13] Konnov I.V. An alternative economic equilibrium model with different implementation mechanisms // Advanced Modeling and Optimization. - 2015. - V.17, №2. - P. 245–265.

[14] Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. - Dordrecht: Kluwer, 1999.

[15] Konnov I.V. On auction equilibrium models with network applications // Netnomics. - 2015. - V.16, №1. - P. 107–125.

[16] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974.

[17] Попков Ю.С. Теория макросистем. Равновесные модели. - М.: УРСС, 1999.

[18] Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. - М.: Мир, 1977.

[19] Borglin A. Economic dynamics and general equilibrium: Time and uncertainty. - Berlin: Springer, 2004.

[20] Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. - М.: ИЛ, 1962.

[21] Konnov I.V. Variational inequality type formulations of general market equilibrium problems with local information // Journal of Optimization Theory and Applications. - 2021. - V. 188, №2. - P.332–355.