УДК 517.51, 512.7, MSC 26E99, 14PXX

АРИФМЕТИКА $\mathbb{DR}_+$.

АЛЕКСАНДР Н. ЖВАНЬКО

Аннотация. В данной работе предлагается идея использования неклассических арифметик (НКА), идея разнообразий и арифметика $\mathbb{DR}_+$, определенная на множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел. Использование НКА — это и переиспользование конструкций, основанных на классической арифметике (КА), с другими наборами числовых алгебраических операций на бесконечных подмножествах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, и применение новых сущностей, не имеющих аналогов в КА, например, операционного уравнения, как уравнения с неизвестной арифметической операцией. Под разнообразиями понимаются: а) множества или последовательности значений функций разнообразия; б) множества решений уравнений разнообразий. Функция/уравнение разнообразия — это функция/уравнение полностью или частично снабженное НКА. Арифметика $\mathbb{DR}_+$ состоит из сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений. Каждое из действий выполнимо для любых чисел из $\mathbb{R}_+$ и это множество замкнуто по любому из действий. Указано сходство полученных вслепую графиков абстрактных функций разнообразия с опубликованными графиками реальных данных из актуальных исследований наук о жизни.

Содержание

1. Введение 2
2. Краткое описание $\mathbb{DR}_+$ 6
3. Общие соглашения и определения 8
4. Действия 10
4.1. Сложения 10
4.2. Вычитания 14
4.3. Умножения 21
4.4. Деления 30
5. Вывод 40
Приложение A. Графики DR-разнообразий 48
Приложение B. Таблицы операций 59
Список литературы 61

Date: 25 февраля 2022 года.

Key words and phrases. non-classical arithmetic, real functions, algebraic variety, diversities, неклассическая арифметика, вещественные функции, алгебраические многообразия, разнообразия.

Приложение A является частью исследования, проведенного благодаря финансовой поддержке П. А. Гришанова (Латвия, Рига). Автор также выражает признательность Wolfram Research за использование Wolfram|One при написании приложения A.

1. Введение

Хотя материал статьи преимущественно состоит из определения арифметики $\mathbb{DR}_+$[1] и графиков ее функций, главной идеей ее является предложение использования неклассических арифметик; после нее следует идея разнообразий и только потом $\mathbb{DR}_+$. В этой работе, говоря «теоремы, техники и пр. (не) классической арифметики», мы подразумеваем «теоремы, техники и пр., основанное на (не) классической арифметике». Аббревиатура “DR” в составе таких слов как “DR-функция” сообщает, что это функция с арифметикой $\mathbb{DR}_+$.

Под неклассической арифметикой (НКА), скажем, вещественных чисел, будем понимать такие операции, которые паре чисел сопоставляют результат, отличный от обычного. Например, $16 + 32 = 55$ вместо $16 + 32 = 48$ будет неклассическим сложением. (1) Неклассические арифметики отличаются от гиперкомплексной, p-адической и некоторых других арифметик, в силу того, что эти основаны на классической арифметике вещественных чисел. (2) Кроме этого, говоря о НКА, мы будем подразумевать числовые алгебраические операции на бесконечных подмножествах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ — (3) операции, по которым возможен механический пересчет конструкций с классической арифметикой (КА); никакой интерпретации полученного результата, вообще говоря, мы не требуем. Например, если возможно получить численный результат при вычислении определителя матрицы по операциям, отличным от операций КА, то это реализует идею использования неклассических арифметик, хотя бы мы не знали как использовать полученное число. Разумеется, приоритетными будут НКА с осмысленным использованием. Предложения 1–3 в совокупности формулируют новую математическую идею. Новой является и арифметика $\mathbb{DR}_+$.

Множество числовых алгебраических операций экстремально большое. Представляется невероятным, чтобы группировка операций в арифметики не принесла пользы, ведь даже один набор из всего лишь нескольких классических операций дал нам колоссальную математику, силу которой мы хорошо знаем.

Такая группировка технически удобна. Как только мысленно она произведена, напрашивается сам собою вопрос, не попробовать ли поработать с аналогами классической арифметики — функциями, уравнениями, матрицами... Это позволяет нам работать не в вакууме тотальной новизны, когда нам непонятно что вообще делать, но иметь интеллектуальный и психологический комфорт опоры на привычные вещи. Сфомулированный этими двумя абзацами аргумент будем называть *аргументом естественного математического понимания* (АЕМП).

Теоретическим примером переноса конструкций классической арифметики в неклассические может быть алгоритм шифрования RSA. В самом деле, как только набор операций мыслится как арифметика A, можно спросить, какие числа будут простыми относительно данного умножения, какой класс эквивалентности порождается сравнением по модулю в A и т.д. Умножением в нашей НКА может быть один алгоритм, принимающий числа-аргументы, таблицы умножения и сложения: разные таблицы — разные умножения. Это значит,

[1] Обозначение является аббревиатурой от английского Diversities of Reals.

мы имеем не только целый класс умножений, но и целый класс простоты относительно каждой из операций. Следовательно, при неизвестности таблиц умножения и сложения неизвестна факторизация данного целого числа, поскольку относительно первого умножения оно раскладывается на множители a и b, относительно второго умножения — на c, d и e или не раскладывается вовсе.

Представляется, что такое концептуально "простое запутывание взломщика" должно сильно повышать криптостойкость алгоритма. Но обратной стороной будет поиск подходящей арифметики. Скорее всего, он может оказаться совсем нетривиальной задачей; увеличенный запас сложности взлома, впрочем, может давать простор для упрощения исходного RSA и, соответственно, простор для поиска арифметики для него.

По сути, нескольких предложений АЕМП достаточно для мотивации идеи разнообразий. Кроме этого, автору, возможно, удалось обнаружить в опубликованных актуальных научных исследованиях указания на реальные приложения *функций разнообразия* — функций, снабженных неклассической арифметикой, конкретно, $\mathbb{DR}_+$ (арифметикой неотрицательных вещественных чисел). Мы не настаиваем на том, что в последующих примерах присутствует математика разнообразий, но утверждаем: параллели достаточно осязаемы, чтобы продолжать разработку теории разнообразий и идеи использования неклассических арифметик.

Прежде примеров, дополнительно к упомянутым функциям разнообразия, сформулируем несколько предложений: если уравнение содержит операции неклассической арифметики, то оно будет *уравнением разнообразия*; множество его решений, либо множество, либо последовательность значений функции разнообразия называется *разнообразием*. В уравнениях/функциях неклассических арифметик может быть несколько и допустима комбинация с КА.

Графики из статей не обязательно функциональные, но это не является препятствием. Предметы исследований взяты из описаний статей. Какие из тем относятся к соответствию «график статьи – график разнообразия» автор не может указать, не являясь специалистом в областях перечисляемых публикаций.

- Сходство участков графиков функций разнообразия f_8, f_9 (с. 51) с графиками из статей:

(1) `https://www.nature.com/articles/s41592-021-01348-4/figures/11`, Extended Data Fig. 5.b из [1] — bacteriophages, high-throughput screening, synthetic biology;

(2) `https://www.nature.com/articles/s41586-021-04230-7`, (Перейти во вкладку «Figures»), Fig. 4.d (Xenografted…) из [2] —cell fate and cell lineage, developmental neurogenesis;

(3) `https://www.nature.com/articles/s43587-021-00146-z/figures/11`, Extended Data Fig. 6 из [3] — alzheimer's disease, transcriptional regulatory elements;

(4) `https://www.nature.com/articles/s41592-021-01325-x/figures/8`, Extended Data Fig. 3.a из [4] — molecular engineering, phylogeny, population genetics;

(5) `https://www.nature.com/articles/s41592-021-01261-w/figures/2`, Fig. 2.a из [5] — membrane proteins, single-molecule biophysics;

(6) `https://www.nature.com/articles/s41398-021-01698-9/figures/3`, Fig. 3 из [6] — ADHD, psychology;

(7) `https://www.nature.com/articles/s41586-021-04011-2/figures/2`, Fig. 2.e из [7] — Bose–Einstein condensates, quantum simulation.[2]

- Хотя ниже сходство довольно далекое, важно отметить, что DR-функции могут генерировать «стоячие» значения. Все три ссылки содержат вертикали, похожие на вертикали графиков функций $f_{12} - f_{14}$ (с. 53), f_{20} (с. 57), f_{21B} (с. 58) нашей работы. Чтобы увеличить число вертикальных точек, нужно просто уменьшить приращение x. Вы можете увидеть этот эффект на странице 58. Это одна и та же функция f_{21} с разными приращениями. Функция f_{12} дополнительно к вертикали точек имеет участки явного горизонтального расположения значений, видимого во всех трех ссылках блока ниже.

  Заметим что ссылка 8 имеет поднятую горизонталь до трети вертикали; наша f_{12} также имеет поднятие горизонтали. Итак:

(8) `https://www.nature.com/articles/s43587-021-00134-3/figures/15`, Extended Data Fig. 9.b из [8] — ageing, predictive markers;

(9) `https://www.nature.com/articles/s41586-021-04064-3/figures/4`, Extended Data Fig. 1 из [9] — computational models, genome-wide association studies, preventive medicine, risk factors;

(10) `https://www.nature.com/articles/s41477-021-01003-y/figures/3`, Extended Data Fig. 1 из [10] — genomics, natural variation in plants.

- Далее: в f_{10}, f_{11} (с. 52) значения распределяются по квадратам. Такие функции позволяют симулировать случайное расположение квадратов. Объединив графики нескольких функций, мы получаем блочную структуру сходную с графиком из

(11) `https://www.nature.com/articles/s41586-021-03923-3/figures/10`, Extended Data Fig. 7.d из [11] — heterogeneous catalysis, materials for energy and catalysis, process chemistry.

- Завершим серию сравнениями функций $f_{15A} - f_{18}$ с.с. 54–56 с

(12) `https://www.nature.com/articles/s41592-021-01329-7/figures/14`, Extended Data Fig. 8.c–f из [12] — Ca2+ imaging, mouse, neurophysiology, visual system.

Исследователь не будет видеть зависимости неизвестные ему, поскольку сознательно или подсознательно он ищет опору в вещах известных. Другими словами, предоставление новых абстрактных паттернов (например, графиков разнообразий) откроет глаза исследователю на то, с чем он сталкивался, но не замечал и что имеет относительно простую математику.

Мы предполагаем, что неклассические арифметики позволят нам элементарными средствами получать объекты, возможные только для неэлементарных

[2]Сходство будет более очевидным, если точки интервала от 100 до 300 рис. 2.e распрямить в горизонтальную полосу.

стредств классической[3]. Более общее утверждение: простые средства арифметики B позволяют строить объекты, доступные только сложным средствам арифметики C[4]. Если мы не ошибаемся в нашем допущении, то это второй фундаментальный аргумент в пользу нашей идеи.

В качестве некоторого довода можно предложить читателю посчитать[5] интерполяционный полином для множества первых десяти точек[6] полинома первой степени $f_1(x) = 12.3456 +_2 x$, с. 49 данной работы —

```
{{0, 86.9191},{10, 02.0412},{20, 53.5840},{30, 91.4506},
{40, 14.6664},{50, 40.1323},{60, 65.3078},{70, 28.7759},
{80, 79.2987},{90, 37.8235}}.
```

Искомым будет полином девятой степени

$$P = 1.03814 \times 10^{-11}x^9 - 4.50449 \times 10^{-9}x^8 + 8.19415 \times 10^{-7}x^7 - 0.0000809853x^6 + 0.00470648x^5 - 0.162279x^4 + 3.17151x^3 - 30.9761x^2 + 106.66x + 86.9191.$$

Отношения между арифметиками и их объектами, кроме сказанного, такие: в разных арифметиках могут существовать сущности, не имеющих аналогов друг у друга.

Нетрудно представить, если операция некоммутативная, то возникают ряды влево, т.е. ряды, в которых каждый следующий член дописывается слева, в отличие от ряда вправо. Суммы таких рядов могут быть не равны друг другу и мы получим сущность, аналога которой нет в классической арифметике. С другой стороны, могут существовать арифметики без сходящихся рядов вовсе.

Еще одна вещь, к которой, по-видимому, будем обращаться постоянно, работая с НКА — операционное уравнение, т. е. отыскание неизвестной операции $+_i$ в записи $123.45 +_i 6.789 = 10.1112$, например. В контексте арифметик, основанных на использовании таблиц, решением уравнения будет подходящее заполнение таблицы.

Итак, предупредив читателя не только о преимуществах, но и неизбежных трудностях, мы предлагаем неклассические арифметики и разнообразия по причинам: КА дала сильную математику, значит, среди громадного множества алгебраических операций найдутся наборы — неклассические арифметики — способные обогатить наши достижения и НКА позволяют переиспользовать известные конструкции КА, выполняя экономию мышления; простые средства позволяют нам строить сложные вещи; DR-графики похожи на сложные прикладные реальные данные; новые паттерны могут открыть глаза на новые законы.

[3]Есть основания полагать, что многие элементарные DR-функции разрывны в конечных десятичных дробях, а значит не имеют элементарного эквивалента КА, поскольку элементарные функции последней непрерывны. Что функции могут иметь очень странные свойства можно найти, например, здесь: Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted, Counterexamples in Analysis (Dover Books on Mathematics), ISBN-13: 978-0486428758

[4]Вероятно, есть простые объекты КА, не могущие быть полученными простыми средствами, например, $\mathbb{DR}_+$.

[5]`https://www.wolframalpha.com/input?i=interpolating+polynomial+calculator`. Выбирайте опцию вычисления для пар $\{x, y\}$.

[6]Пишем в нотации языка Wolfram.

2. Краткое описание $\mathbb{DR}_+$

Еще больше плоти идее добавим определением конкретной арифметики, обозначаемой $\mathbb{DR}_+$, которая не должна быть слишком простой, чтобы не быть лишенной силы, но и не слишком сложной, чтобы нам не утонуть в ней, так и не дойдя до обнаружения применений. $\mathbb{DR}_+$ представляет собой конечное, но очень большое множество сложений, левых и правых вычитаний, умножений, левых и правых делений, определенных для неотрицательных вещественных чисел (знак + в обозначении).

Сложения и умножения выполнимы для любых неотрицательных вещественных чисел и $\mathbb{R}_+$ замкнуто относительно данных действий. Имеются всегда выполнимые левые и правые вычитания и деления на всем $\mathbb{R}_+$, с тем чтобы результат был снова в $\mathbb{R}_+$. Разумеется, от обратных действий ожидается восстановление аргументов прямых действий. Мы достигли этой цели в несколько специфическом смысле. В $\mathbb{DR}_+$ возможно сложение $4.5 +_i 39.43 = 6.12$. Вычитание из 6.12 правого слагаемого 39.43 восстановит левое слагаемое 4.5: $6.12 \neg_i 39.43 = 4.5$. Этого не случится с восстановлением правого слагаемого посредством вычитания из суммы левого: $6.12 \invneg_i 4.5 = 3.43 \neq 39.43$. Тем не менее, дописав один незначащий ноль к целым частям, мы получим аргументы сложения в точности — $06.12 \invneg_i 04.5 = 39.43$. Это связано с зависимостью результата от обрамления незначащими нулями, которая выражается и в прямых действиях. Для примера $4.5 +_i 39.43 \neq 0004.500 +_i 0039.43000$. Аналогично обстоит дело с умножением/делением.

Данное обстоятельство не может быть основанием для дискредитации арифметики, поскольку классическая математическая практика не изгоняет, например, многозначный комплексный логарифм, но выделяет главное его значение и не запрещает пользоваться другими значениями логарифма для данного аргумента.

В общем случае действия некоммутативны, неассоциативны, умножения не дистрибутивны относительно сложения и не являются сокращенным сложением

$$a *_k^i n \neq \underbrace{a +_k a +_k \cdots +_k a}_{n}$$

Существуют ли действия с противоположными свойствами, мы не отвечаем.

Определения действий устроены так, что для получения, например, сложения $+_j$, отличного от сложения $+_k$, нам достаточно лишь сменить таблицу ϕ_j подстановок сложения $+_j$ на таблицу ϕ_k сложения $+_k$. Таблицы действий вводимой арифметики похожи на таблицы обычных сложения $+$ и умножения $\cdot$. Сходство в смысле техники вычисления сложений из $\mathbb{DR}_+$ со сложением $+$ будет и в сложении цифр одного разряда, и в наличии переносов из разряда предшествующего вычисления; принципиально отличие в порядке прохождения вычисляемых разрядов — слева направо, а не справа налево. Такой порядок продиктован выполнимостью деления для данного умножения $*_a^m$ (m и a — идентификаторы таблиц умножения и сложения в умножении соответственно). Деление, как действие обратное умножению, оказалось легче организовать от начала чисел к концу. Соотвественно оно задало, каким быть умножению.

От порядка прохождения разрядов ожидаются преимущества, например, в: численных решениях, исследовании глобального поведения функций, определенном интегрировании, исследовании функций на непрерывность, измерении размерностей множеств, заданных функциями.

Порядок прохождения разрядов позволил налагать на таблицы подстановок очень немного ограничений для целей обратимости операций. Каждую таблицу T можно получить так: составим латинский квадрат F порядка 10 из цифр, затем составим квадрат F' того же порядка, но без требования быть латинским; теперь из значения a ячейки xy таблицы F и из значения b той же ячейки xy таблицы F' составим упорядоченное значение ab и внесем его в ячейку xy таблицы T; произведя процедуру для всех ячеек, мы получим таблицу T, которую назовем *полулатинской*.[7] На каждую таблицу F есть большое количество таблиц F', а всех таблиц T — колоссальное число. Оно и есть мощность множества сложений (вычитаний, умножений, делений) арифметики $\mathbb{DR}_+$. Следует упомянуть: определения действий таковы, что, заменив в них слово «цифра» на слово «2-слог», и заменив значения ячеек таблиц F, F' на упорядоченные пары цифр, затем, составив из них упорядоченную пару $acbd$ «двойных цифр» для таблицы $T^{(2)}$ мы легко получаем расширение арифметики на действия по таблицам типа $T^{(2)}$; аналогичным образом возможно получить действия по таблицам $T^{(3)}$, $T^{(4)}$ и вообще $T^{(k\to\infty)}$. Иначе говоря, наша арифметика допускает расширение на счетное число сложений и каждого из других действий.[8]

Чтобы арифметику сделать понятной широкому кругу, мы воспользовались способом наподобие школьных действий в «столбик». Это позволяет заинтересованному читателю не зависеть от знания конкретного математического формализма (машины Тьюринга, нормального алгорифма, конкретного языка программирования и пр.). Табличный формализм визуальностью, кажется, неплохо подошел для целей определения $\mathbb{DR}_+$.

Ради избежания путаницы, далее будем словом «таблица» называть таблицу подстановок, а таблицу–«столбик», в которой выполняется действие будем называть *сеткой*.

Преимуществом определений действий можно считать тот факт, что вычитание (деление) выполняется ровно в той же сетке и по той же таблице, что и сложение (умножение). Это, по мнению автора, позволяет существенно экономить на изучении арифметики и доказательствах выполнимости действий.

Арифметические действия определены в работе явно, сама арифметика неявно представлена как совокупность этих действий. Никаких алгебраических или категорных подробностей не излагается. Заинтересованный читатель может взять любую функцию/уравнение по классической арифметике, и если они имеют смысл при замене обычного действия на действие из $\mathbb{DR}_+$, он получит функцию/уравнение разнообразия. Скажем, квадратичная функция одной переменной в смысле функции разнообразия может выглядеть так:

$$y = a *^3_1 x^2 +_1 b *^3_2 x +_2 c,$$

где a, b, c могут равняться 0.

---

[7]Для необратимых сложения и умножения требование быть полулатнской является лишним.

[8]В данной работе мы ограничились типом $T^{(1)}$.

По ссылке —
https://youtube.com/playlist?list=PLPaIMHkSBU4ViwXm92075wonmAJ7P_2k9
— читатель найдет видеопримеры операций. Может оказаться хорошей идеей изучение формализма $\mathbb{DR}_+$ предварить просмотром неформального видео для уяснения логики операций.

3. Общие соглашения и определения

Соглашение 3.1. Под десятичной записью неотрицательного действительного числа x будем понимать запись

$$x = x_n \dots x_1 x_0 . x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots,$$

в которой $x_n \dots x_1 x_0$ — цифры целой части, нумеруемые справа налево неотрицательными целыми числами, а $x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} \dots$ — цифры дробной части, нумеруемые слева направо отрицательными числами, с минусом перенесенным для компактности наверх. Полагаем, что число 0 может записываться как конечная и как бесконечная десятичная дробь.

Соглашение 3.2. В пределах данной работы «целая часть числа» и «дробная часть числа» — это сокращение для «усечение до целой части числа» и «усечение до дробной части числа».

Для регулярного использования в нашей работе обозначим действительные числа

$$\mathbb{R}_+ \ni \begin{cases} g = g_{a'} \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots g_{b'} \dots, \\ h = h_{c'} \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots h_{d'} \dots, \\ p = p_{n'} \dots p_0 . p_{\bar{1}} \dots, \\ q = q_{e'} \dots q_0 . q_{\bar{1}} \dots q_{f'} \dots, \end{cases} \tag{3.1}$$

могущие начинаться незначащими нулями.

Определение 3.3. (неперенос и перенос) Если $G = \{0, \dots, 9\}$ — алфавит цифр, $G^2 = \{g_0\bar{g}_0, \quad \dots, \quad g_{10^2}\bar{g}_{10^2}\}$ — множество пар цифр в алфавите G и $g\bar{g} \in G^2$, тогда g называется непереносом, а $\bar{g}$ — переносом (в младший (правый) разряд).

Определение 3.4. (таблица арифметического действия $\underset{a}{\diamond}$)

(1) Положим в общем случае $g_r \neq \bar{g}_r$. Таблицей T арифметического действия $g_x \underset{a}{\diamond} g_y = g_{r_j}\bar{g}_{r_j} \in G^2$ будет таблица 3.1 на странице 9.
(2) В случае, когда непереносы каждой строки (столбца) таблицы действия образуют все множество G, такая таблица называется полулатинской и обозначается SL.

Все таблицы B.1 страницы 59 — полулатинские.

Соглашение 3.5. (употребления слов «таблица», «сетка») Если в дальнейшем изложении мы будем подразумевать таблицу T действия, то будем говорить «таблица», а к ряду других таблиц, используемых в определениях сложений и умножений будем применять слово «сетка».

Определение 3.6. (выполнимая сетка) Сетка называется выполнимой, если она может быть заполнена по правилам заполнения данной сетки

Таблица 3.1. Таблица T арифметического действия $\underset{a}{\diamond}$.

$\underset{a}{\diamond}$	0	…	y	…	9
0	$g_{r_0}\bar{g}_{r_0}$	…	$g_{r_1}\bar{g}_{r_1}$	…	$g_{r_2}\bar{g}_{r_2}$
…	…	…	…	…	…
x	$g_{r_3}\bar{g}_{r_3}$	…	$g_{r_4}\bar{g}_{r_4}$	…	$g_{r_5}\bar{g}_{r_5}$
…	…	…	…	…	
9	$g_{r_6}\bar{g}_{r_6}$	…	$g_{r_7}\bar{g}_{r_7}$	…	$g_{r_8}\bar{g}_{r_8}$

Определение 3.7. (члены арифметического действия) Действительные числа g, h, p в выражении

$$g \underset{a}{\diamond} h = p$$

называются членами действия $\underset{a}{\diamond}$, первым, вторым и третьим соответственно.

Определение 3.8. (атом действия, атомарные уравнения) Выражение

$$r \underset{a}{\diamond} s = (t\bar{t})_{rs} = t\bar{t},$$

где $r, s \in G$ и $(t\bar{t})_{rs}$ — элемент ячейки rs таблицы T действия a называется атомом действия a (по таблице T). Если в данном выражении есть неизвестные, быть может, все, то имеем атомарное уравнение, при этом варианты

$$r \underset{a}{\diamond} s = x\bar{x}, \tag{3.2}$$

$$y \underset{a}{\diamond} s = t\bar{x}, \tag{3.3}$$

$$r \underset{a}{\diamond} z = t\bar{x}, \tag{3.4}$$

с неизвестными $x, \bar{x}, y, z$ называются прямым атомарным уравнением, левонеизвестным атомарным и правонеизвестным атомарным уравнениями соответственно.

По первому мы будем находить сумму или произведение цифр, по второму будем находить левую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель, по третьему — правую цифру-слагаемое или цифру-сомножитель.

Определение 3.9. (решение атомарных уравнений) Решением уравнения 3.2 будет единственное $(t\bar{t})_{rs}$, т.е. $t\bar{t} = x\bar{x}$. Решением уравнения 3.3 будет всякое $(t\bar{t}')_{r's}$, которое найдется в столбце s, т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $y = r'$; иначе решения не существует. Решением уравнения 3.4 будет всякое $(t\bar{t}')_{rs'}$, которое найдется в строке r, т.е. $\bar{x} = \bar{t}'$, $z = s'$; иначе решения не существует.

Предложим явный алгоритм решения двух последних уравнений тройки для случая, когда существует единственное решение.

Процедура 3.10. Для единственного решения уравнения 3.3 по таблице T:

(1) зайти в столбец s таблицы T;
(2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с непереносом t;
(3) $\bar{t}$ положить решением переноса x;
(4) строку r, в которой находится найденное значение положить решением левой неизвестной цифры y.

Процедура 3.11. Для единственного решения уравнения 3.4 по таблице T:

(1) зайти в стоку r таблицы T;
(2) найти в нем значение $t\bar{t}$ с непереносом t;
(3) $\bar{t}$ положить решением переноса x;
(4) столбец s, в котором находится найденное значение положить решением правой неизвестной цифры z.

Предложение 3.12. *Уравнения 3.3, 3.4 разрешимы для любых r, s, t, если T есть SL–таблица. Кроме того, левонеизвестное и правонеизвестное уравнения точно восстанавливают аргументы прямого действия.*

Доказательство. Доказательство следует прямо из определения: если в каждой строке и каждом столбце таблицы T существует любое $t \in G$, то уравнения разрешимы для любых r, s, t. Что касается восстановления аргументов прямого действия, то ясно: если выполняется условие полулатинской таблицы, то значение с таким началом находится только в строке r, и ни в какой другой, и в столбце s, и никаком другом. Следовательно, для левонеизвестного уравнения восстановится именно r, а для правонеизвестного — единственно s. □

4. Действия

4.1. **Сложения.** Для сложения чисел нам потребуются подготовленные слагаемые.

Определение 4.1. (подготовленные для сложения слагаемые) Слагаемые g, h подготовлены для сложения, если для них выполнено:
(1) в g, h отброшены незначащие нулевые цифры;
(2) целые и дробные части выровнены нулевыми цифрами;

Например, имеем $g = 99.400000$, $h = 002.13$. Тогда (1) $g = 99.4$, $h = 2.13$, (2) $g = 99.40$, $h = 02.13$. Заметим, если бы мы не отбросили нули на первом шаге, то результат был бы другим: $g = 099.400000$, $h = 002.130000$.

Зачем числа подготовливаются? Если для обычного сложения верно

$$99.40 + 02.13 = 099.400000 + 002.130000,$$

то для вводимых сложений равенство может нарушиться, поскольку результат зависит от обрамления нулями:

$$99.40 +_a 02.13 \neq 099.400000 +_a 002.130000.$$

Это означало бы, вообще говоря, бесконечнозначность новых сложений, а подготовка дает нам однозначный результат.

На странице 59 находятся таблицы, используемые в дальнейших примерах. Их непереносы — в точности латинские диагональные квадраты взятые из [13], а переносы — произвольные перестановки их строк. Собственно говоря, ячейки можно заполнять произвольными парами цифр, но для целей вычитания, выполнимого для любых неотрицательных действительных чисел, нам нужно, чтобы в каждой строке и каждом столбце существовал любой неперенос из G.

Определение 4.2. (сложение начальных цифр) Пусть в последовательности сеток ниже: символ E_r — сетка, находящаяся с справа от него, черта | в символе = | показывает, что справа находится сетка, ϕ — таблица действия, r, $r-1$ — номера разрядов, g_r, h_r — начальные цифры подготовленных к сложению чисел g, h из 3.1, точки «.» обозначают неизвестные цифры, необязательно равные, символ $|=|$ обозначает равенство сеток слева и справа от него и $p_r m_{r-1} = g_r +_i h_r$ — решение прямого атомарного уравнения. Тогда последовательное заполнение сеток ниже есть сложение начальных цифр:

$$
\mathrm{E}_r = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle r & \scriptstyle r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & . \\ \hline . & \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle r & \scriptstyle r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & m_{r-1} \\ \hline p_r & \end{array}\right. \tag{4.1}
$$

Определение 4.3. (сложение неначальных цифр) Пусть символы сеток ниже, совпадающие с символами из 4.1, обозначают то же самое, что и в 4.1, и, кроме того: g_n, h_n — неначальные цифры подготовленных чисел из 3.1, m_n — перенос из предыдущего разряда, а $l_n\bar{l}_{n-1} = g_n +_i h_n$, $p_n\bar{p}_{n-1} = l_n +_i m_n$, $m_{n-1}\bar{m}_{n-2} = \bar{l}_{n-1} +_i \bar{p}_{n-1}$ — решенные прямые атомарные уравнения, причем $\bar{m}_{n-2}$ отброшен. Тогда последовательное заполнение указанными решениями сеток ниже есть сложение неначальных цифр:

$$
\mathcal{D}_n = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle n & \scriptstyle n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle n & \scriptstyle n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle n & \scriptstyle n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & . \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle n & \scriptstyle n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array}\right. \tag{4.2}
$$

Дополнительно введем для неначального разряда равенство

$$
\mathcal{D}_n = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle n & \scriptstyle n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\phi & \\ \hline \scriptstyle n & \scriptstyle n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ m_n & m_{n-1} \\ \hline p_n & \end{array}\;\right| = \mathcal{E}_n.
$$

Пример:

$$
\mathcal{D}_1 = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\mathit{1} & \\ \hline \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline . & . \\ 6 & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\mathit{1} & \\ \hline \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\mathit{1} & \\ \hline \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & . \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\mathit{1} & \\ \hline \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}\;\right| = \left|\;\begin{array}{r|l} \scriptstyle\mathit{1} & \\ \hline \scriptstyle 1 & \scriptstyle 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}\;\right| = \mathcal{E}_1.
$$

Предложение 4.4. *Сетки 4.3 ниже выполнимы.*

$$
\mathrm{E}_r = \left|\begin{array}{c|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & . \\ \hline . & \end{array}\right| , \quad \mathcal{D}_n = \left|\begin{array}{c|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline . & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ m_n & . \\ \hline . & \end{array}\right| = \mathcal{E}_n. \tag{4.3}
$$

Это следует из разрешимости прямого атомарного уравнения: если известны аргументы действия, то результат определен.

Определение 4.5. (сетка сложения) Сеткой сложения подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип сложения цифр		E_r	$\mathcal{E}_{r-1}$	$\mathcal{E}_{r-2}$	$\dots$	$\mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_{\bar{1}}$	$\dots$
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	$\dots$	0	$\bar{1}$	$\dots$
Левое слагаемое g	$\dot{+}_i$	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	$\dots$	g_0	$g_{\bar{1}}$	$\dots$
Правое слагаемое h		h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	$\dots$	h_0	$h_{\bar{1}}$	$\dots$
Строка переносов			m_{r-1}	m_{r-1}	$\dots$	m_0	$m_{\bar{1}}$	$\dots$
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	$\dots$	p_0	$p_{\bar{1}}$	$\dots$

где тип сложения — сложение начальных цифр (E_r) или сложение неначальных ($\mathcal{E}_n$) цифр.

Определение 4.6. (сложение действительных чисел, их сумма) Сложением $\dot{+}_i$ действительных чисел $g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

(1) подготовить числа g, h;
(2) выполнить по таблице ϕ_j сложение начальных цифр $\mathrm{E}_r = g_r \dot{+}_i h_r = p_r m_{r-1}$; неперенос p_r есть r-ая цифра результата p; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
(3) для всех следующих вправо цифр $g_{n<r}$, $h_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j сложение неначальных цифр $\mathcal{E}_n = \mathcal{D}_n = (g_n \dot{+}_i h_n) \dot{+}_i m_n = p_n m_{n-1}$; с непереносами p_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $p = p_r p_{r-1} \dots p_0 . p_{\bar{1}} \dots$ есть сумма $g \dot{+}_i h$.

Приведем пример сложения $99.8000 \dot{+}_2 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $99.8 \dot{+}_2 4.57$ (отбросили незначащие нули), $99.80 \dot{+}_2 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.7. *Сложение чисел* $99.8 \underset{2}{+} 4.57 = 31.19$.

$$
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{4}{c}{\mathrm{E}_1\,\mathcal{E}_0\,|\,\mathcal{E}_{\bar 1}\,\mathcal{E}_{\bar 2}}\\ \hline
\mathit{2}\ 1 & 0 & \bar 1 & \bar 2\\ \hline
9 & 9 & 8 & 0\\
\underset{2}{+}\ 0 & 4 & 5 & 7\\
 & . & . & .\\ \hline
. & . & . & .
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{E}_1}\\ \hline
1 & 0\\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2\\ \hline
3 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0}\\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6\\
2 & \\ \hline
1 & 9\\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_{\bar 1}}\\ \hline
\bar 1 & \bar 2\\ \hline
8 & \\
5 & \\ \hline
6 & 9\\
6 & \\ \hline
1 & 6\\ \cline{2-2}
 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_{\bar 2}}\\ \hline
\bar 2 & \bar 3\\ \hline
0 & \\
7 & \\ \hline
5 & 2\\
4 & \\ \hline
9 & 7\\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{4}{c}{\mathrm{E}_1\,\mathcal{E}_0\,|\,\mathcal{E}_{\bar 1}\,\mathcal{E}_{\bar 2}}\\ \hline
\mathit{2}\ 1 & 0 & \bar 1 & \bar 2\\ \hline
9 & 9 & 8 & 0\\
\underset{2}{+}\ 0 & 4 & 5 & 7\\
 & 2 & 6 & 4\\ \hline
3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
$$

Или подробнее для E_1, $\mathcal{E}_0$ в терминах преобразований сеток:

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{E}_1}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0\\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & .\\ \hline
. &
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{E}_1}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0\\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2\\ \hline
3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{E}_0}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\
2 & .\\ \hline
. &
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
. & .\\
2 & \\ \hline
. & .\\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6\\
2 & \\ \hline
. & .\\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6\\
2 & \\ \hline
1 & 9\\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{D}_0}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6\\
2 & \\ \hline
1 & 9\\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{E}_0}\\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar 1\\ \hline
9 & \\
4 & \\
2 & 6\\ \hline
1 &
\end{array}
$$

Во избежание недоразумений приведем сложение одноразрядных чисел g и h. Если $p\bar p$ значение ячейки gh, то имеем сумму $g \underset{i}{+} h = p$. Вместе с примером по таблице 2 это выглядит так:

$$
\begin{array}{c|}
0\\ \hline
g\\
h\\ \hline
.
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|}
0\\ \hline
g\\
h\\ \hline
p
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|}
0\\ \hline
0\\
2\\ \hline
.
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{c|}
0\\ \hline
0\\
2\\ \hline
1
\end{array}
$$

Теорема 4.8. *Сложение* $\underset{i}{+}$ *определено для любых* $g, h \in \mathbb{R}_+$, *причем* $g \underset{i}{+} h = p \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Из 4.4 следует выполнимость E_r. Мы получили перенос m_{r-1} для разряда $r-1$, следующего за начальным r, таким образом, у нас есть все аргументы для выполнимости $\mathcal{E}_n$ при $n = r-1$. Предположим, что выполнены сетки по разряд d. Это значит, что известен перенос m_{d-1}. Следовательно сетка $\mathcal{E}_{d-1}$ выполнима. И наконец, процедура сложения любой паре цифр g_f, h_f слагаемых всегда сопоставляет цифру $p_f \in G$, давая запись–действительное число. $\square$

4.2. **Вычитания.** Введем обозначения для вычитаний, если $g \underset{i}{+} h = p$:

$$
\begin{array}{rcl}
p \underset{i}{\ulcorner}\, g = h & - & \text{левое вычитание или вычитание левого слагаемого,} \\
p \underset{i}{\urcorner}\, h = g & - & \text{правое вычитание или вычитание правого слагаемого.}
\end{array}
$$

Кроме того,

$$
\left.\begin{array}{l}
p \underset{i}{-} g = h \\
p \underset{i}{-} h = g
\end{array}\right\} - \text{вычитание без различения стороны.}
$$

Мы перенесли привычный порядок членов обычного вычитания на наши вычитания; терминологию построили по принципу теории бинарных систем, но обращаем внимание, что в литературе используется другой порядок членов. Например, Bruck [14] приводит:

> In a halfquasigroup G, left-division ($\backslash$) and right-division ($/$) are defined by the requirement that the equations $ab = c$, $a \backslash c = b$, $c/b = a$ are equivalent; all hold or none hold.

Нам представляется более важным сохранить преемственность с обычным вычитанием, в перспективе использования вычитаний во всех алгебраических выражениях с обычным сложением и умножением, хотя бы это и вносило некоторую долю разночтения.

Определение 4.9. (подготовленные члены вычитания) Числа p, и $f = g \vee h$ называются подготовленными к вычитанию $\underset{i}{-}$ по сложению $\underset{i}{+}$, если они прошли подготовку в определении 4.1, в которой символы g, h заменены символами p, f.

Начнем определения с вычитания левых начальных и неначальных цифр.

Определение 4.10. (левое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.1. Тогда восстановление сетки сложения начальных цифр

$$
\mathrm{F}_r^l = \left|
\begin{array}{r|l}
\phi & \\
\hline
r & r-1 \\
\hline
g_r & \\
\cdot & \\
 & \cdot \\
\hline
p_r &
\end{array}
\right| = \left|
\begin{array}{r|l}
\phi & \\
\hline
r & \quad r-1 \\
\hline
g_r & \\
h_r & \\
 & m_{r-1} \\
\hline
p_r &
\end{array}
\right| = \mathrm{E}_r \tag{4.4}
$$

решением правонеизвестного уравнения $g_r \underset{i}{+} h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание левых начальных цифр

Определение 4.11. (левое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$\mathcal{S}^l_n = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ \hline l_n & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array}\right|$$

последовательными решениями уравнений: левонеизвестного $l_n \dotplus_i m_n = p_r\bar{p}_{n-1}$, правонеизвестного $g_n \dotplus_i h_n = l_r\bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} \dotplus_i \bar{p}_{n-1} = m_{n-1}\bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание левых неначальных цифр.

Пример

$$\mathcal{S}^l_1 = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ 6 & \\ \hline 5 & \cdot \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \cdot & \\ \hline 0 & \cdot \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}\right| = \mathcal{E}_1.$$

Аналогично сложению вводим

$$\mathcal{S}^l_n = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot \\ m_n & \\ \hline p_n & \cdot \\ \cline{2-2} & \cdot \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ \cdot & \\ m_n & \cdot \\ \hline p_n & \end{array}\right| = \mathcal{F}^l_n. \tag{4.5}$$

Предложение 4.12. *Сетки 4.4, 4.5 для любых p_u, m_u, g_u, $u = r \vee n$ выполнимы если ϕ является SL–таблицей.*

Это тривиально следует из условий разрешимости атомарных уравнений.

Определение 4.13. (сетка вычитания левого слагаемого) Сеткой левого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр		F^l_r	$\mathcal{F}^l_{r-1}$	$\mathcal{F}^l_{r-2}$	$\dots$	$\mathcal{F}^l_0$	$\mathcal{F}^l_{\bar{1}}$	$\dots$
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r-1$	$r-2$	$\dots$	0	$\bar{1}$	$\dots$
Левое слагаемое g	$\dotplus_i$	g_r	g_{r-1}	g_{r-2}	$\dots$	g_0	$g_{\bar{1}}$	$\dots$
Правое слагаемое h		.	.	.	$\dots$	.	.	$\dots$
Строка переносов			.	.	$\dots$	.	.	$\dots$
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	$\dots$	p_0	$p_{\bar{1}}$	$\dots$

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F^l_r) или вычитание неначальных ($\mathcal{F}^l_n$) цифр.

Определение 4.14. (левое вычитание действительных чисел, их разность) Левым вычитанием (вычитанием левого слагаемого) $p \ulcorner_i\, g = h$ для действительных чисел $p, g, h \geq 0$ будет выполнение шагов:

(1) подготовить числа p, g;
(2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $\mathrm{F}^l_r = g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$; цифра h_r есть r-ая цифра результата h; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
(3) для всех следующих вправо цифр $p_{n<r}$, $g_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}^l_n = \mathcal{S}^l_n = (g_n +_i h_n) +_i m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами h_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $h = h_r h_{r-1} \dots h_0.h_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \ulcorner_i\, g = h$.

Приведем пример вычитания $31.1900 \ulcorner_i\, 99.8000$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \ulcorner_i\, 99.8$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \ulcorner_i\, 99.80$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.15. *Левое вычитание чисел* $31.19 \ulcorner_i\, 99.80 = 04.57$.

$$
\begin{array}{ccc|cc}
 & \mathrm{F}^l_1 & \mathcal{F}^l_0 & \mathcal{F}^l_{\bar{1}} & \mathcal{F}^l_{\bar{2}} \\
\hline
\mathcal{2} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{2} \\
\hline
 & 9 & 9 & 8 & 0 \\
+_i & . & . & . & . \\
 & & . & . & . \\
\hline
 & 3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}^l_1} \\
\hline
1 & 0 \\
\hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\
\hline
3 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}^l_0} \\
\hline
0 & \bar{1} \\
\hline
9 & \\
4 & \\
\hline
0 & 6 \\
2 & \\
\hline
1 & 9 \\
\cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}^l_{\bar{1}}} \\
\hline
\bar{1} & \bar{2} \\
\hline
8 & \\
5 & \\
\hline
6 & 9 \\
6 & \\
\hline
1 & 6 \\
\cline{2-2}
 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}^l_{\bar{2}}} \\
\hline
\bar{2} & \bar{3} \\
\hline
0 & \\
7 & \\
\hline
5 & 2 \\
4 & \\
\hline
9 & 7 \\
\cline{2-2}
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc|cc}
 & \mathrm{F}^l_1 & \mathcal{F}^l_0 & \mathcal{F}^l_{\bar{1}} & \mathcal{F}^l_{\bar{2}} \\
\hline
\mathcal{2} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{2} \\
\hline
 & 9 & 9 & 8 & 0 \\
+_i & 0 & 4 & 5 & 7 \\
 & & 2 & 6 & 4 \\
\hline
 & 3 & 1 & 1 & 9
\end{array}
$$

Или подробнее для F^l_1, $\mathcal{F}^l_0$ в терминах преобразований сеток:

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}^l_1} \\
\hline
\mathcal{2} & \\
\hline
1 & 0 \\
\hline
9 & \\
. & \\
 & . \\
\hline
3 &
\end{array}
\quad | = | \quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}^l_1} \\
\hline
\mathcal{2} & \\
\hline
1 & 0 \\
\hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^l} \\ \hline 2 & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ . & \\ 2 & . \\ \hline 1 & \end{array} = \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline 2 & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ . & \\ \cline{2-2} . & . \\ 2 & \\ \hline 1 & . \\ \cline{2-2} & . \end{array} = \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline 2 & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ . & \\ \cline{2-2} 0 & . \\ 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \cline{2-2} & . \end{array} = \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline 2 & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ 4 & \\ \cline{2-2} 0 & 6 \\ 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \cline{2-2} & . \end{array} = \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^l} \\ \hline 2 & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ 4 & \\ \cline{2-2} 0 & 6 \\ 2 & \\ \hline 1 & 9 \\ \cline{2-2} & 6 \end{array} = \begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^l} \\ \hline 2 & \\ \hline 0 & \bar{1} \\ \hline 9 & \\ 4 & \\ 2 & 6 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Определение 4.16. (правое вычитание начальных цифр) Пусть все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.1. Тогда восстановление сетки сложения начальных цифр

$$\mathrm{F}_r^r = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline . & \\ h_r & \\ & . \\ \hline p_r & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline r & r-1 \\ \hline g_r & \\ h_r & \\ & m_{r-1} \\ \hline p_r & \end{array}\right| = |\,\mathrm{E}_r \tag{4.6}$$

решением левонеизвестного уравнения $g_r \underset{i}{+} h_r = p_r m_{r-1}$ есть вычитание правых начальных цифр.

Определение 4.17. (правое вычитание неначальных цифр) Если все символы сеток ниже имеют тот же смысл, что и в 4.2, тогда восстановление сетки сложения неначальных цифр

$$\mathcal{S}_n^r = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline . & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline p_n & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline . & \\ h_n & \\ \hline l_n & . \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n-1 \\ \hline g_n & \\ h_n & \\ \hline l_n & \bar{l}_{n-1} \\ m_n & \\ \hline p_n & \bar{p}_{n-1} \\ \cline{2-2} & m_{n-1} \end{array}\right.$$

последовательными решениями уравнений: левонеизвестного $l_n \underset{i}{+} m_n = p_r \bar{p}_{n-1}$, левонеизвестного $g_n \underset{i}{+} h_n = l_r \bar{l}_{n-1}$, прямого $\bar{l}_{n-1} \underset{i}{+} \bar{p}_{n-1} = m_{n-1} \bar{m}_{n-2}$ — есть вычитание правых неначальных цифр.

Пример

$$\mathcal{S}_1^r = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline . & \\ 0 & \\ \hline . & . \\ 6 & \\ \hline 5 & . \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline . & \\ 0 & \\ \hline 0 & . \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & . \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \hline 0 & 2 \\ 6 & \\ \hline 5 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 6 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}\right| = \mathcal{E}_1.$$

Как для сложения и левого вычитания нам понадобится

$$
\mathcal{S}_n^r = \left| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n{-}1 \\ \hline . & \\ h_n & \\ \hline . & . \\ m_n & \\ \hline p_n & . \\ \cline{2-2} & . \end{array} \right| = \left| \begin{array}{r|l} \phi & \\ \hline n & n{-}1 \\ \hline . & \\ h_n & \\ m_n & . \\ \hline p_n & \end{array} \right| = \mathcal{F}_n^r. \tag{4.7}
$$

Предложение 4.18. *Сетки 4.6, 4.7 для любых p_u, m_u, h_u, $u = r \vee n$ выполнимы если ϕ является SL–таблицей.*

Почему так происходит, мы объясняли в левом случае.

Определение 4.19. (сетка вычитания правого слагаемого) Сеткой правого вычитания подготовленных действительных чисел будет таблица

Тип вычитания цифр		F_r^r	$\mathcal{F}_{r-1}^r$	$\mathcal{F}_{r-2}^r$	$\dots$	$\mathcal{F}_0^r$	$\mathcal{F}_{\bar{1}}^r$	$\dots$
Таблица, номер разряда	ϕ_j	r	$r{-}1$	$r{-}2$	$\dots$	0	$\bar{1}$	$\dots$
Левое слагаемое g	$+_i$	.	.	.	$\dots$	.	.	$\dots$
Правое слагаемое h		h_r	h_{r-1}	h_{r-2}	$\dots$	h_0	$h_{\bar{1}}$	$\dots$
Строка переносов			.	.	$\dots$	.	.	$\dots$
Сумма p		p_r	p_{r-1}	p_{r-1}	$\dots$	p_0	$p_{\bar{1}}$	$\dots$

где тип вычитания — вычитание начальных цифр (F_r^r) или вычитание неначальных ($\mathcal{F}_n^r$) цифр.

Определение 4.20. (правое вычитание действительных чисел, их разность) Правым вычитанием (вычитанием правого слагаемого) $p \neg_i h = g$ для действительных чисел $p, h, g \geq 0$ будет выполнение шагов:

(1) подготовить числа p, h;
(2) выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения начальных цифр $\mathrm{F}_r^r = g_r +_i h_r = p_r m_{r-1}$; цифра g_r есть r-ая цифра результата g; перенос m_{r-1} внести в строку переносов, в столбец $r-1$;
(3) для всех следующих вправо цифр $p_{n<r}$, $h_{n<r}$ последовательно, начиная с цифры $r-1$, выполнить по таблице ϕ_j восстановление сложения неначальных цифр $\mathcal{F}_n^r = \mathcal{S}_n^r = (g_n +_i h_n) +_i m_n = p_n m_{n-1}$; с цифрами g_n и переносами m_{n-1} поступить аналогично предыдущему шагу; если слагаемые — конечные дроби, то перенос сложения последних цифр отбрасывается;
(4) отбрасываем незначащие нули у всех трех чисел, если таковые имеются.

Строка $g = g_r g_{r-1} \dots g_0.g_{\bar{1}} \dots$ есть разность $p \neg_i h = g$.

Приведем пример вычитания $31.1900 \neg_2 004.57$. Процедура подготовки слагаемых: $31.19 \neg_2 4.57$ (отбросили незначащие нули), $31.19 \neg_2 04.57$ (выровняли слагаемые).

Пример 4.21. *Правое вычитание чисел* $31.19 \underset{2}{\urcorner} 04.57 = 99.80$.

$$
\begin{array}{cccc|cc}
 & \mathrm{F}_1^r & \mathcal{F}_0^r & & \mathcal{F}_{\bar1}^r & \mathcal{F}_{\bar2}^r \\ \hline
\mathit{2} & 1 & 0 & & \bar1 & \bar2 \\ \hline
 & . & . & & . & . \\
+_2 & 0 & 4 & & 5 & 7 \\
 & & . & & . & . \\ \hline
 & 3 & 1 & & 1 & 9
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}_1^r} \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_{\bar1}^r} \\ \hline
\bar1 & \bar2 \\ \hline
8 & \\
5 & \\ \hline
6 & 9 \\
6 & \\ \hline
1 & 6 \\ \cline{2-2}
 & 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_{\bar2}^r} \\ \hline
\bar2 & \bar3 \\ \hline
0 & \\
7 & \\ \hline
5 & 2 \\
4 & \\ \hline
9 & 7 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc|cc}
 & \mathrm{F}_1^r & \mathcal{F}_0^r & & \mathcal{F}_{\bar1}^r & \mathcal{S}_{\bar2}^r \\ \hline
\mathit{2} & 1 & 0 & & \bar1 & \bar2 \\ \hline
 & 9 & 9 & & 8 & 0 \\
+_2 & 0 & 4 & & 5 & 7 \\
 & & 2 & & 6 & 4 \\ \hline
 & 3 & 1 & & 1 & 9
\end{array}
$$

Или подробнее для F_1^r, $\mathcal{F}_0^r$ в терминах преобразований сеток:

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}_1^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
. & \\
0 & \\
 & . \\ \hline
3 &
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathrm{F}_1^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
1 & 0 \\ \hline
9 & \\
0 & \\
 & 2 \\ \hline
3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
. & \\
4 & \\
2 & . \\ \hline
1 &
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
. & \\
4 & \\ \hline
. & . \\
2 & \\ \hline
1 & . \\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
. & \\
4 & \\ \hline
0 & . \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & .
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{S}_0^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\ \hline
0 & 6 \\
2 & \\ \hline
1 & 9 \\ \cline{2-2}
 & 6
\end{array}
\ \Big| = \Big|\
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}_0^r} \\ \hline
\mathit{2} & \\ \hline
0 & \bar1 \\ \hline
9 & \\
4 & \\
2 & 6 \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

Теорема 4.22. (1) *Если для любых* $p, f \in \mathbb{R}_+$ *выполнимо* $p \underset{i}{-} f = d$, *то* $d \in \mathbb{R}_+$.

(2) *Если таблица* ϕ *— полулатинская* (SL), *то* $p \underset{i}{\ulcorner} f = d_1$ *и* $p \underset{i}{\urcorner} f = d_2$ *выполнимы одновременно для любых* $p, f \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. (1) Если вычитание выполнимо, то оно цифрам аргументов p, f разряда k ставит в соответствие цифру результата d того же разряда, а поскольку $p, f \in \mathbb{R}_+$, то $d \in \mathbb{R}_+$.
(2) Условия выполнимости $\mathrm{F}, \mathcal{F}$–сеток рассмотрены в предложениях 4.12, 4.18. Так как вычитание интерпретируется как восстановление сложения, то принцип доказательства выполнимости сложения переносим в данное доказательство, следовательно теорема доказана. □

В каком отношении находятся сложение $+_i$ и вычитание $\underset{i}{-}$? Рассмотрим сложение $04.50 +_2 39.43 = 06.12$ по таблице 2 с левым и правым вычитанием для него, представленными в примерах 4.23, 4.24

Пример 4.23. *Вычитание левого слагаемого* $6.12 \mathbin{\underset{2}{\ulcorner}} 4.5 = 3.43$.

$$
\begin{array}{cr|l}
\mathscr{2} & {}_{3210} & {}_{\bar1\bar2\bar3} \\ \hline
 & 4 & 50 \\
+_2 & . & .\,. \\
 & & .\,. \\ \hline
 & 6 & 12
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{0} & {}_{\bar1} \\ \hline
4 & \\
3 & \\
 & 8 \\ \hline
6 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{\bar1} & {}_{\bar2} \\ \hline
5 & \\
4 & \\ \hline
9 & 7 \\
8 & \\ \hline
1 & 5 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{\bar2} & {}_{\bar3} \\ \hline
0 & \\
3 & \\ \hline
0 & 7 \\
0 & \\ \hline
2 & 0 \\ \cline{2-2}
 & 7
\end{array}
\quad
\begin{array}{cr|l}
\mathscr{2} & {}_{3210} & {}_{\bar1\bar2\bar3} \\ \hline
 & 4 & 50 \\
+_2 & 3 & 43 \\
 & & 80 \\ \hline
 & 6 & 12
\end{array}
$$

Пример 4.24. *Вычитание правого слагаемого* $6.12 \mathbin{\underset{2}{\urcorner}} 39.43 = 4.5$.

$$
\begin{array}{cr|l}
\mathscr{2} & {}_{10} & {}_{\bar1\bar2\bar3} \\ \hline
 & .\,. & .\,. \\
+_2 & 39 & 43 \\
 & . & .\,. \\ \hline
 & 06 & 12
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{1} & {}_{0} \\ \hline
0 & \\
3 & \\
 & 7 \\ \hline
0 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{0} & {}_{\bar1} \\ \hline
4 & \\
9 & \\ \hline
9 & 3 \\
7 & \\ \hline
6 & 3 \\ \cline{2-2}
 & 8
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{\bar1} & {}_{\bar2} \\ \hline
5 & \\
4 & \\ \hline
9 & 7 \\
8 & \\ \hline
1 & 5 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
{}_{\bar2} & {}_{\bar3} \\ \hline
0 & \\
3 & \\ \hline
0 & 7 \\
0 & \\ \hline
2 & 0 \\ \cline{2-2}
 & 7
\end{array}
\quad
\begin{array}{cr|l}
\mathscr{2} & {}_{10} & {}_{\bar1\bar2\bar3} \\ \hline
 & 04 & 50 \\
+_2 & 39 & 43 \\
 & 7 & 80 \\ \hline
 & 06 & 12
\end{array}
$$

Мы видим, что правое вычитание восстанавливает левое слагаемое 4.5, но левое вычитание не восстанавливает правое слагаемое 39.43, хотя сумма $4.5 +_2 3.43 = 6.12$ по другому найденному значению 3.43 верна.

Почему это произошло? Вычитание определяет однозначную подготовку членов, такую, которая в случае $6.12 \mathbin{\underset{2}{\ulcorner}} 4.5 = 3.43$ не находит значащих цифр в разряде 1, видимые ею в правом вычитании $6.12 \mathbin{\underset{2}{\urcorner}} 39.43 = 4.5$. Иначе говоря, левое вычитание с дописанными впереди нулями дало бы искомое $06.12 \mathbin{\underset{2}{\ulcorner}} 04.50 = 39.43$. Ведя учет незначащих нулей, мы восстанавливали бы слагаемое любой стороны, но учет требует затратных усилий сверх слежения за некоммутативностью, неассоциативностью, поэтому для начала предлагается работать без него.

Теорема 4.25. *Пусть имеем* $g +_i h = p$ *с таблицей* ϕ. *Тогда, если* ϕ *— полулатинская* (SL), *то* $p \mathbin{\underset{i}{\ulcorner}} g = h$, $p \mathbin{\underset{i}{\urcorner}} h = g$, *для любых* $p, g, h \in \mathbb{R}_+$, *при надлежащем обрамлении незначащими нулями, когда это необходимо.*

Доказательство. Рассмотрим случай

$$
\begin{array}{cccccc|}
\multicolumn{6}{c}{g +_i h = p} \\ \hline
\phi & {}_{r} & {}_{r-1} & {}_{\dots} & {}_{0} & \\ \hline
+_i & g_r & g_{r-1} & \cdots & g_0 & \\
 & h_r & h_{r-1} & \dots & h_0 & \\
 & & m_{r-1} & \dots & m_0 & \\ \hline
 & p_r & p_{r-1} & \cdots & p_0 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccccc|}
\multicolumn{6}{c}{p \mathbin{\underset{i}{\ulcorner}} g} \\ \hline
\phi & {}_{r} & {}_{r-1} & {}_{\dots} & {}_{0} & \\ \hline
+_i & g_r & g_{r-1} & \cdots & g_0 & \\
 & . & . & \dots & . & \\
 & & . & \dots & . & \\ \hline
 & p_r & p_{r-1} & \cdots & p_0 &
\end{array}
,
$$

когда целые части подготовленных главных членов вычитания совпадают с частями одноименных членов сложения. Если в любой строке $g_r \in G$ таблицы ϕ любое начало $p_r \in G$ значения ячейки встречается только однажды,[9] то оно

[9] Это эквивалентно условию теоремы, что имеем SL-таблицу.

будет в столбце h_r и никаком другом. Распространяя это рассуждение на неначальные разряды с должными заменами слов «строка v» на слово «столбец w» и наоборот, мы придем к заключению, что в $p \ulcorner_i\, g = h$ восстанавливается целая часть $h_r h_{r-1} \dots h_0$ и только она.
По ходу наших рассуждений для неначальных цифр, мы должны были заметить еще одно: если сложение имеет перенос m_s то такой же перенос будет иметь вычитание в разряде s. Следовательно, и дробная часть числа $h_{\bar{1}} h_{\bar{2}} \dots h_{\bar{y}}$ восстанавливается вычитанием однозначно.
Аналогичный результат получаем для правого вычитания.

Когда подготовка главных аргументов вычитания дает более короткие, чем в сложении, целые части (первые две сетки) —

$$\begin{array}{c|}
\multicolumn{1}{c}{g +_i h = p} \\
\hline
\phi \quad r \quad r{-}1 \quad \dots \quad k \quad \dots \quad 0 \\
\hline
\begin{array}{l} \\ +_i \\ \end{array} \begin{array}{r} g_r g_{r-1} \,\cdots\, g_k \,\cdots\, g_0 \\ h_r h_{r-1} \dots h_k \dots h_0 \\ m_{r-1} \dots m_k \dots m_0 \end{array} \\
\hline
p_r p_{r-1} \,\cdots\, p_k \,\cdots\, p_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|}
\multicolumn{1}{c}{p \ulcorner_i\, g} \\
\hline
\phi \quad k \quad k{-}1 \quad \dots \quad 0 \\
\hline
\begin{array}{l} \\ +_i \\ \end{array} \begin{array}{r} g_k g_{k-1} \cdots g_0 \\ . \ \ . \quad \ \dots \ . \\ . \quad \ \dots \ . \end{array} \\
\hline
p_k p_{k-1} \dots p_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|}
\multicolumn{1}{c}{g +_i h = p} \\
\hline
\phi \quad r \quad r{-}1 \quad \dots \quad k \quad \dots \quad 0 \\
\hline
\begin{array}{l} \\ +_i \\ \end{array} \begin{array}{r} 0_r 0_{r-1} \,\cdots\, g_k \,\cdots\, g_0 \\ h_r h_{r-1} \dots h_k \dots h_0 \\ m_{r-1} \dots m_k \dots m_0 \end{array} \\
\hline
0_r 0_{r-1} \,\cdots\, p_k \,\cdots\, p_0
\end{array}$$

— то p и g начинаются нулями (третья сетка). Значит, дописав нужное число нулей спереди к подготовленным главным аргументам вычитания, мы получим записи, идентичные записям одноименных членов сложения; для них мы повторяем доказательство первой части.
Повтором имеющихся приемов к дробным частям и правому вычитанию мы завершим доказательство теоремы. □

4.3. **Умножения.** Умножение будет обозначаться либо символом $*^i_j$, либо $\cdot^i_j$, когда последний будет удобнее для чтения.

4.3.1. *Подготовка чисел к умножению.* Подготовка определит, сколько будет цифр в сомножителях перед умножением и количество цифр в будущем произведении и из множества представлений сомножителей, обрамленных незначащими нулями, выберет одно, чем задаст однозначность умножения.

Процедура 4.26. Для чисел 3.1:

(1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей сомножителей, получив $g_{a \le a'}$, $h_{c \le c'}$ — старшие значащие цифры, $g_{b'' \ge b'}$, $h_{d'' \ge d'}$ — младшие значащие цифры конечных дробей;
(2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q:

$$e = a + c + 1;$$

(3) если хотя бы один сомножитель является бесконечной дробью, перейти к шагу 5, иначе посчитать длину L выравнивания подготовленных членов как

$$L = \max\{a + |b''| + 1,\ c + |d''| + 1,\ e + 1 = a + c + 2\};$$

(4) выровнять второй сомножитель по длине L, в дробной части дописывая незначащие нули, получив

$$\begin{cases} g = \underbrace{g_a \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots g_b}_{L}, \\ h = \underbrace{h_c \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots h_d}_{L}, \\ q = \underbrace{\overbrace{q_e \dots q_0}^{a+c+2} . q_{\bar{1}} \dots q_f}_{L} \end{cases} \tag{4.8}$$

и остановив подготовку членов умножения;

(5) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$\begin{cases} g = g_a \dots g_0 . g_{\bar{1}} \dots, \\ h = h_c \dots h_0 . h_{\bar{1}} \dots, \\ q = \overbrace{q_e \dots q_0}^{a+c+2} . q_{\bar{1}} \dots \end{cases} \tag{4.9}$$

завершить подготовку членов умножения.

Определение 4.27. (символы подготовки) Символы a, b, c, d, e, f из процедуры 4.26 называются символами подготовки к умножению, L — длиной выравнивания, а числа g, h, q после данной процедуры — подготовленными членами умножения.

Пусть требуется умножить $g *^i_j h = 00.120 *^i_j 034.5670 = q$. Запишем в таблицах ниже левый сомножитель вверху, правый посередине, результат будет размещаться ниже под чертой:

A	B	C	D
$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g & 00 & 120 \\ h \ *^i_j & 034 & 5670 \\ \hline q & & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & 0 & 12 \\ *^i_j & 34 & 567 \\ \hline & & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & 0 & 12 \\ *^i_j & 34 & 567 \\ \hline & \dots & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & 0 & 1200 \\ *^i_j & 34 & 567 \\ \hline & \dots & .. \end{array}$

Выполняем отбрасывание незначащих нулей, получая в примере $0.12 *^i_j 34.567$ (колонка B). Следующим шагом будет вычисление номера разряда старшей цифры целой части произведения сложением $2 = 1 + 0 + 1$ (в примере в колонке C отметили ее и всю целую часть точками). Длина выравнивания равняется $L = \max\{0 + |-2| + 1,\ 1 + |-3| + 1,\ 2 + 1\} = 5$. В D подготовка конечных дробей закончена дописыванием 00 у g, дописыванием двух точек у q.

Если бы хотя бы один сомножитель был бесконечной дробью, например, $00.12 *^i_j 034.(5)$, то после вычисления e мы перешли бы к дополнению другого сомножителя до бесконечной дроби дописыванием незначащих нулей с получением

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\ \hline
\begin{array}{llr|ll}
 & & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3} & \scriptstyle \dots \\ \hline
g & & 00 & 12 & \\
h & *^i_j & 034 & 555 & \dots \\ \hline
q & & & &
\end{array} &
\begin{array}{lr|ll}
 & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3} & \scriptstyle \dots \\ \hline
 & 0 & 12 & \\
*^i_j & 34 & 555 & \dots \\ \hline
 & & &
\end{array} &
\begin{array}{lr|ll}
 & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3} & \scriptstyle \dots \\ \hline
 & 0 & 12 & \\
*^i_j & 34 & 555 & \dots \\ \hline
 & \dots & &
\end{array} &
\begin{array}{lr|ll}
 & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3} & \scriptstyle \dots \\ \hline
 & 0 & 120 & \dots \\
*^i_j & 34 & 555 & \dots \\ \hline
 & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\end{array}$$

Произведение q тоже будет бесконечной дробью. А подготовленные к умножению одноразрядные сомножители-числа не требуют отбрасывания незначащих нулей — пустая B — и дадут

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\ \hline
\begin{array}{llr|l}
 & & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline
g & & 0 & \\
h & *^i_j & 4 & \\ \hline
q & & &
\end{array} &
 &
\begin{array}{lr|l}
 & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline
 & 0 & \\
*^i_j & 4 & \\ \hline
 & .. &
\end{array} &
\begin{array}{lr|l}
 & \scriptstyle 43210 & \scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline
 & 0 & 0 \\
*^i_j & 4 & 0 \\ \hline
 & .. &
\end{array}
\end{array}$$

поскольку $e = 0 + 0 + 1,\ L = \max\{0 + |0| + 1,\ 0 + |0| + 1,\ 1 + 1\} = 2$

4.3.2. *Умножение.* Как в обычном умножении, мы сначала будем перемножать цифры одного слагаемого на второе слагаемое, а затем складывать полученные произведения, используя модификацию сложения.

Определение 4.28. (сетка c-сложения) Пусть c, d, m, p — (непрерывные) последовательности десятичных цифр, занумерованных целыми числами, представленные в таблице ниже:

Тип сложения цифр					E_{u-1}	$\mathcal{E}_{u-2}$	$\mathcal{E}_{u-3}$	$\dots$
Таблица, номера разрядов	ϕ	$t\in\mathbb{Z}$	$\dots$	u	$u-1$	$u-2$	$u-3$	$\dots$
Запись c	$+_\phi$	c_t	$\dots$	c_u	c_{u-1}	c_{u-2}	c_{u-3}	$\dots$
Запись d					d_{u-1}	d_{u-2}	d_{u-3}	$\dots$
Переносы m						m_{u-2}	m_{u-3}	$\dots$
Запись p		c_t	$\dots$	c_u	p_{u-1}	p_{u-2}	p_{u-3}	$\dots$

Тогда таблица выше называется сеткой c-сложения $c +_\phi d$ записей c и d.

Примечание 4.29. (о сносимых цифрах) Сносимые цифры будут иметь другие обозначения, продиктованные именем строки, в которой они находятся.

Определение 4.30. (c-сложение, c-сумма) Заполнение сетки c-сложения по шагам:

(1) символы $c_t \dots c_u$, из которых все или некоторые, быть может, равны нулю, для которых нет соответственных символов $d_t \dots d_u$ записать в строку p;
(2) для разряда $u-1$ выполнить сложение начальных цифр E_{u-1}, записывая результат $c_{u-1} +_\phi d_{u-1} = p_{u-1} m_{u-2}$ в строки p, m, столбцы $u-1, u-2$ соответственно;
(3) начиная с разряда $u-2$ выполнить сложение неначальных цифр $\mathcal{E}$, записывая результат $c_{u-n} +_\phi d_{u-n} = p_{u-n} m_{u-n-1}$ в строки p, m, столбцы $u-n, u-n-1$ соответственно;

— называется c-сложением записей c, d, запись p называется c-суммой данных записей, а символы $c_t \dots c_u$ — сносимые (в c-сумму) цифры, называемые так же поднимаемыми (из c-суммы)цифрами,

Оно определено не только для чисел, но и для «псевдочисел» — непрерывных последовательностей десятичных цифр, с начальным разрядом-целым числом.

Примеры этого действия будут в примере умножения.

Определение 4.31. (умножение цифр сомножителей, их произведение) Если g_v, h_w — цифры правого и левого сомножителей g и h из 3.1, то взятие значения $(Q\bar{Q})_{g_v h_w}$ из ячейки $g_v h_w$ таблицы T и присвоение подындекса $v+w+1$ для Q, подындекса $v+w$ для $\bar{Q}$ и надындекса v обеим цифрам значения ячейки называется умножением данных цифр, а значение ячейки — их произведением. Все вместе обозначается

$$g_v *_j^i h_w = (Q\bar{Q})_{g_v h_w} = Q^v_{v+w+1}\bar{Q}^v_{v+w}. \tag{4.10}$$

Например, имеем $4.5 = 4_0.5_{\bar{1}}$, $39 = 3_1 9_0$. Тогда

$$5_{\bar{1}} *_j^3 3_1 = (06)_{53} = 0^{\bar{1}}_{-1+1+1} 6^{\bar{1}}_{-1+1} = 0^{\bar{1}}_1 6^{\bar{1}}_0.$$

Определение 4.32. (сетка умножения цифры на сомножитель) Если g_v цифра левого сомножителя g и h из 3.1 — правый сомножитель, c — номер старшей цифры числа h, $t = v + c$ то таблица ниже

	Тип сложения цифр	$_{t+1}$	E_t	$\mathcal{E}_{t-1}$	$\mathcal{E}_{t-2}$	...
	Номера разрядов		t	$t-1$	$t-2$	...
блок v	q^v– непереносы по $*_j^i$	Q^v_{t+1}	Q^v_t	Q^v_{t-1}	Q^v_{t-1}	$\dots$
	$\bar{q}^v$– переносы по $*_j^i$		$\bar{Q}^v_t$	$\bar{Q}^v_{t-1}$	$\bar{Q}^v_{t-2}$	$\dots$
	m^v– переносы по $+_j$			M^v_{t-1}	M^v_{t-2}	$\dots$
	$p^v = q^v +_j \bar{q}^v = g_v *_j^i h$	Q^v_{t+1}	P^v_t	P^v_{t-1}	P^v_{t-2}	$\dots$

называется сеткой умножения $g_v *_j^i h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h.[10]

Определение 4.33. (умножение цифры на сомножитель) Умножением $g_v *_j^i h$ цифры g_v левого сомножителя g на правый сомножитель h называется заполнение сетки умножения из определения 4.32 по шагам:

(1) умножить цифру g_v на каждую цифру $h_{w \le c}$ правого сомножителя h и неперенос Q^v_{v+w+1} произведения 4.10 записать в строку q^v, столбец $v+w+1$ сетки, а перенос $\bar{Q}^v_{v+w}$ — в строку $\bar{q}^v$, в столбец $v+w$;
(2) выполнить c-сложение строк $q^v, \bar{q}^v$;

Строка $p^v = Q^v_{t+1} P^v_t P^v_{t-1} P^v_{t-2} \dots$ есть произведение $g_v *_j^i h$ (незначащие нули сохраняются).

[10]Иногда идентификатором i умножения будет выступать идентификатор таблицы умножения, используемого в данном умножении $*_j^i$.

Пример 4.34. *Умножение* $5_1 *_1^3 1_1 9_0 . 7_{\bar 1} 5_{\bar 2}$ *по таб.* 3 *со сложением по таб.* 1.

	Номера разрядов		3	2	1	0
1	q^1		6	1	2	9
	$\bar q^1$			1	2	9
	m^1				4	7
	$p^1 = 5_1 *_1^3 1_1 9_0 . 7_{\bar 1} 5_{\bar 2}$	$=$	6	1	3	3

Далее определяем сетку умножения чисел.

Определение 4.35. (сетка умножения чисел-конечных дробей) Сетка 4.1 на странице 26 умножения $g *_j^i h$ чисел–конечных дробей состоит:

(1) строка -1 — идентификаторы таблицы умножения λ и таблицы сложения ϕ, номера разрядов; строка 0 — символы подготовки; строки $1-3$ — подготовленные члены умножения (цифры q_s произведения q неизвестны); строка 3 носит вспомогательную функцию, предназначенную, прежде всего, для деления;
(2) ниже идет блок 2 вычислений произведений цифр $g_k *_j^i h = p^k$, $a \geq k \geq b$; блок 2 — это последовательность сверху вниз подблоков $a, a-1, \dots, b+1, b$ из определения 4.32;
(3) ниже идет блок Σ последовательного суммирования произведений $g_k *_j^i h = p^k$ из блока 2; верхняя его строка $\Sigma^a = p^a$ составляет однострочный блок $\binom{a}{a}$, а всякий остальной блок $\binom{a}{k}$, $k < a$, состоит из трех строк: p^k — копии одноименной строки блока 2, n^k — строки переносов c-сложения $\Sigma^{k+1} +_i p^k = \Sigma^k$, и, собственно, Σ^k — строки упомянутой c-суммы.

Символы разрядов $u < f$ всех строк блоков $2, \Sigma$ не записываются.

На странице 27 приводим сетку 4.2 вместе с примером умножения.

Определение 4.36. (умножение чисел-конечных дробей, их произведение) Умножение конечных дробей $g *_j^i h = q$ — это выполнение шагов:

(1) подготовить члены–конечные дроби умножения g, h, q;
(2) определить таблицы λ, ϕ;
(3) выполнить умножение $g_k *_j^i h$, $a \leq k \leq b$ цифры g_k левого сомножителя g на правый сомножитель h для всех k и вписать результат в блок k;
(4) последовательно в блоках $\binom{a}{a-1}, \dots, \binom{a}{b}$ выполнить c-сложения полученных произведений $p^a, \dots, p^b$:

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a +_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} +_i p^{a-2}, \quad \dots, \quad \Sigma^b = \Sigma^{b+1} +_i p^b.$$

Число $\Sigma^b = q$ есть произведение чисел–конечных дробей g, h.

Разбираем пример $0060.21 *_j^i 0.243$ страницы 27. Подготовка:

A

	43210	$\bar 1 \bar 2 \bar 3 \bar 4 \bar 5$
g	0060	21
h $*_j^i$	0	243
q		

B

	43210	$\bar 1 \bar 2 \bar 3 \bar 4 \bar 5$
	60	21
$*_j^i$	0	243

C

	43210	$\bar 1 \bar 2 \bar 3 \bar 4 \bar 5$
	60	21
$*_j^i$	0	243
	$\dots$	

D

	43210	$\bar 1 \bar 2 \bar 3 \bar 4 \bar 5$
	60	21
$*_j^i$	0	243
	$\dots$	.

— отбросили незначащие нули (B); посчитали $e = a + c + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ — разряд старшей цифры произведения и отметили целую его часть точками (C);

Таблица 4.1. Сетка умножения к определению 4.35 на странице 25

-1	λ, ϕ		e	$e-1$	$e-2$	$\dots$	c	$\dots$	a	$\dots$	f	$\dots\ d$	$\dots\ b$
0			e				c		a		f	d	b
1		g							g_a	$\dots$	g_f	$\dots g_d$	$\dots g_b$
2		h					h_c	$\dots$	h_a	$\dots$	h_f	$\dots h_d$	
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	$\dots$	q_c	$\dots$	q_a	$\dots$	q_f		
2	a	q^a	Q_e^a	Q_{e-1}^a	Q_{e-2}^a	$\dots$	Q_c^a	$\dots$	Q_a^a	$\dots$	Q_f^a		
		$\bar{q}^a$		$\bar{Q}_{e-1}^a$	$\bar{Q}_{e-2}^a$	$\dots$	$\bar{Q}_c^a$	$\dots$	$\bar{Q}_a^a$	$\dots$	$\bar{Q}_f^a$		
		m^a			M_{e-2}^a	$\dots$	M_c^a	$\dots$	M_a^a	$\dots$	M_f^a		
		p^a	P_e^a	P_{e-1}^a	P_{e-2}^a	$\dots$	P_c^a	$\dots$	P_a^a	$\dots$	P_f^a		
	$a-1$	q^{a-1}		Q_{e-1}^{a-1}	Q_{e-2}^{a-1}	$\dots$	Q_c^{a-1}	$\dots$	Q_a^{a-1}	$\dots$	Q_f^{a-1}		
		$\bar{q}^{a-1}$			$\bar{Q}_{e-2}^{a-1}$	$\dots$	$\bar{Q}_c^{a-1}$	$\dots$	$\bar{Q}_a^{a-1}$	$\dots$	$\bar{Q}_f^{a-1}$		
		m^{a-1}				$\dots$	M_c^{a-1}	$\dots$	M_a^{a-1}	$\dots$	M_f^{a-1}		
		p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	$\dots$	P_c^{a-1}	$\dots$	P_a^{a-1}	$\dots$	P_f^{a-1}		
	$a-2$	q^{a-2}			Q_{e-2}^{a-2}	$\dots$	Q_c^{a-2}	$\dots$	Q_a^{a-2}	$\dots$	Q_f^{a-2}		
		$\bar{q}^{a-2}$				$\dots$	$\bar{Q}_c^{a-2}$	$\dots$	$\bar{Q}_a^{a-2}$	$\dots$	$\bar{Q}_f^{a-2}$		
		m^{a-2}				$\dots$	M_c^{a-2}	$\dots$	M_a^{a-2}	$\dots$	M_f^{a-2}		
		p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	$\dots$	P_c^{a-2}	$\dots$	P_a^{a-2}	$\dots$	P_f^{a-2}		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	b	q^b									Q_f^b		
		$\bar{q}^b$											
		m^b											
		p^b									P_f^b		
Σ	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ_e^a	Σ_{e-1}^a	Σ_{e-2}^a	$\dots$	Σ_c^a	$\dots$	Σ_a^a	$\dots$	Σ_f^a		
	$\binom{a}{a-1}$	p^{a-1}		P_{e-1}^{a-1}	P_{e-2}^{a-1}	$\dots$	P_c^{a-1}	$\dots$	P_a^{a-1}	$\dots$	P_f^{a-1}		
		n^{a-1}			N_{e-2}^{a-1}	$\dots$	N_c^{a-1}	$\dots$	N_a^{a-1}	$\dots$	N_f^{a-1}		
		Σ^{a-1}	Σ_e^{a-1}	Σ_{e-1}^{a-1}	Σ_{e-2}^{a-1}	$\dots$	Σ_c^{a-1}	$\dots$	Σ_a^{a-1}	$\dots$	Σ_f^{a-1}		
	$\binom{a}{a-2}$	p^{a-2}			P_{e-2}^{a-2}	$\dots$	P_c^{a-2}	$\dots$	P_a^{a-2}	$\dots$	P_f^{a-2}		
		n^{a-2}				$\dots$	N_c^{a-2}	$\dots$	N_a^{a-2}	$\dots$	N_f^{a-2}		
		Σ^{a-2}	Σ_e^{a-2}	Σ_{e-1}^{a-2}	Σ_{e-2}^{a-2}	$\dots$	Σ_c^{a-2}	$\dots$	Σ_a^{a-2}	$\dots$	Σ_f^{a-2}		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	$\binom{a}{b}$	p^b									P_f^b		
		n^b											
		Σ^b	Σ_e^b	Σ_{e-1}^b	Σ_{e-2}^b	$\dots$	Σ_c^b	$\dots$	Σ_a^b	$\dots$	Σ_f^b		

посчитали длину выравнивания $L = 4 = \max\{1 + |-2| + 1,\ 0 + |-3| + 1,\ 2 + 1\}$, выровняли все члены по ней (D).

Определим таблицу умножения $\lambda = 2$ и таблицу сложения $\phi = 0$. Производим умножение $6_1 *_0^2 0_0.2_{\bar{1}}4_{\bar{2}}3_{\bar{3}}$. Индекс 1 при 6 определяет номер v блока. Перемножаем цифры $6_1 *_0^2 0_0$:

$$6_1 *_0^2 0_0 = (95)_{60} = 9_{1+0+1}^1 5_{1+0}^1 = 9_2^1 5_1^1 = Q_2^1 \bar{Q}_1^1.$$

Таблица 4.2. Сетка и пример умножения для случая $g_1 g_0 . g_{\bar 1} g_{\bar 2} *^i_j h_0 . h_{\bar 1} h_{\bar 2} h_{\bar 3}$

-1		*2, 0*		$2\ 1\ 0 \mid \bar 1\ \bar 2\ \bar 3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar 1\ \bar 2\ \bar 3$
0				$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1		g		$g_1\ g_0 \mid g_{\bar 1}\ g_{\bar 2}$	$6\ 0 \mid 2\ 1$
2		h		$h_0 \mid h_{\bar 1}\ h_{\bar 2} h_{\bar 3}$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3		x		$x_2\ x_1\ x_0 \mid x_{\bar 1}$	$x_2 x_1 x_0 \mid x_{\bar 1}$
4			q^1	$Q^1_2 Q^1_1\ Q^1_0 \mid Q^1_{\bar 1}$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5		1	$\bar q^1$	$\bar Q^1_1\ \bar Q^1_0 \mid \bar Q^1_{\bar 1}$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^1	$M^1_0 \mid M^1_{\bar 1}$	$1 \mid 0$
7			$p^1 = g_1 *^2_0 h$	$P^1_2 P^1_1\ P^1_0 \mid P^1_{\bar 1}$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8			q^0	$Q^0_1\ Q^0_0 \mid Q^0_{\bar 1}$	$2\ 1 \mid 8$
9		0	$\bar q^0$	$\bar Q^0_0 \mid \bar Q^0_{\bar 1}$	$0 \mid 9$
10			m^0	$\mid M^0_{\bar 1}$	$\mid 5$
11	2		$p^0 = g_0 *^2_0 h$	$P^0_1\ P^0_0 \mid P^0_{\bar 1}$	$2\ 3 \mid 5$
12			$q^{\bar 1}$	$Q^{\bar 1}_0 \mid Q^{\bar 1}_{\bar 1}$	$6 \mid 0$
13		$\bar 1$	$\bar q^{\bar 1}$	$\mid \bar Q^{\bar 1}_{\bar 1}$	$\mid 7$
14			$m^{\bar 1}$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar 1} = g_{\bar 1} *^2_0 h$	$P^{\bar 1}_0 \mid P^{\bar 1}_{\bar 1}$	$6 \mid 3$
16			$q^{\bar 2}$	$\mid Q^{\bar 2}_{\bar 1}$	$\mid 8$
17		$\bar 2$	$\bar q^{\bar 2}$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar 2}$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar 2} = g_{\bar 2} *^2_0 h$	$\mid P^{\bar 2}_{\bar 1}$	$\mid 8$
20		$\binom{1}{1}$	$\Sigma^1 = p^1$	$\Sigma^1_2 \Sigma^1_1\ \Sigma^1_0 \mid \Sigma^1_{\bar 1}$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21			p^0	$P^0_1\ P^0_0 \mid P^0_{\bar 1}$	$2\ 3 \mid 5$
22		$\binom{1}{0}$	n^0	$N^0_0 \mid N^0_{\bar 1}$	$3 \mid 9$
23			$\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$	$\Sigma^0_2 \Sigma^0_1\ \Sigma^0_0 \mid \Sigma^0_{\bar 1}$	$9\ 4\ \ 7 \mid 5$
24	Σ		$p^{\bar 1}$	$P^{\bar 1}_0 \mid P^{\bar 1}_{\bar 1}$	$6 \mid 3$
25		$\binom{1}{\bar 1}$	$n^{\bar 1}$	$\mid N^{\bar 1}_{\bar 1}$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar 1} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar 1}$	$\Sigma^{\bar 1}_2 \Sigma^{\bar 1}_1\ \Sigma^{\bar 1}_0 \mid \Sigma^{\bar 1}_{\bar 1}$	$9\ 4\ 5\ \mid 4$
27			$p^{\bar 2}$	$\mid P^{\bar 2}_{\bar 1}$	$\mid 8$
28		$\binom{1}{\bar 2}$	$n^{\bar 2}$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar 2} = \Sigma^{\bar 1} +_0 p^{\bar 2}$	$\Sigma^{\bar 2}_2 \Sigma^{\bar 2}_1\ \Sigma^{\bar 2}_0 \mid \Sigma^{\bar 2}_{\bar 1}$	$9\ 4\ 5\ \mid 1$

Неперенос $9 = 9^1_2 = Q^1_2$ записываем в строку q^1, столбец 2, определяемый подындексом 2; перенос $\bar{\bar 5} = \bar 5^1_1 = \bar Q^1_1$ — в строку $\bar q^1$. В таблице примера надчеркивания и индексы опущены, чтобы не загромождать значения ячеек. Аналогично с другими цифрами:

$$6_1 *^2_0 2_{\bar 1} = (47)_{62} = 4^1_{1-1+1} 7^1_{1-1} = 4^1_1 7^1_0 = Q^1_1 \bar Q^1_0$$
$$6_1 *^2_0 4_{\bar 2} = (30)_{64} = 3^1_{1-2+1} 0^1_{1-2} = 3^1_0 0^1_{\bar 1} = Q^1_0 \bar Q^1_{\bar 1}$$
$$6_1 *^2_0 3_{\bar 3} = (51)_{63} = 5^1_{1-3+1} 1^1_{1-3} = 5^1_{\bar 1} 1^1_{\bar 2} = Q^1_{\bar 1} \bar Q^1_{\bar 2}.$$

Перенос 1 последнего произведения цифр отбрасываем, поскольку его разряд -2 правее $f = -1$.

Выполняем c-сложение полученных строк $q^1 +_0 \bar{q}^1 = 9^1_2 4^1_1 3^1_0 5^1_{\bar{1}} + 5^1_1 7^1_0 0^1_{\bar{1}} = 9^1_2 7^1_1 4^1_0 7^1_{\bar{1}}$ Произведение $6_1 *^2_0 0_0.2_{\bar{1}} 4_{\bar{2}} 3_{\bar{3}} = 9^1_2 7^1_1 4^1_0 7^1_{\bar{1}}$ готово.

Выполнив аналогичные вычисления для умножений других цифр левого сомножителя на правый сомножитель, мы заполним оставшиеся блоки $1 - \bar{2}$. Скопируем строки 7, 11, 15, 19 в строки 20, 21, 24, 27 соответственно и перейдем к блокам строк $20 - 29$. Последовательно произведя уже знакомые нам c-сложения для $\Sigma^0 = \Sigma^1 +_0 p^0$, $\Sigma^{\bar{1}} = \Sigma^0 +_0 p^{\bar{1}}$, $\Sigma^{\bar{2}} = \Sigma^{\bar{1}} +_0 p^{\bar{2}} = g *^2_0 h$, мы завершим умножение $60.21 *^2_0 0.243 = 945.1$.

Приведем пример умножения одноразрядных чисел, поскольку оно не является простым взятием значения ячейки таблицы подстановок, как это имеет место в классической арифметике. Для этого продолжим пример подготовки на странице 23, заменив 4 на 5, выполнив его по таблицам: 2 — для умножения, 0 — сложения (для экономии высоты таблицы символы внесены слева от знака умножения):

$$
\begin{array}{lr|l}
 & {\scriptstyle 2\,1\,0} & {\scriptstyle \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}} \\
\hline
 & 0 & 0 \\
*^2_0 & 5 & 0 \\
\hline
 & .. & \\
\hline
 & 92 & \\
 & 6 & \\
 & & \\
 & 93 & \\
\hline
 & 9 & \\
 & & \\
 & & \\
 & 9 & \\
\hline\hline
 & 93 & \\
\hline
 & 9 & \\
 & & \\
 & 92 & \\
\hline
\end{array}
$$

Таким образом, имеем $0 *^2_0 5 = 92$ вместо 96, если бы просто взяли значение ячейки 05.

Известные определения умножения конечных дробей изменим на бесконечный случай

Определение 4.37. (сетка умножения бесконечных дробей) Таблица 4.3 на странице 29 повторяющая сетку умножения конечных дробей из определения 4.35 страницы 25, но продолженная бесконечно вправо и вниз, называется сеткой умножения бесконечных дробей.

Определение 4.38. (умножение чисел-бесконечных дробей, их произведение) Умножением $g *^i_j h = q$ бесконечных дробей называется выполнение шагов:

(1) подготовить члены-бесконечные дроби умножения g, h, q;
(2) выполнить умножение $g_k *^i_j h_c h_{c-1} \dots h_0.h_{\bar{1}} \dots$, где $k = a, a-1, \dots$ цифры g_k левого сомножителя на правый сомножитель h и вписать результат в блок k;

Таблица 4.3. Сетка умножения к определению 4.37 на странице 28

-1	λ,ϕ		e	$e-1$	$e-2$	$\dots$	c	$\dots$	a	$\dots$	0	$\bar{1}$	
0			e				c		a				
1		g							g_a	$\dots$	g_0	$g_{\bar{1}}$	$\dots$
2		h					h_c	$\dots$	h_a	$\dots$	h_0	$h_{\bar{1}}$	$\dots$
3		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	$\dots$	q_c	$\dots$	q_a	$\dots$	q_0	$q_{\bar{1}}$	$\dots$
		q^a	Q^a_e	Q^a_{e-1}	Q^a_{e-2}	$\dots$	Q^a_c	$\dots$	Q^a_a	$\dots$	Q^a_0	$Q^a_{\bar{1}}$	$\dots$
	a	$\bar{q}^a$		$\bar{Q}^a_{e-1}$	$\bar{Q}^a_{e-2}$	$\dots$	$\bar{Q}^a_c$	$\dots$	$\bar{Q}^a_a$	$\dots$	$\bar{Q}^a_0$	$\bar{Q}^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		m^a			M^a_{e-2}	$\dots$	M^a_c	$\dots$	M^a_a	$\dots$	M^a_0	$M^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		p^a	P^a_e	P^a_{e-1}	P^a_{e-2}	$\dots$	P^a_c	$\dots$	P^a_a	$\dots$	P^a_0	$P^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		q^{a-1}		Q^{a-1}_{e-1}	Q^{a-1}_{e-2}	$\dots$	Q^{a-1}_c	$\dots$	Q^{a-1}_a	$\dots$	Q^{a-1}_0	$Q^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$a-1$	$\bar{q}^{a-1}$			$\bar{Q}^{a-1}_{e-2}$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_c$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_a$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-1}_0$	$\bar{Q}^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		m^{a-1}				$\dots$	M^{a-1}_c	$\dots$	M^{a-1}_a	$\dots$	M^{a-1}_0	$M^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
2		p^{a-1}		P^{a-1}_{e-1}	P^{a-1}_{e-2}	$\dots$	P^{a-1}_c	$\dots$	P^{a-1}_a	$\dots$	P^{a-1}_0	$P^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		q^{a-2}			Q^{a-2}_{e-2}	$\dots$	Q^{a-2}_c	$\dots$	Q^{a-2}_a	$\dots$	Q^{a-2}_0	$Q^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$a-2$	$\bar{q}^{a-2}$				$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_c$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_a$	$\dots$	$\bar{Q}^{a-2}_0$	$\bar{Q}^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		m^{a-2}				$\dots$	M^{a-2}_c	$\dots$	M^{a-2}_a	$\dots$	M^{a-2}_0	$M^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		p^{a-2}			P^{a-2}_{e-2}	$\dots$	P^{a-2}_c	$\dots$	P^{a-2}_a	$\dots$	P^{a-2}_0	$P^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
	$\binom{a}{a}$	Σ^a	Σ^a_e	Σ^a_{e-1}	Σ^a_{e-2}	$\dots$	Σ^a_c	$\dots$	Σ^a_a	$\dots$	Σ^a_0	$\Sigma^a_{\bar{1}}$	$\dots$
		p^{a-1}		P^{a-1}_{e-1}	P^{a-1}_{e-2}	$\dots$	P^{a-1}_c	$\dots$	P^{a-1}_a	$\dots$	P^{a-1}_0	$P^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\binom{a}{a-1}$	n^{a-1}			N^{a-1}_{e-2}	$\dots$	N^{a-1}_c	$\dots$	N^{a-1}_a	$\dots$	N^{a-1}_0	$N^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
		Σ^{a-1}	Σ^{a-1}_e	Σ^{a-1}_{e-1}	Σ^{a-1}_{e-2}	$\dots$	Σ^{a-1}_c	$\dots$	Σ^{a-1}_a	$\dots$	Σ^{a-1}_0	$\Sigma^{a-1}_{\bar{1}}$	$\dots$
Σ		p^{a-2}			P^{a-2}_{e-2}	$\dots$	P^{a-2}_c	$\dots$	P^{a-2}_a	$\dots$	P^{a-2}_0	$P^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\binom{a}{a-2}$	n^{a-2}				$\dots$	N^{a-2}_c	$\dots$	N^{a-2}_a	$\dots$	N^{a-2}_0	$N^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
		Σ^{a-2}	Σ^{a-2}_e	Σ^{a-2}_{e-1}	Σ^{a-2}_{e-2}	$\dots$	Σ^{a-2}_c	$\dots$	Σ^{a-2}_a	$\dots$	Σ^{a-2}_0	$\Sigma^{a-2}_{\bar{1}}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
		q	q_e	q_{e-1}	q_{e-2}	$\dots$	q_c	$\dots$	q_a	$\dots$	q_0	$q_{\bar{1}}$	$\dots$

(3) последовательно выполнить в блоках $\binom{a}{a}, \binom{a}{a-1}, \dots$ c-сложения полученных произведений p^a, p^{a-1}, $\dots$:

$$\Sigma^{a-1} = \Sigma^a +_i p^{a-1}, \quad \Sigma^{a-2} = \Sigma^{a-1} +_i p^{a-2}, \quad \dots .$$

Предел $\lim_{k\to-\infty} \Sigma^k = q$ последовательности $\{\Sigma^k\}$ сумм выше есть произведение бесконечных дробей g, h.

Теорема 4.39. *Умножение $*^i_j$ определено для любых $g, h \in \mathbb{R}_+$, причем $g *^i_j h = q \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Для любых цифр–сомножителей g_k, h_j, выполнимо умножение $g_k *^i_j h_j$, следовательно, можно получить любые строки $q^k, \bar{q}^k$. c-сложение $q^k +_i \bar{q}^k = p^k$ выполнимо в силу выполнимости сложения $+_i$. Это же верно для сложения $\Sigma^k = \Sigma^{k+1} +_i p^k$, при любом $k < a$. Для конечных дробей получаем неотрицательное действительное число.

Покажем, что предел $\lim_{k\to-\infty}\Sigma^k = q$ существует для любых g, h. В самом деле, мы видим, что в частичную сумму Σ^k сносится $a-k$, $k<a$, начальных цифр. Это значит, мы каждый раз получаем увеличивающееся неизменяемое начало числа из k цифр, а предел q будет действительным неотрицательным числом. □

4.4. **Деления.** Аналогично вычитаниям, мы переносим порядок членов обычного деления на наши. Введем обозначения для делений по умножению $g *^i_j h = q$:

$$\begin{aligned} q \;{}_j\!\!\setminus^{\!i}\, g = h \quad &- \quad \text{левое деление или деление на левый сомножитель,} \\ q \;{}^i\!/\!_j\, h = g \quad &- \quad \text{правое деление или деление на правый сомножитель.} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\left.\begin{array}{l} q \;:^i_j\; g = h \\ q \;:^i_j\; h = g \end{array}\right\} - \text{деление без различения стороны.}$$

Первые два символа без индексов взяты из [14].[11]

4.4.1. *Подготовка чисел к делению.* Как вычитание восстанавливает сетку сложения, так деление восстанавливает сетку умножения и требует подготовки членов для выполнимости и однозначности. Символы подготовки к делениям — те же символы определения 4.27, по-другому посчитанные, а подготовленные члены деления соответствуют подготовленным членам 4.8, и 4.9, с учетом замечаний о восстановлении на странце 39. Определим

Процедура 4.40. (Подготовка к делению) Для чисел 3.1 пусть

$$y = y_{t'} \dots y_0.y_{\bar 1} \dots y_{u'} \dots$$

— делитель числа q,

$$x = x_{r'} \dots x_0.x_{\bar 1} \dots x_{s'} \dots$$

— частное от деления $q :^i_j x$ тогда:

(1) отбросить незначащие нули у целой и дробной частей произведения и делителя, получив $q_{e''\le e'}$, $y_{t\le t'}$ — старшие значащие цифры, $q_{f''\ge f'}$, $y_{u''\ge u'}$ — младшие значащие цифры, для конечных дробей;

(2) посчитать номер e старшей цифры q_e целой части произведения q:

$$e = \begin{cases} e'', & \text{если } e'' > t, \\ t+1, & \text{если } e'' \le t; \end{cases}$$

(3) посчитать номер старшей цифры частного

$$r = e - t - 1$$

(4) если хотя бы один член из q или y — бесконечная дробь, перейти к шагу 6, иначе вычислить длину L подготовленных членов умножения

$$L = \max\{e + |f''| + 1,\ t + |u''| + 1\};$$

[11] Там другой порядок следования членов деления, как упоминалось ранее.

(5) выровнять второй аргумент по длине L, в дробной части дописывая незначащие нули, и с получением

$$\begin{cases} q = \underbrace{\overbrace{q_e \dots q_0}^{t+r+2} . q_{\bar 1} \dots q_f}_{L}, \\ y = \underbrace{y_t \dots y_0 . y_{\bar 1} \dots y_u}_{L}, \\ x = \underbrace{x_r \dots x_0 . x_{\bar 1} \dots x_s}_{L} \end{cases}$$

остановить подготовку членов деления;

(6) аргумент-конечную дробь, если имеется, дополнить в дробной части незначащими нулями до бесконечной дроби и числами вида

$$\begin{cases} q = \overbrace{q_e \dots q_0}^{t+r+2} . q_{\bar 1} \dots, \\ y = y_t \dots y_0 . y_{\bar 1} \dots, \\ x = x_r \dots x_0 . x_{\bar 1} \dots \end{cases}$$

завершить подготовку членов деления.

Определение 4.41. (символы подготовки) Символы r, s, t, u, e, f из процедуры 4.40 называются символами подготовки к делению, L — длиной выравнивания, а числа x, y, q после данной процедуры — подготовленными членами деления.

Пример ниже показывает в колонке B отбрасывание незначащих нулей; в C — что номер старшей цифры делимого q остается без изменений, поскольку $3 > 0$, номер же старшей цифры частного равен $2 = 3 - 0 - 1$ (отмечена точкой вместе со всей целой частью); а выровненные по длине $L = 5 = \max\{3 + |-1| + 1,\ 0 + |-1| + 1\}$ члены мы находим в D: для g дописали 000, в h всего пять точек:

A	B	C	D
$\begin{array}{ll r\|l} & & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline g & & 00 & 1 \\ & *^i_j & & \\ h & & & \\ \hline q & & 9870 & 40 \end{array}$	$\begin{array}{l r\|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 0 & 1 \\ *^i_j & & \\ \hline & 9870 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{l r\|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 0 & 1 \\ *^i_j & \dots & \\ \hline & 9870 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{l r\|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 0 & 1000 \\ *^i_j & \dots & .. \\ \hline & 9870 & 4 \end{array}$

Взятые в другом порядке —

A	B	C	D
$\begin{array}{ll r\|l} & & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline g & & 9870 & 40 \\ & *^i_j & & \\ h & & & \\ \hline q & & 00 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{l r\|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 9870 & 4 \\ *^i_j & & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{l r\|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 9870 & 4 \\ *^i_j & . & \\ \hline & 00000 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{l r\|l} & 43210 & \bar1\bar2\bar3\bar4\bar5 \\ \hline & 9870 & 40 \\ *^i_j & . & ..... \\ \hline & 00000 & 1 \end{array}$

— дают другой результат подготовки: поскольку для номера старшей цифры делимого выполняется $e'' = 0 < 3$, то $e = 4 = 3 + 1$ (C); старшая цифра частного будет в разряде $0 = 4 - 3 - 1$ (там же); длина выравнивания $L = 6 = \max\{4 + |-1| + 1,\ 3 + |-1| + 1\}$ диктует дописать 0 для g и пять точек для h (колонка D).

Последовательность таблиц

A	B	C	D
$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline g & & \\ h\,*^i_j & 034 & 555\ \ldots \\ \hline q & 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline & & \\ *^i_j & 34 & 555\ \ldots \\ \hline & 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline & .. & \\ *^i_j & 34 & 555\ \ldots \\ \hline & 9999 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\ \ldots \\ \hline & .. & \ldots\ \ldots \\ *^i_j & 34 & 555\ \ldots \\ \hline & 9999 & 000\ \ldots \end{array}$

показывает каким будет деление, если делимое — бесконечная дробь. Процедура отбрасывает незначащий ноль у h (см. B), оставляет без изменения номер $e = 3$, дает разряд $r = 1 = 3 - 1 - 1$ старшей цифры частного (C), дописывает для q бесконечное число нулей в дробную часть и обозначает бесконечную запись дробной части частного (D).

Делению однаразрядного числа на одноразрядное число соответствует последовательность

A	B	C	D
$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline g & & \\ h\,*^i_j & 0 & \\ \hline q & 0 & \end{array}$		$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & . & \\ *^i_j & 0 & \\ \hline & 00 & \end{array}$	$\begin{array}{lr\|l} & 43210 & \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\ \hline & . & . \\ *^i_j & 0 & 0 \\ \hline & 00 & \end{array}$

Умножая числа, мы производили копирования цифр и начальные цифры произведения получаются последовательным копированием начал частичных сумм. Поскольку при делении произведение известно, то автоматически известными становятся соответственные начала всех частичных сумм и, кроме того, первая цифра P^a_e строки p^a, первая цифра Q^a_e строки q^a. Восстанавливается все это посредством

Процедура 4.42. (копирование известных цифр делимого) Пусть a, b, e — символы подготовки из сетки умножения, $o, w \in \mathbb{Z}$. Тогда:

(1) в сетке умножения из строки делимого (произведения) q в ячейки Q^a_e, P^a_e строк q^a, p^a соответственно скопировать первую цифру q_e делимого;
(2) установить $o = a$, $w = 1$;
(3) в строку Σ^o, начиная со столбца e скопировать первые w цифр делимого q из строки 3;
(4) уменьшить o на 1, увеличить w на 1;
(5) если делимое — бесконечная дробь перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу;
(6) (для конечной дроби) если $o \geq b$, перейти к шагу 3, иначе остановить копирование.

Соберем для удобства вместе выполнимые сетки сложения и вычитания цифр в сетки 4.13, 4.14, а также введенные для удобства разбора примеров деления выполнимые сетки умножения-деления цифр (не чисел) 4.11 и сетки копирования 4.12. Общими для всех указанных сеток обозначениями будут: A — номер колонки таблицы примера (см. верхнюю строку таблицы 5.2, например); $_z$ — номер столбца в данной колонке A; v — номер подблока в блоке 2 примера; $\binom{a}{j}$ — номер подблока в блоке Σ примера. Символы $g, h, Q, \bar{Q}, M, P, \Sigma, N$, с опущенными над-, подындексами трактуются как цифры из определения сетки умножения, причем трактуются позиционно: Σ в разных строках могут быть не равными друг другу. Для экономии ширины, номер $z-1$ опущен во всех сетках.

Определение 4.43. (сетки умножения-деления цифр[12]) С учетом абзаца на с. 32, сетки

$$(4.11)\qquad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\multicolumn{3}{c}{g_v *^i_j h_w}\\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\scriptstyle z=v+w+1}\\ \hline
 & \scriptstyle z & \\ \hline
k & \cdot & \\
 & & \cdot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\cdot_v *^i_j h_w}\\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\scriptstyle z=v+w+1}\\ \hline
 & \scriptstyle z & \\ \hline
k & Q & \\
 & & \cdot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\multicolumn{3}{c}{g_v *^i_j \cdot_w}\\ \hline
\multicolumn{3}{c}{\scriptstyle z=v+w+1}\\ \hline
 & \scriptstyle z & \\ \hline
k & Q & \\
 & & \cdot
\end{array}$$

называются выполнимыми сетками умножения-деления цифр и являются табличным представлением прямого, левонеизвестного и правонеизвестного атомарных уравнений 3.2–3.4, переписанных как

$$g_v *^i_j h_w = Q\bar{Q}, \quad \cdot_v *^i_j h_w = Q\ .\ , \quad g_v *^i_j \cdot_w = Q\ .$$

соответственно; точка заменяет неизвестную цифру уравнения; $z = v+w+1$ — формула расчета столбца z, в который записывается неперенос произведения цифр.

Определение 4.44. (сетки копирования) Сетками копирования цифр будут таблицы

$$(4.12)\qquad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline
 & \scriptstyle z\\ \hline
\Pi q^v & Q\\
 & \downarrow\\
\Pi p^v & .
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline
 & \scriptstyle z\\ \hline
\Pi q^v & .\\
 & \uparrow\\
\Pi p^v & P
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline
 & \scriptstyle z\\ \hline
\Pi p^v & P\\
 & \downarrow\\
\Sigma p^v & .
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline
 & \scriptstyle z\\ \hline
\Pi p^v & .\\
 & \uparrow\\
\Sigma p^v & P
\end{array}$$

в которых символы $\Pi q^v, \Pi p^v, \Sigma p^v$ указывают на строки q^v, p^v в блоках, обозначенных префиксами Π, Σ. Стрелка указывает откуда и куда копируется цифра.

К двум группам сеток ниже определения и комментарии озвучивались; нижние сетки — это те же верхние, но данные для большей визуальной связи с блоком Σ.

(4.13)

$$
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\mathrm{E} & \scriptstyle z & \\ \hline
 & Q & \\
 & \bar{Q} & \\
v & & .\\
 & . & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\mathcal{E} & \scriptstyle z & \\ \hline
 & Q & \\
 & \bar{Q} & \\
v & M & .\\
 & . & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\mathrm{F}^l & \scriptstyle z & \\ \hline
 & Q & \\
 & . & \\
v & & .\\
 & P & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\mathcal{F}^l & \scriptstyle z & \\ \hline
 & Q & \\
 & . & \\
v & M & .\\
 & P & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\mathrm{F}^r & \scriptstyle z & \\ \hline
 & . & \\
 & \bar{Q} & \\
v & & .\\
 & P & \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc}
\multicolumn{3}{c}{A}\\ \hline
\mathcal{F}^r & \scriptstyle z & \\ \hline
 & . & \\
 & \bar{Q} & \\
v & M & .\\
 & P & \\ \hline
\end{array}
$$

[12]Но не одноразрядных чисел!

(4.14)

A		A		A		A		A		A	
E	z	$\mathcal{E}$	z	F^l	z	$\mathcal{F}^l$	z	F^r	z	$\mathcal{F}^r$	z
	Σ		Σ		Σ		Σ		.		.
	P		P		.		.		P		P
$\binom{a}{j}$	.	$\binom{a}{j}$	N .	$\binom{a}{j}$	.	$\binom{a}{j}$	N .	$\binom{a}{j}$	.	$\binom{a}{j}$	N .
	.		.		Σ		Σ		Σ		Σ

Определение 4.45. (деление дробей, их частное) Пусть, если $y = g$, то $x = h$, и наоборот, если $y = h$, то $x = g$. Делением $q :^i_j y = x$ дробей по умножению $*^i_j$ будет выполнение шагов для заполнения сетки умножения

(1) подготовить дроби q, y, x;
(2) построить сетку умножения подготовленных членов деления;
(3) взять таблицы умножения и сложения для умножения $*^i_j$;
(4) скопировать известные цифры произведения q в ячейки блока Σ сетки умножения процедурой 4.42 копирования;
(5) если дроби бесконечны и существует выполнимая сетка из групп 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 выполнять ее, иначе, если дроби конечны, перейти к шагу 6;
(6) если дроби конечны, $z \geq f$ и существует выполнимая сетка разряда z из групп 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, выполнять сетку.

Число в строке x будет частным от деления $q :^i_j y = x$.

Это определение общее и для правого, и для левого деления. Тем не менее, они будут несколько отличаться в порядке восстановления сетки умножения.

Разбираем пример правого деления $q \; {}^{i}\!/_{j} \; h = 945.13 \; {}^{2}\!/_{0} \; 0.243 = x$ по умножению $x *^2_0 0.243 = 945.13$, представленный в таблицах 5.2, 5.3, 5.4 на страницах 42, 43, 44 соответственно. В них мы последовательно по колонкам отобразили ход деления. (Все это можно было бы выполнить в одной колонке.) В целом правое деление восстанавливает сетку умножения так: процедура копирования заполнит блок Σ «треугольником» начала частичных сумм, когда первая (самая верхняя) частичная сумма будет иметь одну цифру, вторая сумма — две, ..., последняя будет иметь $|a - b| + 1$ цифр; затем восстановится блок Πa и сумма Σ^a, блок $\Pi(a-1)$ и сумма Σ^{a-1}, ..., $\Pi(b)$ (сумма Σ^b уже скопирована процедурой). Помним, что $\Sigma^a = (\Pi)p^a$.

Готовим члены умножения $0060.21 *^2_0 0.243 = 945.1$ к правому делению $945.1 \, {}^{2}\!/_{0}$ 0.243.

$$
\begin{array}{cccc}
A & B & C & D \\
\hline
\begin{array}{ll}
 & 43210|\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
g & \qquad\;\;\; | \\
h *^2_0 & \qquad 0|243 \\
\hline
q & 945|1
\end{array}
&
&
\begin{array}{ll}
 & 43210|\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
 & \qquad ..| \\
*^2_0 & \qquad 0|243 \\
\hline
 & 945|1
\end{array}
&
\begin{array}{ll}
 & 43210|\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5} \\
\hline
 & \qquad ..|.. \\
*^2_0 & \qquad 0|243 \\
\hline
 & 945|1
\end{array}
\end{array}
$$

Отбрасывание незначащих нулей не нужно (пустая B). В силу $2 > 0$ верно $e = 2$ для старшей цифры произведения. Старшая цифра частного g будет находиться в разряде $1 = 2 - 0 - 1$. Длина: $L = 4 = \max\{2 + |-1| + 1,\ 0 + |-3| + 1\}$. По ней мы дописываем только две точки дробной части у частного.

Теперь построим сетку умножения и определим таблицы подстановок (это уже известно по умножению $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$) — колонка A. После копирования начал (колонка B) в блоке 1 мы имеем первую выполнимую сетку

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdot_1 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 2=1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 2 \\ \hline 1 & 9 \\ & \quad . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 2=1+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 2 \\ \hline 1 & 9 \\ & \quad 5 \end{array}$$

автоматически влекущую умножение $6 *_0^2 0.243 = 974.7$ (C) — комбинацию выполнимых сеток умножений и сложений цифр. Дальше, помня из умножения, мы копируем 974.7 в строку Σ^1, что является серией выполнимых сеток копирования цифр. Это влечет выполнимость сетки вычитания и двух копирований

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \binom{1}{0} & \quad . \\ & 4 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & 2 \\ \binom{1}{0} & \quad 3 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ & \uparrow \\ \Sigma p^0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline \Pi q^0 & 2 \\ & \uparrow \\ \Pi p^0 & 2 \end{array}$$

Снова будем иметь выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdot_0 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=0+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline 0 & 2 \\ & \quad . \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *_0^2 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 1=0+0+1} \\ \hline & \scriptstyle 1 \\ \hline 0 & 2 \\ & \quad 0 \end{array}$$

с последующим перемножением $0 *_0^2 0.24 = 23.5$[13] в блоке 0 и копированием его результата в строку Σp^0 (колонка E). Коль скоро у нас есть два произведения цифр (строки 20–21), мы их можем сложить в блоке $\binom{1}{0}$, колонке F. Это влечет выполнимое вычитание начальных цифр блоком ниже и копирования

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & . \\ \binom{1}{\bar{1}} & \quad . \\ & 5 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline \mathrm{F}^l & \scriptstyle 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & 6 \\ \binom{1}{\bar{1}} & \quad 2 \\ & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline \Pi p^{\bar{1}} & 6 \\ & \uparrow \\ \Sigma p^{\bar{1}} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{G} \\ \hline & \scriptstyle 0 \\ \hline \Pi q^{\bar{1}} & 6 \\ & \uparrow \\ \Pi p^{\bar{1}} & 6 \end{array}$$

[13] Умножение на цифру 0 из 0.24 уже отражено в сетке; последнюю цифру 3 умножать не обязательно, т.к. это произведение лежит правее последнего разряда произведения. В дальнейшем аналогичные ситуации мы будем подразумевать.

Опять получим выполнимое деление цифр

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{G}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdot_{\bar 1} *^2_0 0_0}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 0=\bar 1+0+1}\\ \hline & \scriptstyle 0\\ \hline \bar 1 & 6\\ & \quad .\end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{H}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{2_{\bar 1} *^2_0 0_0}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle 0=\bar 1+0+1}\\ \hline & \scriptstyle 0\\ \hline \bar 1 & 6\\ & \quad 7\end{array}$$

За ним последует перемножение $2 *^2_0 0.2 = 6.3$, копирование результата в блок Σ, строку $\Sigma p^{\bar 1}$. Получаем новую частичную сумму $947.5 +_0 6.3 = 945.4$ в колонке I, строке $\Sigma^{\bar 1}$ и повторяем вычитание начальных цифр с копированиями

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{I}\\ \hline \mathrm{F}^l & \bar 1\\ \hline & 4\\ \hline & .\\ \binom{1}{2} & \\ & 1\\ \hline \end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{J}\\ \hline \mathrm{F}^l & \bar 1\\ \hline & 4\\ \hline & 8\\ \binom{1}{2} & \\ & 1\\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{J}\\ \hline & \bar 1\\ \hline \Pi p^{\bar 2} & 8\\ & \uparrow\\ \Sigma p^{\bar 2} & 8 \end{array}
\quad
\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{J}\\ \hline & \bar 1\\ \hline \Pi q^{\bar 2} & 8\\ & \uparrow\\ \Pi p^{\bar 2} & 8 \end{array}$$

Остается посчитать последнюю цифру искомого сомножителя:

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{K}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cdot_{\bar 2} *^2_0 0_0}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar 1=\bar 2+0+1}\\ \hline & \scriptstyle \bar 1\\ \hline \bar 2 & 8\\ & \end{array}
\Bigg| = \Bigg|
\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{K}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{1_{\bar 2} *^2_0 0_0}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{\scriptstyle \bar 1=\bar 2+0+1}\\ \hline & \scriptstyle \bar 1\\ \hline \bar 2 & 8\\ & \end{array}$$

Правое деление $945.1 \;{}^{2}\!/_{0}\; 0.243 = 60.21$ закончено и восстановило умножение $60.21 *^2_0 0.243 = 945.1$.

Приступаем к примеру левого деления $q \;{}_{j}\!\backslash^{i}\; g = 945.1 \;{}_{0}\!\backslash^{2}\; 60.21 = h$ по умножению $60.21 *^2_0 x = 945.1$, таблиц 5.5, 5.6, 5.7 на страницах 45, 46, 47 соответственно. В целом левое деление восстановит сетку умножения иначе, нежели правое, но начала частичных сумм восстановятся аналогично. Затем сетка заполняется по «диагоналям»: сначала первые цифры строк блоков $\Pi a - \Pi b$ и первые цифры (после скопированных процедурой копирования) блоков $\Sigma\binom{a}{a} - \Sigma\binom{a}{b}$, затем вторые цифры этих же блоков секций Π, Σ, после — третьи, и т.д.

Для левого деления $945.1 \;{}_{j}\!\backslash^{i}\; 0060.21$ по умножению $0060.21 *^2_0 0.243 = 945.1$ подготовка выглядит так:

$$\begin{array}{cccc}
A & B & C & D\\ \hline
\begin{array}{ll} & {\scriptstyle 43210|\bar1\bar2\bar3\bar4\bar5}\\ \hline g & 0060|21\\ h *^2_0 & \qquad | \\ \hline q & 9451| \end{array}
&
\begin{array}{ll} & {\scriptstyle 43210|\bar1\bar2\bar3\bar4\bar5}\\ \hline & \quad 60|21\\ *^2_0 & \qquad | \\ \hline & 945|1 \end{array}
&
\begin{array}{ll} & {\scriptstyle 43210|\bar1\bar2\bar3\bar4\bar5}\\ \hline & \quad 60|21\\ *^2_0 & \quad\; .| \\ \hline & 945|1 \end{array}
&
\begin{array}{ll} & {\scriptstyle 43210|\bar1\bar2\bar3\bar4\bar5}\\ \hline & \quad 60|21\\ *^2_0 & \quad\; .|\ldots \\ \hline & 945|1 \end{array}
\end{array}$$

— отброшены незначащие нули у g, номер старшей цифры делимого остается без изменений в силу $2 > 0$, старшей цифрой частного h будет $0 = 2 - 1 - 1$, а длина $L = 4 = \max\{2 + |-1| + 1,\ 1 + |-2| + 1\}$ дописывает три точки в дробной части результата.

Состояние после копирования эквивалентно колонке B правого деления на с. 42, следовательно и первой выполнимой сеткой будет деление цифр, с разницей, что неизвестна правая цифра (первые две сетки ниже):

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 \cdot_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2{=}1{+}0{+}1} \\ \hline & 2 \\ \hline 1 & \begin{array}{l} 9 \\ \quad . \end{array} \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2{=}1{+}0{+}1} \\ \hline & 2 \\ \hline 1 & \begin{array}{l} 9 \\ \quad 5 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1{=}0{+}0{+}1} \\ \hline & 1 \\ \hline 0 & \begin{array}{l} 2 \\ \quad 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2_{\bar 1} *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0{=}\bar 1{+}0{+}1} \\ \hline & 0 \\ \hline \bar 1 & \begin{array}{l} 6 \\ \quad 7 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1_{\bar 2} *^2_0 0_0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\bar 1{=}\bar 2{+}0{+}1} \\ \hline & \bar 1 \\ \hline \bar 2 & \begin{array}{l} 8 \\ \ \end{array} \end{array}$$

Становятся возможными перемножения цифр $0.21 *^2_0 0$ (три последние сетки), вносимые по правилам умножения в подблоки $0-\bar 2$, и копирования из строк q в строки p блоков Π, Σ:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi q^0 & 2 \\ & \downarrow \\ \Pi p^0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi p^0 & 2 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi q^{\bar 1} & 6 \\ & \downarrow \\ \Pi p^{\bar 1} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & 0 \\ \hline \Pi p^{\bar 1} & 6 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar 1} & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \bar 1 \\ \hline \Pi q^{\bar 2} & 8 \\ & \downarrow \\ \Pi p^{\bar 2} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline & \bar 1 \\ \hline \Pi p^{\bar 2} & 8 \\ & \downarrow \\ \Sigma p^{\bar 2} & 8 \end{array}$$

В блоке Σ это влечет выполнимые сетки вычитаний в подблоках $\binom{1}{0}, \binom{1}{\bar 1}$ —

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \mathrm{F}^r & 1 \\ \hline & . \\ \hline & 2 \\ \binom{1}{0} & \quad . \\ & 4 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \mathrm{F}^r & 1 \\ \hline & 7 \\ \hline & 2 \\ \binom{1}{0} & \quad 3 \\ & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \mathrm{F}^r & 0 \\ \hline & . \\ \hline & 6 \\ \binom{1}{\bar 1} & \quad . \\ & 5 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \mathrm{F}^r & 0 \\ \hline & 7 \\ \hline & 6 \\ \binom{1}{\bar 1} & \quad 2 \\ & 5 \\ \hline \end{array}$$

— такое же вычитание в подблоке $\binom{1}{\bar 2}$, одно копирование из Σ^1 в Πp^1 и вычитание в подблоке 1 блока Π:

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{C} \\ \hline \mathrm{F}^r & \bar 1 \\ \hline & . \\ \hline & 8 \\ \binom{1}{\bar 2} & \\ & 1 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \mathrm{F}^r & \bar 1 \\ \hline & 4 \\ \hline & 8 \\ \binom{1}{\bar 2} & \\ & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline & 1 \\ \hline \Pi p^1 & 7 \\ & \uparrow \\ \Sigma^1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{D} \\ \hline \mathrm{F}^r & 1 \\ \hline & . \\ 1 & 5 \\ & \\ & 7 \\ \hline \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline \mathrm{F}^r & 1 \\ \hline & 4 \\ 1 & 5 \\ & \quad 1 \\ & 7 \\ \hline \end{array}$$

Теперь нам доступно вычисление второй цифры неизвестного сомножителя (первые две сетки) посредством

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{E} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 \cdot_{\bar 1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1{=}1{+}\bar 1{+}1} \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \begin{array}{l} 4 \\ \quad . \end{array} \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *^2_0 2_{\bar 1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1{=}1{+}\bar 1{+}1} \\ \hline & 1 \\ \hline 1 & \begin{array}{l} 4 \\ \quad 7 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *^2_0 2_{\bar 1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0{=}0{+}\bar 1{+}1} \\ \hline & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{l} 1 \\ \quad 9 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2_{\bar 1} *^2_0 2_{\bar 1}} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\bar 1{=}\bar 1{+}\bar 1{+}1} \\ \hline & \bar 1 \\ \hline \bar 1 & \begin{array}{l} 0 \\ \ \end{array} \end{array}$$

С учетом того, что правее разряда $\bar 1$ цифры не следует писать, нам можно перемножить вместо $60.21 *^2_0 2$ только $0.2 *^2_0 2$ (последние две сетки выше).

Появляются выполнимые сетки сложения цифр и выполнимые сетки копирования их результатов

$$\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{F}\\\hline \mathrm{E} & 0\\\hline & 1\\ & 0\\ 0 & \;\;.\\ & .\\\hline\end{array}\;\Big|=\Big|\;\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{G}\\\hline \mathrm{E} & 0\\\hline & 1\\ & 0\\ 0 & \;\;5\\ & 3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{F}\\\hline \mathrm{E} & \bar{1}\\\hline & 0\\ & 7\\ \bar{1} & \\ & .\\\hline\end{array}\;\Big|=\Big|\;\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{G}\\\hline \mathrm{E} & \bar{1}\\\hline & 0\\ & 7\\ \bar{1} & \\ & 3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{G}\\\hline & 0\\\hline \Pi p^0 & 3\\ & \downarrow\\ \Sigma p^0 & 3\end{array}\quad\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{G}\\\hline & \bar{1}\\\hline \Pi p^{\bar{1}} & 3\\ & \downarrow\\ \Sigma p^{\bar{1}} & 3\end{array}$$

автоматически влекущие сетки вычитания и копирования

$$\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{G}\\\hline \mathcal{F}^r & 0\\\hline & .\\\hline & 3\\ \binom{1}{0} & 3\,.\\ & 7\\\hline\end{array}\Big|=\Big|\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{H}\\\hline \mathcal{F}^r & 0\\\hline & 4\\\hline & 3\\ \binom{1}{0} & 3\,9\\ & 7\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{G}\\\hline \mathcal{F}^r & \bar{1}\\\hline & .\\\hline & 3\\ \binom{1}{\bar{1}} & 2\\ & 4\\\hline\end{array}\Big|=\Big|\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{H}\\\hline \mathcal{F}^r & \bar{1}\\\hline & 5\\\hline & 3\\ \binom{1}{\bar{1}} & 2\\ & 4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{H}\\\hline & 0\\\hline \Pi p^1 & 4\\ & \uparrow\\ \Sigma^1 & 4\end{array}$$

Выполняем вычитание в подблоке 1 и там же деление цифр для нахождения очередной цифры правого сомножителя:

$$\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{H}\\\hline \mathcal{F}^r & 0\\\hline & .\\ & 7\\ 1 & 1\,.\\ & 4\\\hline\end{array}\;\Big|=\Big|\;\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{I}\\\hline \mathcal{F}^r & 0\\\hline & 3\\ & 7\\ 1 & 1\,0\\ & 4\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{I}\\\hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *_0^2 \cdot_{\bar{2}}}\\\hline \multicolumn{2}{c}{0{=}1{+}\bar{2}{+}1}\\\hline & 0\\\hline 1 & 3\\ & \quad .\end{array}\;\Big|=\Big|\;\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{J}\\\hline \multicolumn{2}{c}{6_1 *_0^2 4_{\bar{2}}}\\\hline \multicolumn{2}{c}{0{=}1{+}\bar{2}{+}1}\\\hline & 0\\\hline 1 & 3\\ & \quad 0\end{array}$$

Известность цифры сомножителя дает перемножения с цифрами другого сомножителя — в нашем случае только одно — и последующее сложение неначальных цифр с копированием:

$$\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{J}\\\hline \multicolumn{2}{c}{0_0 *_0^2 4_{\bar{2}}}\\\hline \multicolumn{2}{c}{\bar{1}{=}0{+}\bar{2}{+}1}\\\hline & \bar{1}\\\hline 0 & 8\\ & \end{array}\qquad\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{J}\\\hline \mathcal{E} & \bar{1}\\\hline & 8\\ & 9\\ 0 & 5\\ & .\\\hline\end{array}\;\Big|=\Big|\;\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{K}\\\hline \mathcal{E} & \bar{1}\\\hline & 8\\ & 9\\ 0 & 5\\ & 5\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{K}\\\hline & \bar{1}\\\hline \Pi p^0 & 5\\ & \downarrow\\ \Sigma p^0 & 5\end{array}$$

Вычитанием (первые две сетки ниже)

$$\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{K}\\\hline \mathcal{F}^r & \bar{1}\\\hline & .\\\hline & 5\\ \binom{1}{0} & 9\\ & 5\\\hline\end{array}\Big|=\Big|\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{L}\\\hline \mathcal{F}^r & \bar{1}\\\hline & 7\\\hline & 5\\ \binom{1}{0} & 9\\ & 5\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{L}\\\hline & \bar{1}\\\hline \Pi p^1 & 7\\ & \uparrow\\ \Sigma^1 & 7\end{array}\qquad\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{L}\\\hline \mathcal{F}^r & \bar{1}\\\hline & .\\ & 0\\ 1 & 0\\ & 7\\\hline\end{array}\;\Big|=\Big|\;\begin{array}{c|l}\multicolumn{2}{c}{M}\\\hline \mathcal{F}^r & \bar{1}\\\hline & 5\\ & 0\\ 1 & 0\\ & 7\\\hline\end{array}$$

находим последнюю цифру частичной суммы Σ^1, копируем ее в подблок 1 (средняя сетка), вычитаем в блоке 1 (две последние сетки), делением цифр

$$\begin{array}{c} M \\ \hline 6_1 *_0^2 \cdot_{\bar{3}} \\ \hline \bar{1}{=}1{+}\bar{3}{+}1 \\ \hline \begin{array}{c|c} & \bar{1} \\ \hline 1 & 5 \\ & \end{array} \end{array} \Big| = \Big| \begin{array}{c} N \\ \hline 6_1 *_0^2 3_{\bar{3}} \\ \hline \bar{1}{=}1{+}\bar{3}{+}1 \\ \hline \begin{array}{c|c} & \bar{1} \\ \hline 1 & 5 \\ & \end{array} \end{array}$$

находим последнюю цифру неизвестного сомножителя, завершая правое деление $945.1 \ {}_{0}\!\backslash^{2}\ 60.21 = 0.243$ верным восстановлением сомножителя в умножении $60.21 *_0^2 0.243 = 945.1$.

Теорема 4.46. (1) *Если для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$ выполнимо $q :_j^i y = x$, то $x \in \mathbb{R}_+$.*

(2) *Если таблицы i, j — полулатинские* (SL)*, то $q \ {}_{j}\!\backslash^{i}\ y = x_1$ и $q \ {}^{i}\!/_{j}\ y = x_2$ выполнимы одновременно для любых $q, y \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. (1) Поскольку деление восстанавливает сетку умножения, то доказательство утверждения $y \in \mathbb{R}_+$ заимствуется из доказательства замкнутости умножения.
(2) Подготовка, копирование и построение сетки умножения выполнимы. Копирование предоставляет цифру для первой выполнимой сетки. Для сеток деления цифр выполнимость доказана условиями решения атомарных уравнений в предложении 3.12; выполнимость сеток вычитания рассматривалась в разделе о вычитаниях (предложения 4.12, 4.18) — все эти условия совпадают с условием теоремы. Для сеток умножения и сложения цифр ограничений на таблицы подстановок нет. Процедура деления определена так, что каждая выполненная сетка дает цифры для следующей выполнимой сетки хоть конечных, хоть бесконечных дробей. □

В вопросе восстановления аргументов умножения существует та же ситуация, что и с вычитанием: деление всегда выполнимо, но не всегда восстанавливает сомножители; дописыванием нужного количества нулей, тем не менее, мы их точно восстановим.

На странице 41 находятся примеры. Слева помещено умножение $93.555 *_3^3 71.198 = 0012.3 = 12.3$, с появляющимися двумя незначащими нулями результата впереди. В середине — деление $012.30 \ {}_{3}\!\backslash^{3}\ 93.555 = 7.6191$; подготовка деления добавила 0 к целой части 12.3 и дала $L = 5$. Как видим, оно не восстановило сомножитель 71.198, однако, проведя деление в правой незаполненной таблице с произведением 0012.3 вместо 012.30 читатель получит искомое 71.198.

Теорема 4.47. *Пусть имеем $g *_j^i h = q$ с таблицами i, j. Тогда, если i, j — полулатинские* (SL)*, то $q \ {}_{j}\!\backslash^{i}\ g = h$, $q \ {}^{i}\!/_{j}\ h = g$, для любых $q, g, h \in \mathbb{R}_+$, при надлежащем обрамлении незначащими нулями, когда это необходимо.*

Доказательство. Как и для аналогичной теоремы о восстановлении вычитанием нам нужно сказать, что, как только выполнимая сетка вычитания и деления цифр получает все аргументы для восстановления, она восстанавливает точно сетки сложения и умножения цифр в силу предложения 3.12.

Если подготовка чисел к делению дала ту же длину выравнивания и те же номера старших разрядов, которые были у аргументов умножения, то, в силу ранее сказанного, деление восстановит сомножитель x и никакой другой. Если подготовка дает другую, нежели у умножения, длину выравнивания и (или) другие номера старших разрядов, то это произошло только из-за нехватки незначащих нулей у аргументов деления. Значит, дописав нужное число нулей, мы востановим обе характеристики подготовленных членов деления. Как только это сделано, найденный неизвестный сомножитель будет в точности аргументом умножения $g *_j^i h = q$. □

5. Вывод

В нашей работе мы сформулировали идею использования неклассических арифметик (НКА), идею разнообразий и предложили некоторые обоснования идеи. Была определена арифметика $\mathbb{DR}_+$ с обратимыми сложениями и умножениями, представлены графики функций на ее основе. Некоторые из графиков имеют родство с графиками актуальных научных исследований.

Очень многие конструкции могут быть пересчитаны в других арифметиках. Эта самая широта множества объектов пересчета определяет потенциальную широту применения. Какие-то пересчитанные вещи мы не сможем интерпретировать и знать о них зачем они нужны. Это может быть принципильной бесполезностью полученного материала, но может быть лишь временным незнанием о пользе. Наряду с переиспользованием конструкций классической арифметики (КА), неклассические будут неизбежно порождать неизвестные до сих пор сущности наподобие упомянутых во введении операционных уравнений. Экономия мышления и последовательность в переиспользовании известных вещей подталкивает нас искать арифметики, в которых возможен наиболее широкий перенос из классической арифметики.

Таблица 5.1. Примеры восстановления сомножителей.

93.555 $*_3^3$ 71.198 = 0012.3

3, 3	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
g			9	3	5	5	5
h			7	1	1	9	8
q	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_{\bar{1}}$		
	0	5	5	3	2		
		1	3	3	0		
			1	1	8		
	0	6	9	1	0		
		4	0	0	5		
			6	5	5		
				3	9		
		4	5	7	3		
			2	6	6		
				9	1		
					1		
			2	4	2		
				2	6		
					9		
				2	4		
					2		
					2		
	0	6	9	1	0		
		4	5	7	3		
			9	8	5		
	0	0	0	3	8		
			2	4	2		
				8	3		
	0	0	1	3	6		
				2	4		
					3		
	0	0	1	2	2		
					2		
	0	0	1	2	3		

012.30 ${}_3\backslash^3$ 93.555 = 7.6191

3, 3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
g		9	3	5	5	5	
h			7	6	1	9	1
q	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_{\bar{1}}$		
	0	8	5	3	5		
		1	6	3	0		
			8	8	3		
	0	2	8	9	8		
		4	9	0	5		
			6	7	5		
				6	5		
		4	8	7	1		
			2	3	6		
				9	8		
					4		
			2	5	8		
				2	3		
					9		
				2	5		
					2		
					2		
	0	2	8	9	8		
		4	8	7	1		
			3	9	4		
	0	1	3	7	1		
			2	5	8		
				3	8		
	0	1	2	2	2		
				2	5		
					0		
	0	1	2	3	4		
					2		
	0	1	2	3	0		

0012.3 ${}_3\backslash^3$ 93.555 = h

3, 3	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
g			9	3	5	5	5
h			.	.	.	.	.
q	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_{\bar{1}}$		
	.	.	.	.	.		
		.	.	.	.		
			.	.	.		
	.	.	.	.	.		
		.	.	.	.		
			.	.	.		
				.	.		
		.	.	.	.		
			.	.	.		
				.	.		
					.		
			.	.	.		
				.	.		
					.		
				.	.		
					.		
					.		
	.	.	.	.	.		
		.	.	.	.		
			.	.	.		
	.	.	.	.	.		
			.	.	.		
				.	.		
	.	.	.	.	.		
				.	.		
					.		
	.	.	.	.	.		
					.		
	0	0	1	2	3		

Таблица 5.2. Правое деление $945.1 \,{}^{2}\!/\!_{0}\, 0.243$ (начало)

				A	B	C	D
-1		*2*		$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$
0		*0*		$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1				$x_1 x_0 \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$	$x_1 x_0 \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$	$6\ x_0 \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$	$6\ x_0 \mid x_{\bar1} x_{\bar2}$
2				$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3				$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$
4			q^1	$.\ .\ . \mid .$	$9\ .\ . \mid .$	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5		1	$\bar q^1$	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^1	$. \mid .$	$. \mid .$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$
7			p^1	$.\ .\ . \mid .$	$9\ .\ . \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8			q^0	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$2\ . \mid .$
9		0	$\bar q^0$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$
10			m^0	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
11	Π		p^0	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$2\ . \mid .$
12			$q^{\bar1}$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$
13		$\bar1$	$\bar q^{\bar1}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
14			$m^{\bar1}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar1}$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$
16			$q^{\bar2}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
17		$\bar2$	$\bar q^{\bar2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar2}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
20		$\binom{1}{1}$	Σ^1	$.\ .\ . \mid .$	$9\ .\ . \mid .$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21			p^0	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$.\ . \mid .$	$2\ . \mid .$
22		$\binom{1}{0}$	n^0	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$	$3 \mid .$
23			Σ^0	$.\ .\ . \mid .$	$9\ 4\ . \mid .$	$9\ 4\ . \mid .$	$9\ 4\ . \mid .$
24			$p^{\bar1}$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$	$. \mid .$
25	Σ	$\binom{1}{\bar1}$	$n^{\bar1}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
26			$\Sigma^{\bar1}$	$.\ .\ . \mid .$	$9\ 4\ 5 \mid .$	$9\ 4\ 5 \mid .$	$9\ 4\ 5 \mid .$
27			$p^{\bar2}$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$	$\mid .$
28		$\binom{1}{\bar2}$	$n^{\bar2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar2}$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$

Таблица 5.3. Правое деление $945.1 \,{}^2\!/_{\!0}\, 0.243$ (продолжение)

<table>
<tr><th></th><th></th><th></th><th></th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th></tr>
<tr><td>-1</td><td></td><td>$\mathit{2}$</td><td></td><td>$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$</td><td>$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$</td><td>$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$</td><td>$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td><td>$\mathit{0}$</td><td></td><td>$e\ a\ c \mid f\ b\ d$</td><td>$e\ a\ c \mid f\ b\ d$</td><td>$e\ a\ c \mid f\ b\ d$</td><td>$e\ a\ c \mid f\ b\ d$</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>$6\ 0 \mid x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$</td><td>$6\ 0 \mid x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$</td><td>$6\ 0 \mid x_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$</td><td>$6\ 0 \mid 2_{\bar{1}} x_{\bar{2}}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>0 | 2 4 3</td><td>0 | 2 4 3</td><td>0 | 2 4 3</td><td>0 | 2 4 3</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>9 4 5 |1</td><td>9 4 5 |1</td><td>9 4 5 |1</td><td>9 4 5 |1</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="16">Π</td><td rowspan="4">1</td><td>q^1</td><td>9 4 3 | 5</td><td>9 4 3 | 5</td><td>9 4 3 | 5</td><td>9 4 3 | 5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\bar{q}^1$</td><td>5 7 | 0</td><td>5 7 | 0</td><td>5 7 | 0</td><td>5 7 | 0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>m^1</td><td>1 | 0</td><td>1 | 0</td><td>1 | 0</td><td>1 | 0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>p^1</td><td>9 7 4 | 7</td><td>9 7 4 | 7</td><td>9 7 4 | 7</td><td>9 7 4 | 7</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="4">0</td><td>q^0</td><td>2 1 | 8</td><td>2 1 | 8</td><td>2 1 | 8</td><td>2 1 | 8</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\bar{q}^0$</td><td>0 | 9</td><td>0 | 9</td><td>0 | 9</td><td>0 | 9</td></tr>
<tr><td>10</td><td>m^0</td><td>| 5</td><td>| 5</td><td>| 5</td><td>| 5</td></tr>
<tr><td>11</td><td>p^0</td><td>2 3 | 5</td><td>2 3 | 5</td><td>2 3 | 5</td><td>2 3 | 5</td></tr>
<tr><td>12</td><td rowspan="4">$\bar{1}$</td><td>$q^{\bar{1}}$</td><td>. | .</td><td>. | .</td><td>6 | .</td><td>6 | 0</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$\bar{q}^{\bar{1}}$</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| 7</td></tr>
<tr><td>14</td><td>$m^{\bar{1}}$</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$p^{\bar{1}}$</td><td>. | .</td><td>. | .</td><td>6 | .</td><td>6 | 3</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="4">$\bar{2}$</td><td>$q^{\bar{2}}$</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$\bar{q}^{\bar{2}}$</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>18</td><td>$m^{\bar{2}}$</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$p^{\bar{2}}$</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td></tr>
<tr><td>20</td><td rowspan="10">Σ</td><td>$\binom{1}{1}$</td><td>Σ^1</td><td>9 7 4 | 7</td><td>9 7 4 | 7</td><td>9 7 4 | 7</td><td>9 7 4 | 7</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">$\binom{1}{0}$</td><td>p^0</td><td>2 3 | 5</td><td>2 3 | 5</td><td>2 3 | 5</td><td>2 3 | 5</td></tr>
<tr><td>22</td><td>n^0</td><td>3 | .</td><td>3 | 9</td><td>3 | 9</td><td>3 | 9</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Σ^0</td><td>9 4 7 | .</td><td>9 4 7 | 5</td><td>9 4 7 | 5</td><td>9 4 7 | 5</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">$\binom{1}{\bar{1}}$</td><td>$p^{\bar{1}}$</td><td>. | .</td><td>. | .</td><td>6 | .</td><td>6 | 3</td></tr>
<tr><td>25</td><td>$n^{\bar{1}}$</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| 2</td><td>| 2</td></tr>
<tr><td>26</td><td>$\Sigma^{\bar{1}}$</td><td>9 4 5 | .</td><td>9 4 5 | .</td><td>9 4 5 | .</td><td>9 4 5 | .</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">$\binom{1}{\bar{2}}$</td><td>$p^{\bar{2}}$</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td><td>| .</td></tr>
<tr><td>28</td><td>$n^{\bar{2}}$</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>29</td><td>$\Sigma^{\bar{2}}$</td><td>9 4 5 |1</td><td>9 4 5 |1</td><td>9 4 5 |1</td><td>9 4 5 |1</td></tr>
</table>

Таблица 5.4. Правое деление 945.1 $^2/_0$ 0.243 (окончание)

			I	J	K
-1		*2*	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$	$2\ 1\ 0 \mid \bar1\ \bar2\ \bar3$
0		*0*	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1			$6\ 0 \mid 2\ x_{\bar2}$	$6\ 0 \mid 2\ x_{\bar2}$	$6\ 0 \mid 2\ 1$
2			$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$	$0 \mid 2\ 4\ 3$
3			$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$
4	Π	1	q^1 $9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$	$9\ 4\ 3 \mid 5$
5			$\bar q^1$ $5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$	$5\ 7 \mid 0$
6			m^1 $1 \mid 0$	$1 \mid 0$	$1 \mid 0$
7			p^1 $9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
8		0	q^0 $2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$	$2\ 1 \mid 8$
9			$\bar q^0$ $0 \mid 9$	$0 \mid 9$	$0 \mid 9$
10			m^0 $\mid 5$	$\mid 5$	$\mid 5$
11			p^0 $2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$
12		$\bar1$	$q^{\bar1}$ $6 \mid 0$	$6 \mid 0$	$6 \mid 0$
13			$\bar q^{\bar1}$ $\mid 7$	$\mid 7$	$\mid 7$
14			$m^{\bar1}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar1}$ $6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
16		$\bar2$	$q^{\bar2}$ $\mid .$	$\mid 8$	$\mid 8$
17			$\bar q^{\bar2}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar2}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar2}$ $\mid .$	$\mid 8$	$\mid 8$
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1 $9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$	$9\ 7\ 4 \mid 7$
21		$\binom{1}{0}$	p^0 $2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$	$2\ 3 \mid 5$
22			n^0 $3 \mid 9$	$3 \mid 9$	$3 \mid 9$
23			Σ^0 $9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$	$9\ 4\ 7 \mid 5$
24		$\binom{1}{\bar1}$	$p^{\bar1}$ $6 \mid 3$	$6 \mid 3$	$6 \mid 3$
25			$n^{\bar1}$ $\mid 2$	$\mid 2$	$\mid 2$
26			$\Sigma^{\bar1}$ $9\ 4\ 5 \mid 4$	$9\ 4\ 5 \mid 4$	$9\ 4\ 5 \mid 4$
27		$\binom{1}{\bar2}$	$p^{\bar2}$ $\mid .$	$\mid 8$	$\mid 8$
28			$n^{\bar2}$ $\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar2}$ $9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$	$9\ 4\ 5 \mid 1$

Таблица 5.5. Левое деление $945.1 \,{}_0\!\backslash^2\, 60.21$ (начало)

				C	D	E	F
$\bar{1}$		$\mathit{2}$		$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ 1\ 0 \mid \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$
0		$\mathit{0}$		$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$	$e\ a\ c \mid f\ b\ d$
1				6 0 | 2 1	6 0 | 2 1	6 0 | 2 1	6 0 | 2 1
2				$0 \mid x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$	$0 \mid x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$	$0 \mid x_{\bar{1}} x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$	$0 \mid 2\, x_{\bar{2}} x_{\bar{3}}$
3				9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1
4	Π	1	q^1	9 . . | .	9 . . | .	9 4 . | .	9 4 . | .
5			$\bar{q}^1$	5 . | .	5 . | .	5 . | .	5 7 | .
6			m^1	. | .	. | .	1 | .	1 | .
7			p^1	9 . . | .	9 7 . | .	9 7 . | .	9 7 . | .
8		0	q^0	2 . | .	2 . | .	2 . | .	2 1 | .
9			$\bar{q}^0$	0 | .	0 | .	0 | .	0 | 9
10			m^0	| .	| .	| .	| .
11			p^0	2 . | .	2 . | .	2 . | .	2 . | .
12		$\bar{1}$	$q^{\bar{1}}$	6 | .	6 | .	6 | .	6 | 0
13			$\bar{q}^{\bar{1}}$	| 7	| 7	| 7	| 7
14			$m^{\bar{1}}$	|	|	|	|
15			$p^{\bar{1}}$	6 | .	6 | .	6 | .	6 | .
16		$\bar{2}$	$q^{\bar{2}}$	| 8	| 8	| 8	| 8
17			$\bar{q}^{\bar{2}}$	|	|	|	|
18			$m^{\bar{2}}$	|	|	|	|
19			$p^{\bar{2}}$	| 8	| 8	| 8	| 8
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1	9 . . | .	9 7 . | .	9 7 . | .	9 7 . | .
21		$\binom{1}{0}$	p^0	2 . | .	2 . | .	2 . | .	2 . | .
22			n^0	. | .	3 | .	3 | .	3 | .
23			Σ^0	9 4 . | .	9 4 7 | .	9 4 7 | .	9 4 7 | .
24		$\binom{1}{\bar{1}}$	$p^{\bar{1}}$	6 | .	6 | .	6 | .	6 | .
25			$n^{\bar{1}}$	| .	| 2	| 2	| 2
26			$\Sigma^{\bar{1}}$	9 4 5 | .	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4
27		$\binom{1}{\bar{2}}$	$p^{\bar{2}}$	| 8	| 8	| 8	| 8
28			$n^{\bar{2}}$	|	|	|	|
29			$\Sigma^{\bar{2}}$	9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1

Таблица 5.6. Левое деление $945.1 \,{}_0\!\!\setminus^{2}\, 60.21$ (продолжение)

				G	H	I	J
$\bar 1$		2		2 1 0 $\mid$ $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$	2 1 0 $\mid$ $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$	2 1 0 $\mid$ $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$	2 1 0 $\mid$ $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$
0		*0*		e a c $\mid$ f b d	e a c $\mid$ f b d	e a c $\mid$ f b d	e a c $\mid$ f b d
1				6 0 $\mid$ 2 1	6 0 $\mid$ 2 1	6 0 $\mid$ 2 1	6 0 $\mid$ 2 1
2				0 $\mid$ 2 $x_{\bar 2}x_{\bar 3}$	0 $\mid$ 2 $x_{\bar 2}x_{\bar 3}$	0 $\mid$ 2 $x_{\bar 2}x_{\bar 3}$	0 $\mid$ 2 4 $x_{\bar 3}$
3				9 4 5 $\mid$1	9 4 5 $\mid$1	9 4 5 $\mid$1	9 4 5 $\mid$1
4			q^1	9 4 . $\mid$.	9 4 . $\mid$.	9 4 3 $\mid$.	9 4 3 $\mid$.
5		1	$\bar q^1$	5 7 $\mid$.	5 7 $\mid$.	5 7 $\mid$.	5 7 $\mid$ 0
6			m^1	1 $\mid$.	1 $\mid$.	1 $\mid$ 0	1 $\mid$ 0
7			p^1	9 7 . $\mid$.	9 7 4 $\mid$.	9 7 4 $\mid$.	9 7 4 $\mid$.
8			q^0	2 1 $\mid$.	2 1 $\mid$.	2 1 $\mid$.	2 1 $\mid$ 8
9		0	$\bar q^0$	0 $\mid$ 9	0 $\mid$ 9	0 $\mid$ 9	0 $\mid$ 9
10			m^0	$\mid$ 5	$\mid$ 5	$\mid$ 5	$\mid$ 5
11	Π		p^0	2 3 $\mid$.	2 3 $\mid$.	2 3 $\mid$.	2 3 $\mid$.
12			$q^{\bar 1}$	6 $\mid$ 0	6 $\mid$ 0	6 $\mid$ 0	6 $\mid$ 0
13		$\bar 1$	$\bar q^{\bar 1}$	$\mid$ 7	$\mid$ 7	$\mid$ 7	$\mid$ 7
14			$m^{\bar 1}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
15			$p^{\bar 1}$	6 $\mid$ 3	6 $\mid$ 3	6 $\mid$ 3	6 $\mid$ 3
16			$q^{\bar 2}$	$\mid$ 8	$\mid$ 8	$\mid$ 8	$\mid$ 8
17		$\bar 2$	$\bar q^{\bar 2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
18			$m^{\bar 2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
19			$p^{\bar 2}$	$\mid$ 8	$\mid$ 8	$\mid$ 8	$\mid$ 8
20		$\binom{1}{1}$	Σ^1	9 7 . $\mid$.	9 7 4 $\mid$.	9 7 4 $\mid$.	9 7 4 $\mid$.
21			p^0	2 3 $\mid$.	2 3 $\mid$.	2 3 $\mid$.	2 3 $\mid$.
22		$\binom{1}{0}$	n^0	3 $\mid$.	3 $\mid$ 9	3 $\mid$ 9	3 $\mid$ 9
23			Σ^0	9 4 7 $\mid$.	9 4 7 $\mid$ 5	9 4 7 $\mid$ 5	9 4 7 $\mid$ 5
24	Σ		$p^{\bar 1}$	6 $\mid$ 3	6 $\mid$ 3	6 $\mid$ 3	6 $\mid$ 3
25		$\binom{1}{\bar 1}$	$n^{\bar 1}$	$\mid$ 2	$\mid$ 2	$\mid$ 2	$\mid$ 2
26			$\Sigma^{\bar 1}$	9 4 5 $\mid$ 4	9 4 5 $\mid$ 4	9 4 5 $\mid$ 4	9 4 5 $\mid$ 4
27			$p^{\bar 2}$	$\mid$ 8	$\mid$ 8	$\mid$ 8	$\mid$ 8
28		$\binom{1}{\bar 2}$	$n^{\bar 2}$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
29			$\Sigma^{\bar 2}$	9 4 5 $\mid$1	9 4 5 $\mid$1	9 4 5 $\mid$1	9 4 5 $\mid$1

Таблица 5.7. Левое деление $945.1 \mathbin{{}_0\!\!\setminus^{2}} 60.21$ (окончание)

			K	L	M
$\bar 1$		*2*	2 1 0 | $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$	2 1 0 | $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$	2 1 0 | $\bar 1$ $\bar 2$ $\bar 3$
0		*0*	e a c | f b d	e a c | f b d	e a c | f b d
1			6 0 | 2 1	6 0 | 2 1	6 0 | 2 1
2			0 | 2 4 $x_{\bar 3}$	0 | 2 4 $x_{\bar 3}$	0 | 2 4 3
3			9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1
4	Π	1	q^1 9 4 3 | .	9 4 3 | .	9 4 3 | 5
5			$\bar q^1$ 5 7 | 0	5 7 | 0	5 7 | 0
6			m^1 1 | 0	1 | 0	1 | 0
7			p^1 9 7 4 | .	9 7 4 | 7	9 7 4 | 7
8		0	q^0 2 1 | 8	2 1 | 8	2 1 | 8
9			$\bar q^0$ 0 | 9	0 | 9	0 | 9
10			m^0 | 5	| 5	| 5
11			p^0 2 3 | 5	2 3 | 5	2 3 | 5
12		$\bar 1$	$q^{\bar 1}$ 6 | 0	6 | 0	6 | 0
13			$\bar q^{\bar 1}$ | 7	| 7	| 7
14			$m^{\bar 1}$ |	|	|
15			$p^{\bar 1}$ 6 | 3	6 | 3	6 | 3
16		$\bar 2$	$q^{\bar 2}$ | 8	| 8	| 8
17			$\bar q^{\bar 2}$ |	|	|
18			$m^{\bar 2}$ |	|	|
19			$p^{\bar 2}$ | 8	| 8	| 8
20	Σ	$\binom{1}{1}$	Σ^1 9 7 4 | .	9 7 4 | 7	9 7 4 | 7
21		$\binom{1}{0}$	p^0 2 3 | 5	2 3 | 5	2 3 | 5
22			n^0 3 | 9	3 | 9	3 | 9
23			Σ^0 9 4 7 | 5	9 4 7 | 5	9 4 7 | 5
24		$\binom{1}{\bar 1}$	$p^{\bar 1}$ 6 | 3	6 | 3	6 | 3
25			$n^{\bar 1}$ | 2	| 2	| 2
26			$\Sigma^{\bar 1}$ 9 4 5 | 4	9 4 5 | 4	9 4 5 | 4
27		$\binom{1}{\bar 2}$	$p^{\bar 2}$ | 8	| 8	| 8
28			$n^{\bar 2}$ |	|	|
29			$\Sigma^{\bar 2}$ 9 4 5 |1	9 4 5 |1	9 4 5 |1

Приложение A. Графики DR-разнообразий

Все функции, изображенные на графиках ниже, являются однозначными. Буквенное окончание индекса функции, как, например, у f_{16A}, f_{16B}, указывает на то, что это графики одной функции, которые, либо изображают разные ее интервалы, либо ее подынтервалы с меньшим приращением Δx.

Примечание A.1. Графики функций f_{16A}, f_{19}, f_{20}, f_{21B} (с.с. 55, 57, 58 соответственно) в целях облегчения файлов изображены с неполным набором точек, но передают характер функций достаточно точно для целей демонстрации. Удалялись только точки, находящиеся очень близко друг от друга, что сохранило адекватность графиков. Для краткости, их приращения Δx в подрисуночных определениях указаны для полного набора точек; фактическое соответствие «интервал x — приращение Δx» перечислено ниже:

(1) f_{16A}, f_{19} и f_{20}:
$[0, 20000)$, $[40000, 50000)$ — $\Delta x = 10^1$;
$[20000, 40000)$, $[50000, 100000)$ — $\Delta x = 10^2$;

(2) f_{21B}:
$[0, 1000)$, $[8000, 10000)$, $[22000, 23000)$,
$[34000, 35000)$, $[36000, 37000)$, $[38000, 39000)$,
$[52000, 54000)$, $[55000, 57000)$, $[81000, 82000)$, $[87000, 89000)$ — $\Delta x = 10^0$;
$[1000, 8000)$, $[20000, 22000)$, $[23000, 34000)$, $[35000, 36000)$,
$[37000, 38000)$, $[39000, 40000)$,$[50000, 52000)$, $[54000, 55000)$,
$[57000, 60000)$, $[80000, 81000)$, $[82000, 87000)$, $[89000, 90000)$ — $\Delta x = 10^1$;
$[10000, 20000)$, $[40000, 50000)$, $[60000, 80000)$, $[90000, 100000)$ — $\Delta x = 10^2$.

Как выглядят соединенные непрерывными поверхностями точки, заданные DR-функциями, можно найти здесь:
`https://youtu.be/DhV-piIEVQo`.

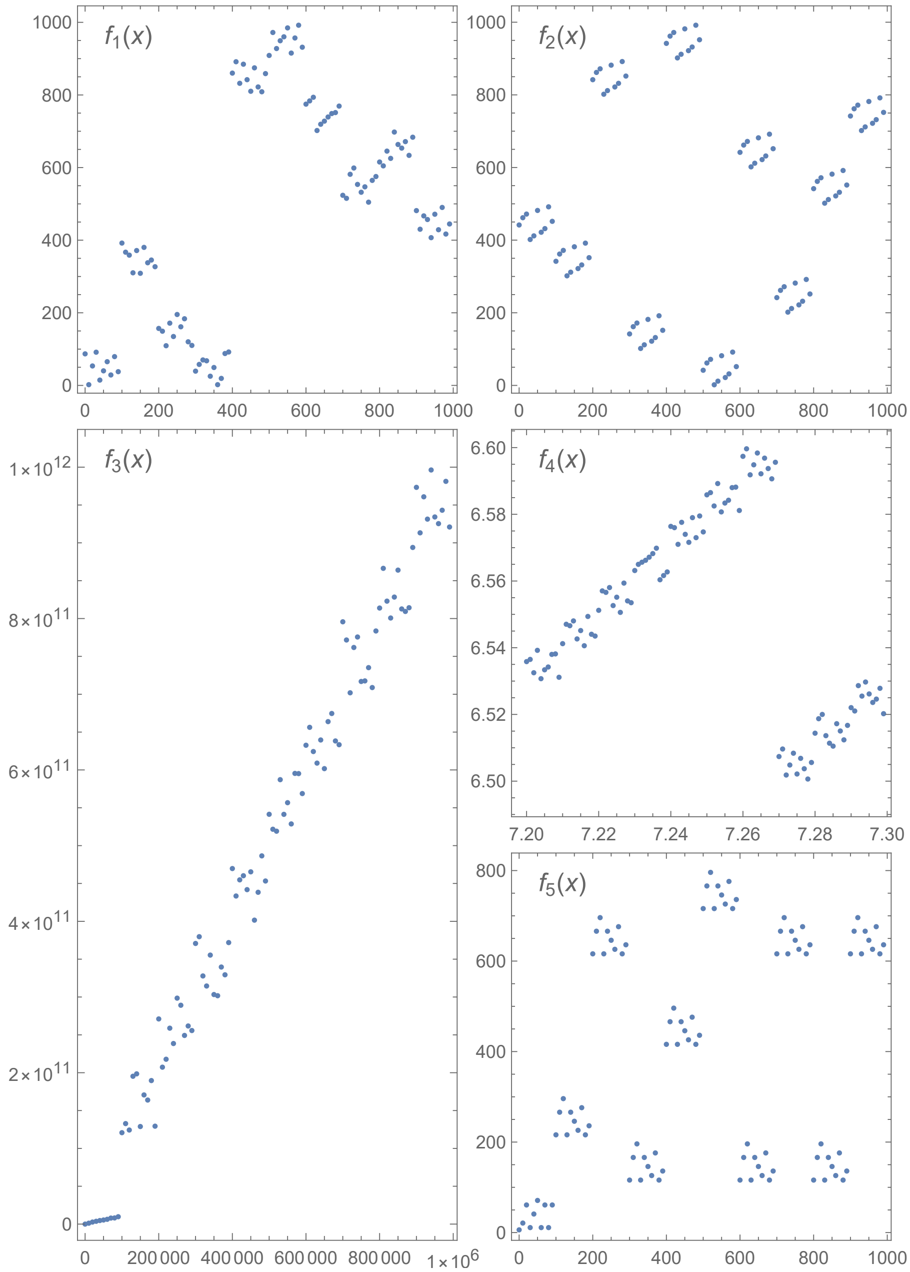

Рис. 1. Определения:

$$
\begin{array}{ll}
f_1(x) = 12.3456 +_2 x, & \Delta x = 10 \\
f_2(x) = x +_4 987.654, & \Delta x = 10 \\
f_3(x) = x *_2^0 x, & \Delta x = 10^4 \\
f_4(x) = x \ulcorner_2 0.123456, & \Delta x = 10^{-3} \\
f_5(x) = x \urcorner_6 x & \Delta x = 10
\end{array}
$$

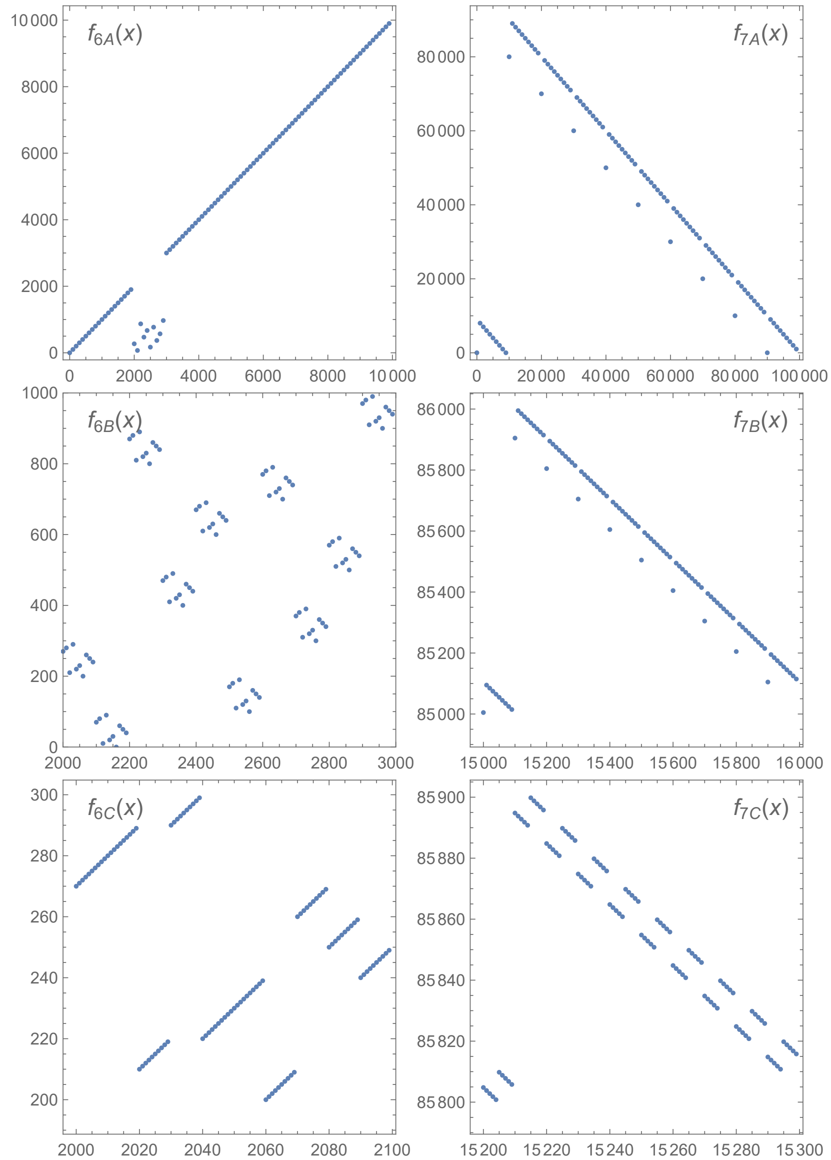

Рис. 2. Определения:

$$f_{6A}(x) = 987.654 \mathbin{+_4} (x \mathbin{\ulcorner_4} 987.654), \qquad \Delta x = 10^2$$

$$f_{6B}(x) = f_{6A}(x),\ x \in [2000, 3000), \qquad \Delta x = 10$$

$$f_{6C}(x) = f_{6A}(x),\ x \in [2000, 2100), \qquad \Delta x = 1$$

$$f_{7A}(x) = [(a(x) *_2^0 b(x)) \mathbin{{}^{2}\!/_{4}} (c(x) \mathbin{{}^{4}\!/_{3}} b(x))] \mathbin{\urcorner_8} x, \qquad \Delta x = 10^3$$

$$a(x) = (x \mathbin{\ulcorner_0} 199992.34) \mathbin{{}_{1}\backslash^{8}} x,$$

$$b(x) = (x *_8^1 x) \mathbin{{}^{2}\!/_{0}} (x *_8^1 x),\ c(x) = (a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 x,$$

$$f_{7B}(x) = f_{7A}(x),\ x \in [15000, 16000), \qquad \Delta x = 10$$

$$f_{7C}(x) = f_{7A}(x),\ x \in [15200, 15300), \qquad \Delta x = 1$$

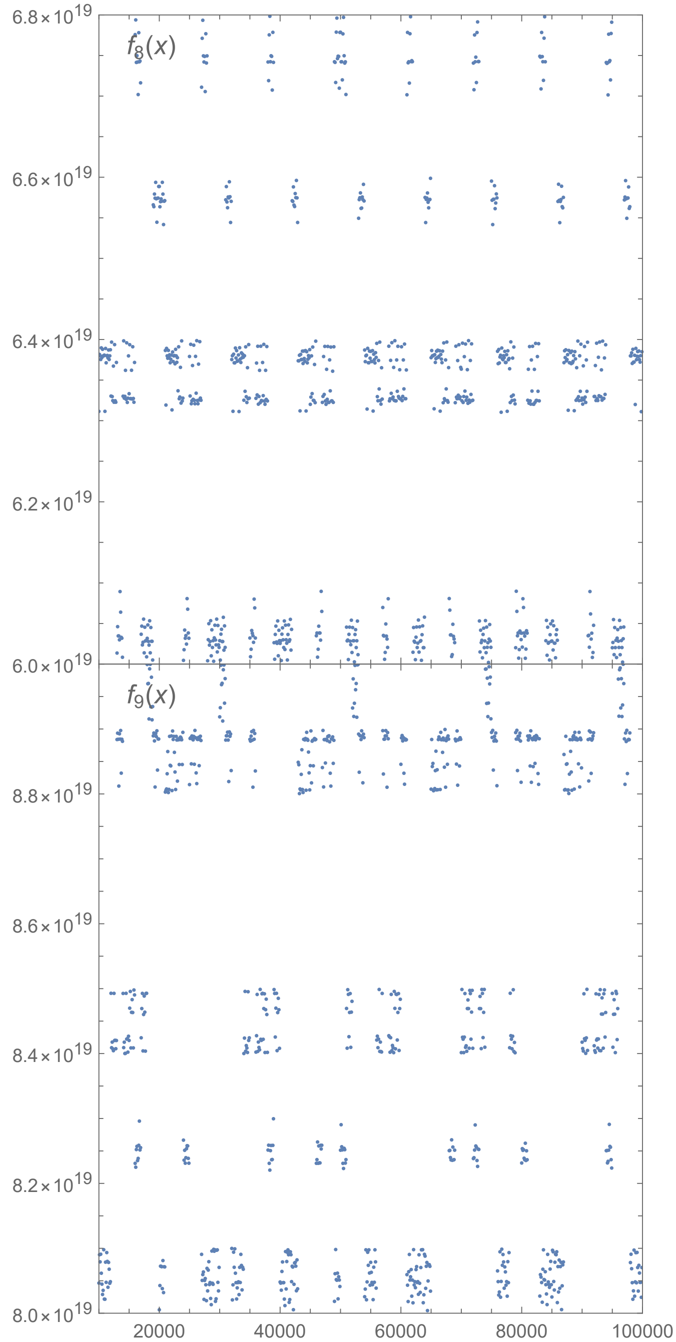

Рис. 3. Определения:

$$f_8(x) = [(x *_6^6 x) \urcorner_5 x] *_4^0 [(x *_6^6 x) \urcorner_5 x], \quad \Delta x = 10^2$$

$$f_9(x) = [(x *_6^7 x) \urcorner_5 x] *_4^3 [(x *_6^7 x) \ulcorner_5 x], \quad \Delta x = 10^2$$

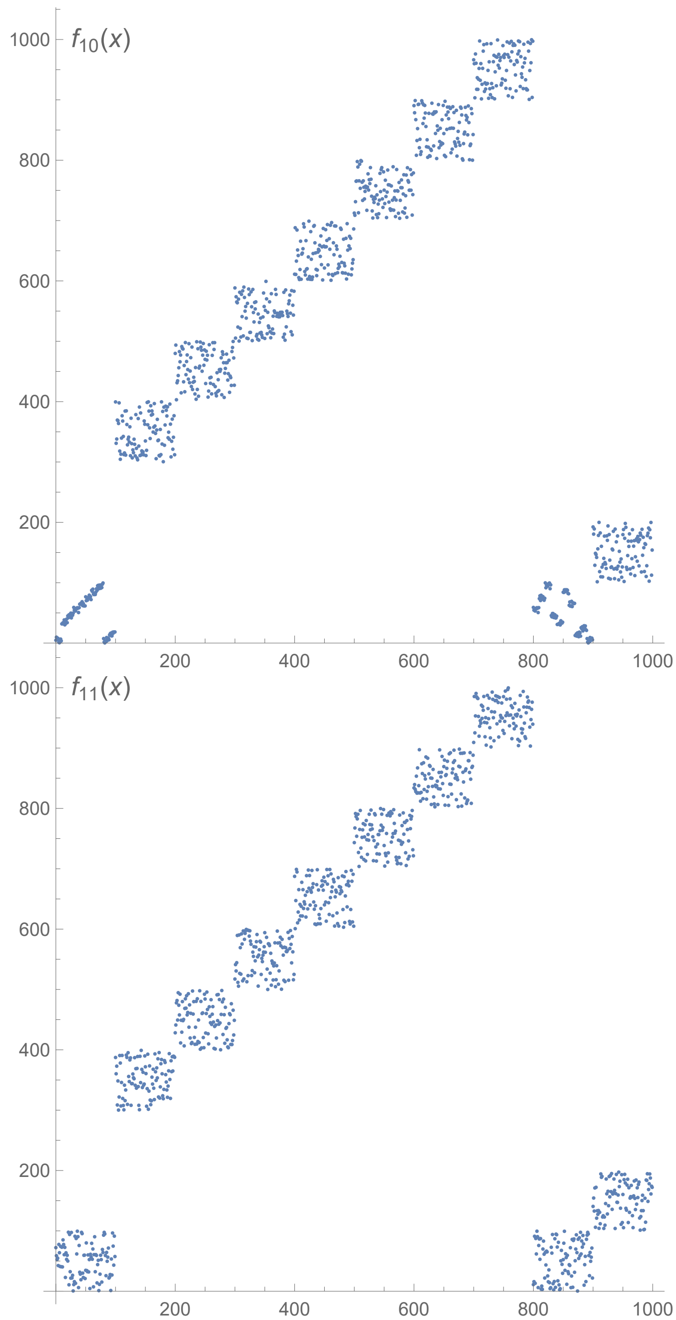

Рис. 4. Определения:

$$f_{10}(x) = [(5.55 \,\underset{3}{\neg}\, x)] \,{}^{5}\!/_{2}\, [(5.55 \,\underset{3}{\neg}\, x)] *_4^5 (5.55 \,\underset{3}{\neg}\, x), \quad \Delta x = 1$$

$$f_{11}(x) = [(5.55 \,\underset{3}{\neg}\, x)] \,{}^{5}\!/_{2}\, [(5.55 \,\underset{3}{\neg}\, x)] *_4^5 (8.88 \,\underset{3}{\neg}\, x), \quad \Delta x = 1$$

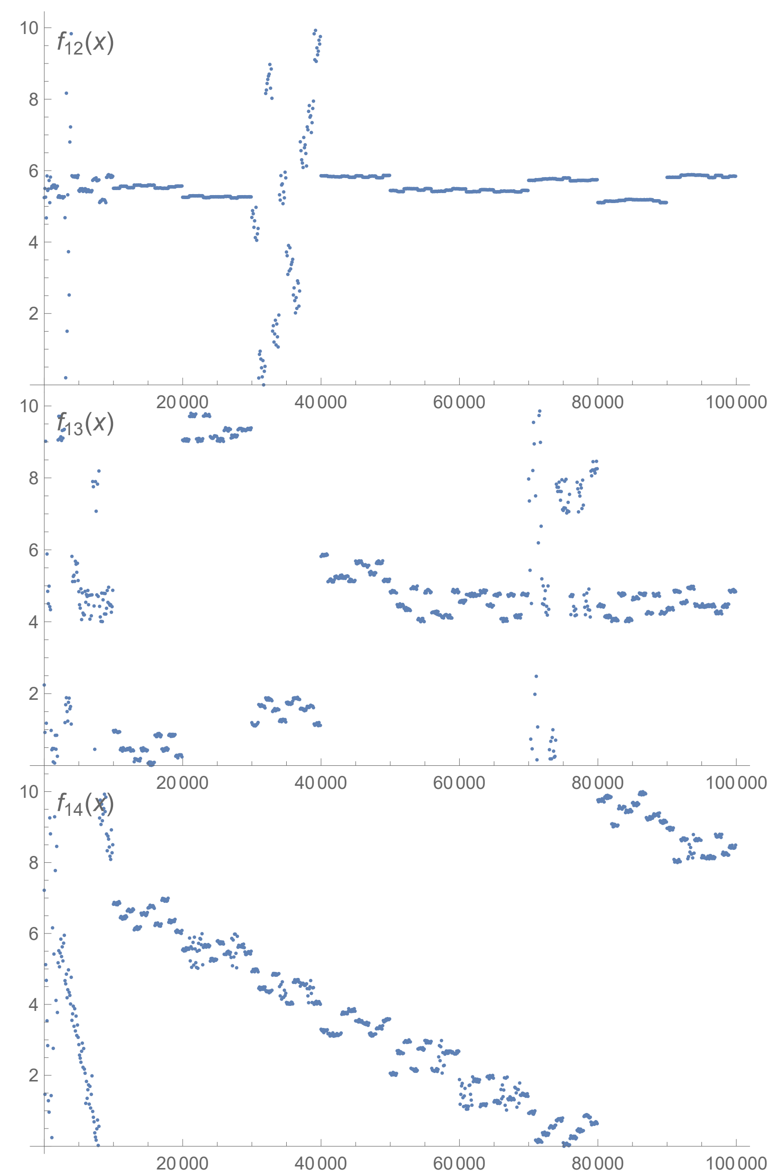

Рис. 5. Определения:

$$f_{12}(x) = [((x +_0 12.34)\ {}^{6}\!/_{1}\ x) *_2^0 a(x)]\ {}^{2}\!/_{4}\ [(98.76 *_3^6 x)\ {}^{6}\!/_{3}\ x], \qquad \Delta x = 10^2$$

$$a(x) = (x *_1^1 x)\ {}^{1}\!/_{2}\ (x *_1^1 x),$$

$$f_{13}(x) = (c(x) *_2^0 b(x))\ {}^{2}\!/_{4}\ [(c(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 x]\ {}^{6}\!/_{3}\ b(x), \qquad \Delta x = 10^2$$

$$b(x) = (x *_1^1 x)\ {}^{2}\!/_{6}\ (x *_1^1 x),\ c(x) = (x \ulcorner_0\ 12.34)\ {}_{1}\!\setminus^{8}\ x,$$

$$f_{14}(x) = [(d(x) *_2^0 e(x))\ {}^{2}\!/_{4}\ f(x)]\ {}^{7}\!/_{7}\ d(x), \qquad \Delta x = 10^2$$

$$d(x) = (x \ulcorner_0\ 199992.34)\ {}_{1}\!\setminus^{8}\ x,\ e(x) = (x *_8^1 x)\ {}^{2}\!/_{0}\ (x *_8^1 x),$$

$$f(x) = [(d(x) *_2^0 e(x)) *_3^7 x]\ {}^{4}\!/_{3}\ e(x),$$

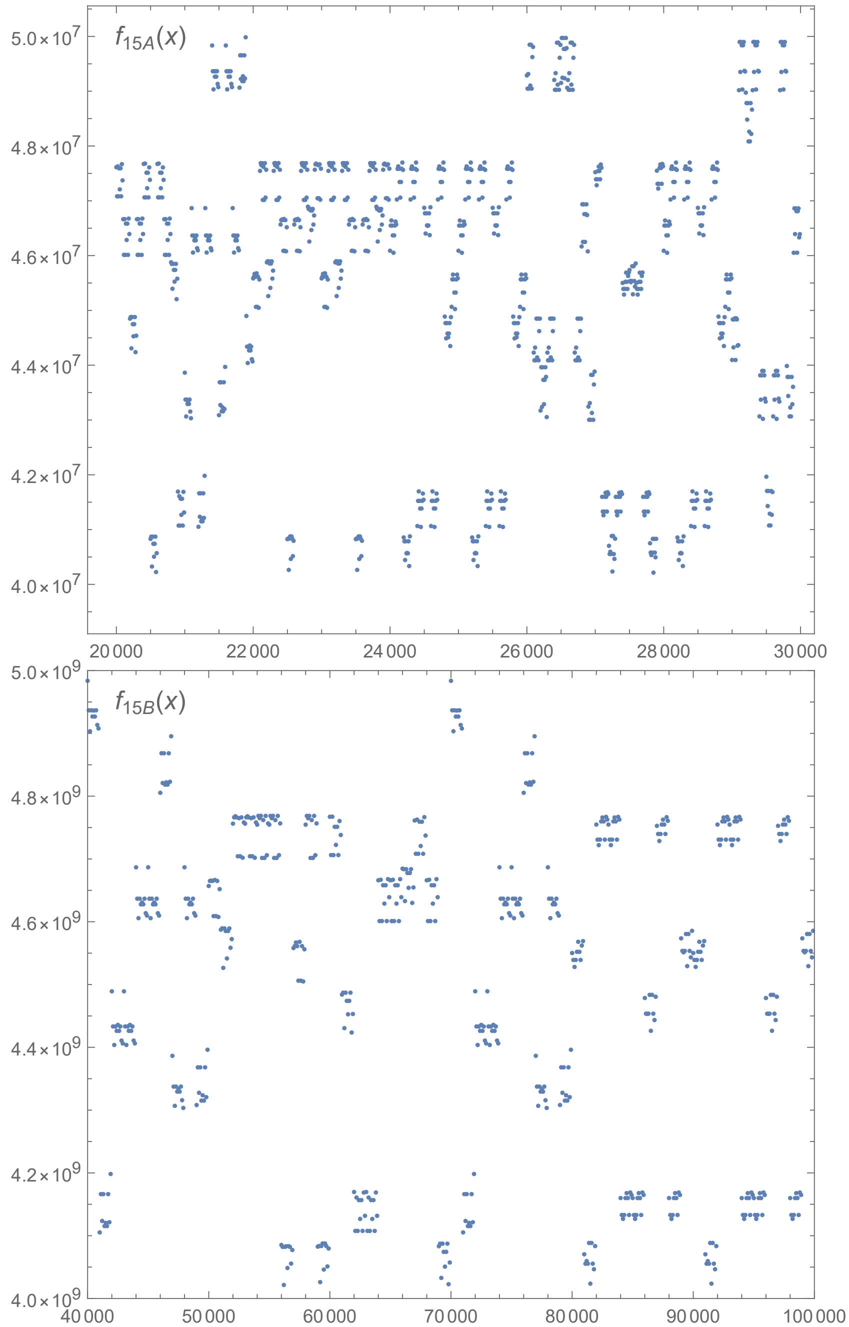

Рис. 6. Определения:

$$f_{15A}(x) = [(x \,\overline{{}_6}\, x) \,\overline{{}_5}\, x] *_4^7 [(x \,\overline{{}_6}\, x) \,\overline{{}_5}\, x], \quad \Delta x = 10$$

$$f_{15B}(x) = f_{15A}(x), \qquad \Delta x = 10^2$$

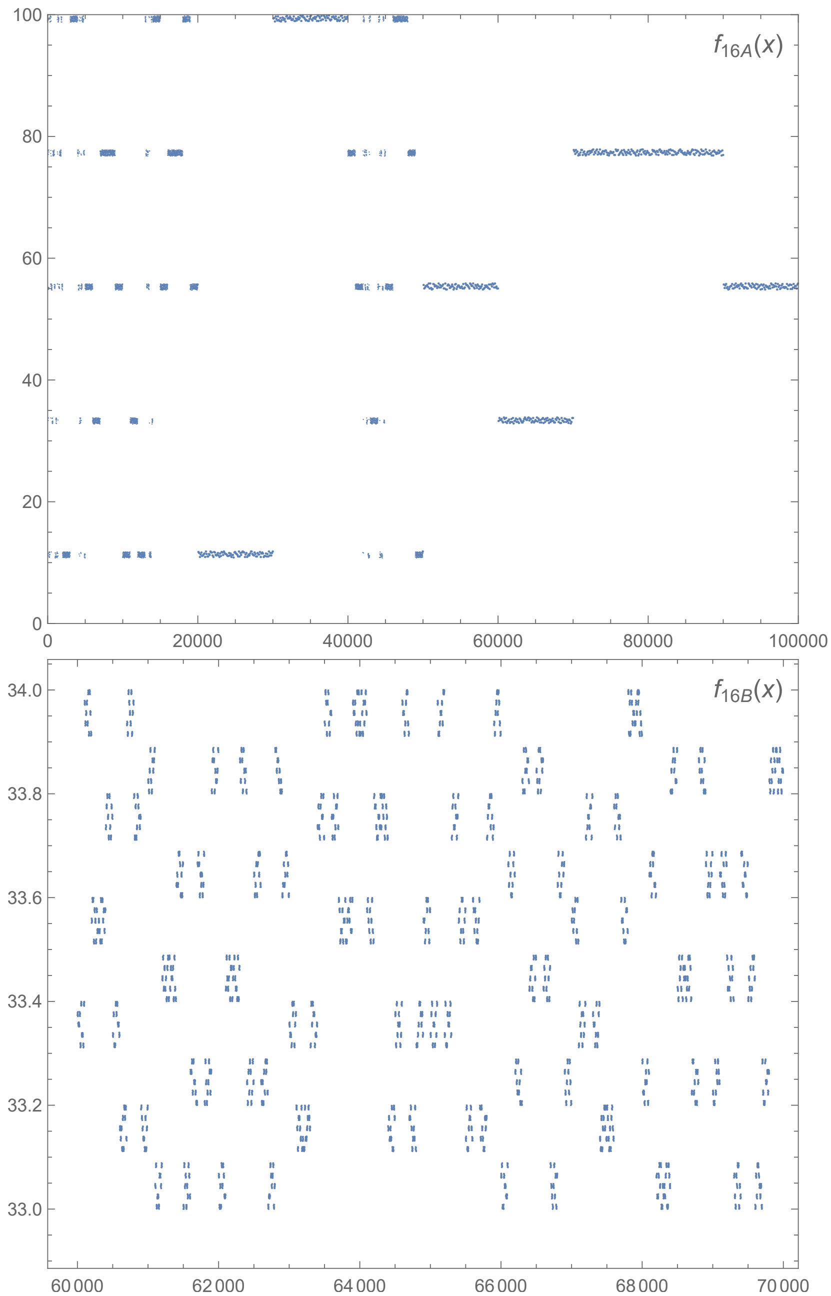

Рис. 7. Определения:

$$f_{16A}(x) = (a(x) \,{}^{4}\!/\!{}_{3}\, b(x)) *^{8}_{8} (a(x) \,{}^{4}\!/\!{}_{3}\, b(x)), \quad \Delta x = 10$$
$$a(x) = (x +_{0} 248.136) \,{}_{2}\!\backslash^{0} (11.22 \,{}^{8}\!/\!{}_{1}\, x),$$
$$b(x) = (767.01 *^{1}_{8} x) +_{3} (x \ulcorner_{0} 903.425),$$
$$f_{16B}(x) = f_{16A}(x), \quad \Delta x = 1$$

См. примечание А.1 на с. 48.

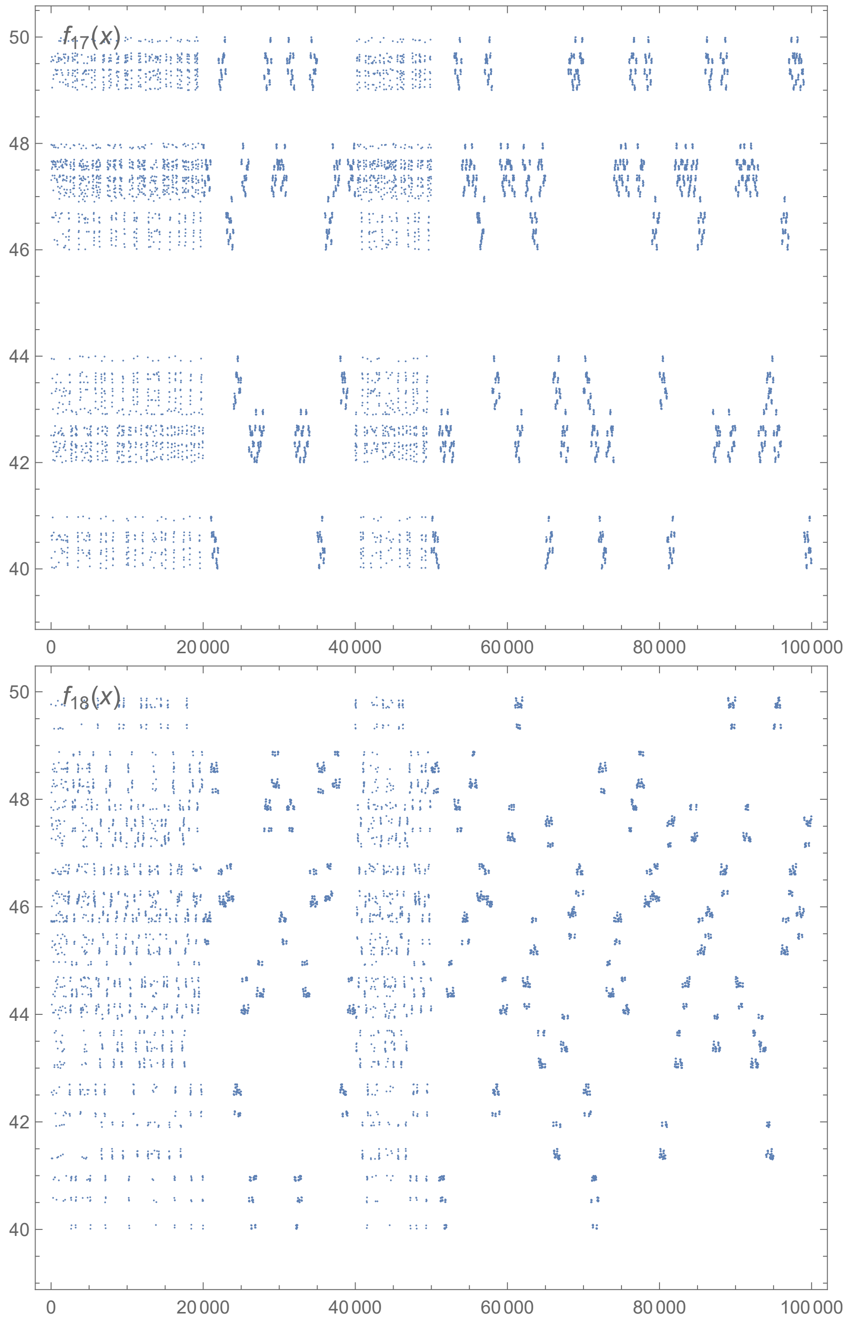

Рис. 8. Определения:

$$f_{17}(x) = (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)) *_{5}^{6} (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)), \quad \Delta x = 10$$

$$a(x) = (x +_{0} 248.136) \;{}_{2}\backslash^{0}\; (11.22 \;{}^{8}\!/_{1}\; x),$$

$$b(x) = (767.01 *_{8}^{1} x) +_{3} (x \ulcorner_{0} 903.425),$$

$$f_{18}(x) = (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)) *_{8}^{7} (a(x) \;{}^{4}\!/_{3}\; b(x)), \quad \Delta x = 10$$

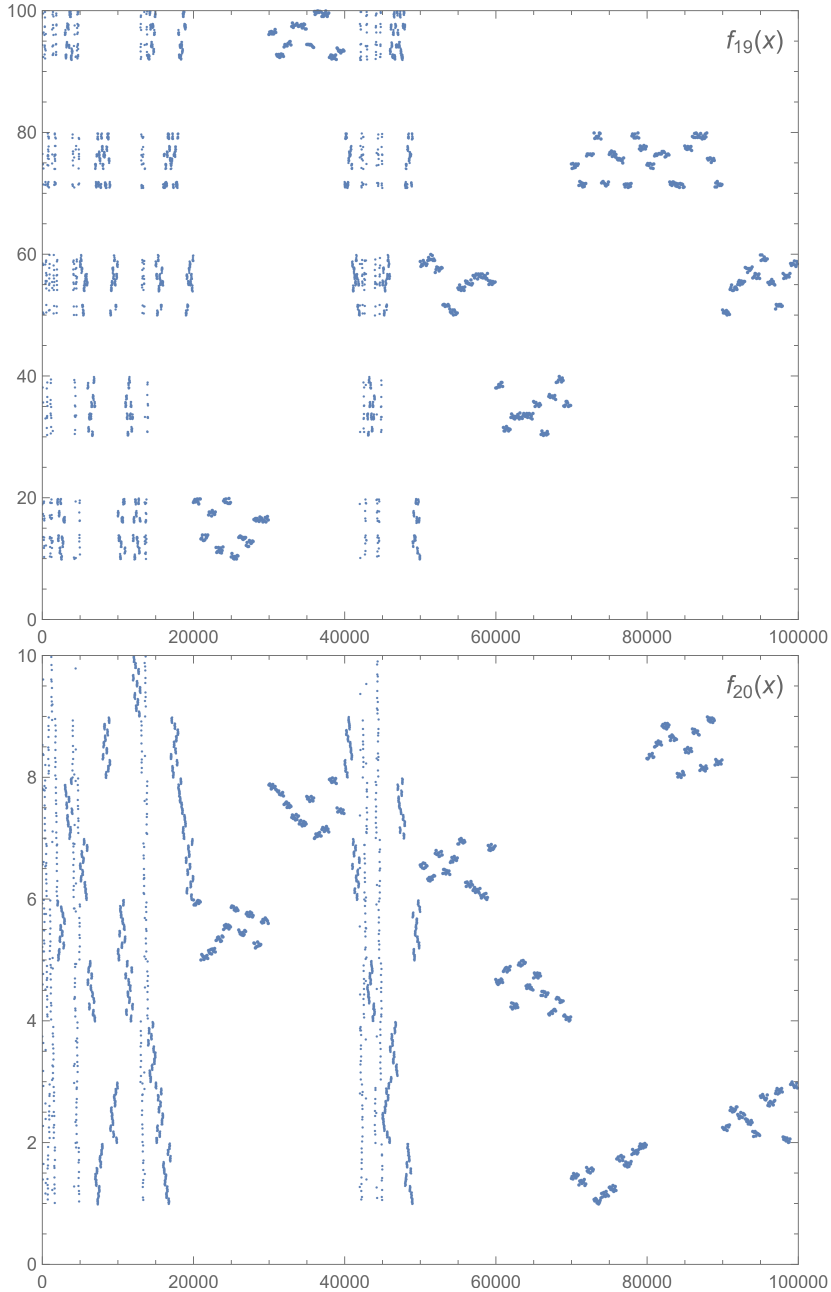

Рис. 9. Определения:

$$
\begin{aligned}
f_{19}(x) &= (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)) *^{8}_{0} (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)), \quad \Delta x = 10 \\
a(x) &= (x +_{0} 248.136) \,{}_{2}\!\backslash^{0}\, (11.22 \,{}^{8}\!/_{1}\, x), \\
b(x) &= (767.01 *^{1}_{8} x) +_{3} (x \mathbin{⌐}_{0} 903.425), \\
f_{20}(x) &= (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)) \,{}^{2}\!/_{3}\, (a(x) \,{}^{4}\!/_{3}\, b(x)), \quad \Delta x = 10
\end{aligned}
$$

См. примечание A.1 на с. 48.

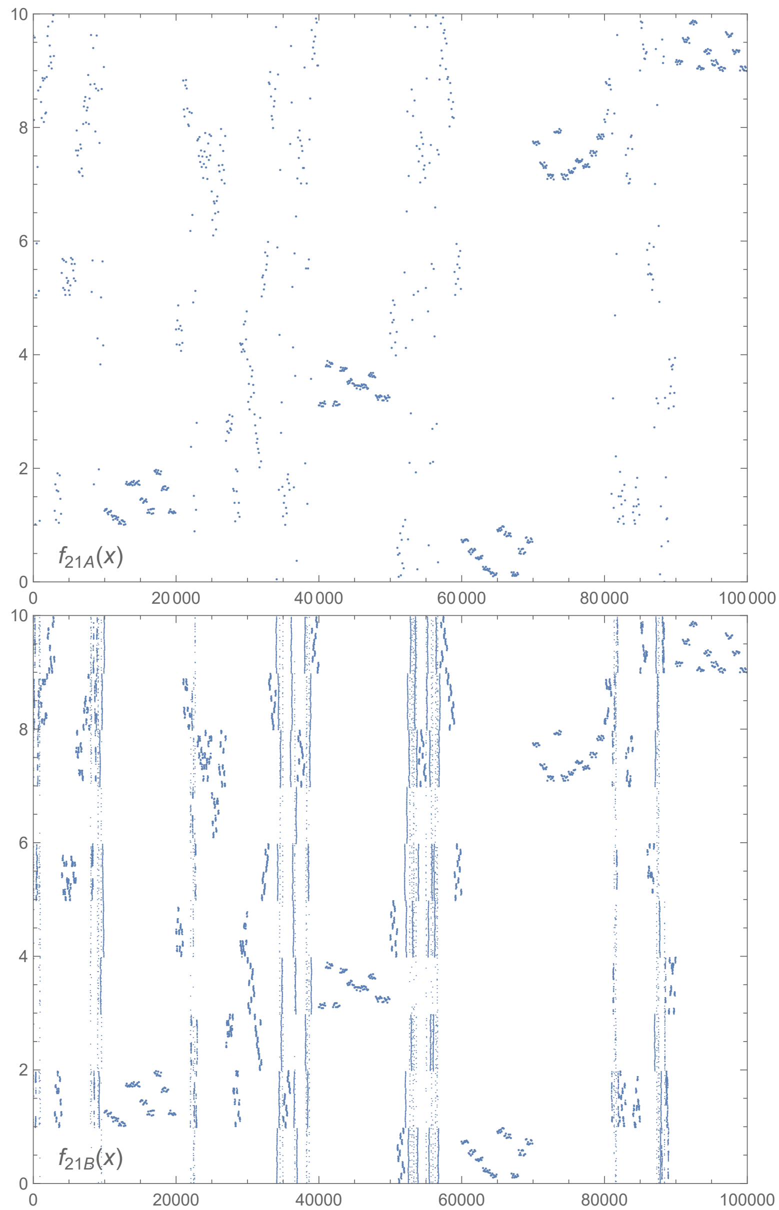

Рис. 10. Определения:

$$
\begin{aligned}
f_{21A}(x) &= d(x)\ {}^{8}\!/\!_{8}\ \{[(a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 b(x)]\ {}^{2}\!/\!_{4}\ c(x)\}, \qquad \Delta x = 10^2\\
a(x) &= (x \ulcorner_{0}\ 98765.43)\ {}_{1}\backslash^{8}\ 5.43,\\
b(x) &= (x *_8^1 5.43)\ {}^{2}\!/\!_{0}\ (x *_8^1 5.43),\\
c(x) &= [(a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 b(x)]\ {}^{4}\!/\!_{3}\ b(x),\\
d(x) &= \{[(a(x) *_2^0 b(x)) *_3^7 b(x)]\ {}^{2}\!/\!_{4}\ c(x)\}\ {}_{0}\backslash^{0}\ c(x),\\
f_{21B}(x) &= f_{21A}(x), \qquad \Delta x = 1
\end{aligned}
$$

См. примечание A.1 на с. 48.

Приложение B. Таблицы операций

Таблица B.1: Таблицы операций.

0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	00	48	15	91	87	23	74	36	59	62
1	35	11	67	82	29	98	40	53	04	76
2	61	57	22	49	95	06	38	80	73	14
3	19	86	54	33	70	42	97	01	65	28
4	93	20	08	56	44	71	85	69	12	37
5	84	63	30	78	16	55	09	92	27	41
6	47	02	79	25	51	34	66	18	90	83
7	26	94	43	10	68	89	52	77	31	05
8	72	39	96	64	03	17	21	45	88	50
9	58	75	81	07	32	60	13	24	46	99

1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	02	97	43	65	16	70	54	81	29	38
1	79	14	95	40	57	33	81	06	68	22
2	40	63	28	87	31	16	75	52	94	09
3	64	09	70	36	22	81	48	95	13	57
4	57	38	66	71	43	29	92	10	05	84
5	85	40	19	22	94	58	06	63	37	71
6	23	56	31	09	88	94	60	47	72	15
7	38	25	87	93	00	42	19	74	51	66
8	91	72	54	18	65	07	33	29	86	40
9	16	81	02	54	79	65	27	38	40	93

2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	20	38	19	07	85	96	74	52	63	41
1	89	01	54	96	12	47	63	28	70	35
2	67	94	02	75	41	23	58	16	39	80
3	08	46	75	83	69	52	31	90	24	17
4	56	72	31	68	24	10	89	45	07	93
5	14	69	83	42	97	35	20	71	56	08
6	95	23	47	51	30	78	16	09	82	64
7	73	15	60	39	58	04	92	87	41	26
8	41	87	26	10	73	69	05	34	98	52
9	32	50	98	24	06	81	47	63	15	79

3	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	80	97	18	29	31	42	53	64	05	76
1	69	10	86	31	28	53	42	75	94	07
2	07	42	30	94	13	89	61	58	76	25
3	38	05	23	10	72	61	97	46	89	54
4	56	39	05	73	40	27	14	82	61	98
5	74	61	57	06	85	90	38	29	43	12
6	25	84	92	68	09	36	70	13	57	41
7	13	76	41	87	54	08	25	90	32	69
8	41	28	64	52	96	75	09	37	10	83
9	92	53	79	45	67	14	86	01	28	30

4	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	22	32	12	02	82	92	72	52	62	42
1	82	02	52	92	12	42	62	22	72	32
2	62	92	02	72	42	22	52	12	32	82
3	02	42	72	82	62	52	32	92	22	12
4	52	72	32	62	22	12	82	42	02	92
5	12	62	82	42	92	32	22	72	52	02
6	92	22	42	52	32	72	12	02	82	62
7	72	12	62	32	52	02	92	82	42	22
8	42	82	22	12	72	62	02	32	92	52
9	32	52	92	22	02	82	42	62	12	72

5	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	00	40	10	90	80	20	70	30	50	60
1	30	10	60	80	20	90	40	50	00	70
2	60	50	20	40	90	00	30	80	70	10
3	10	80	50	30	70	40	90	00	60	20
4	90	20	00	50	40	70	80	60	10	30
5	80	60	30	70	10	50	00	90	20	40
6	40	00	70	20	50	30	60	10	90	80
7	20	90	40	10	60	80	50	70	30	00
8	70	30	90	60	00	10	20	40	80	50
9	50	70	80	00	30	60	10	20	40	90

6	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	45	75	35	95	05	65	25	85	55	15
1	15	45	75	35	95	05	65	25	85	55
2	55	15	45	75	35	95	05	65	25	85
3	85	55	15	45	75	35	95	05	65	25
4	25	85	55	15	45	75	35	95	05	65
5	65	25	85	55	15	45	75	35	95	05
6	05	65	25	85	55	15	45	75	35	95
7	95	05	65	25	85	55	15	45	75	35
8	35	95	05	65	25	85	55	15	45	75
9	75	35	95	05	65	25	85	55	15	45

7	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	45	76	35	96	05	66	25	86	55	16
1	15	46	75	36	95	06	65	26	85	56
2	55	16	45	76	35	96	05	66	25	86
3	85	56	15	46	75	36	95	06	65	26
4	25	86	55	16	45	76	35	96	05	66
5	65	26	85	56	15	46	75	36	95	06
6	05	66	25	86	55	16	45	76	35	96
7	95	06	65	26	85	56	15	46	75	36
8	35	96	05	66	25	86	55	16	45	76
9	75	36	95	06	65	26	85	56	15	46

8	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	99	88	77	66	55	44	33	22	11	00
1	88	77	66	55	44	33	22	11	00	99
2	77	66	55	44	33	22	11	00	99	88
3	66	55	44	33	22	11	00	99	88	77
4	55	44	33	22	11	00	99	88	77	66
5	44	33	22	11	00	99	88	77	66	55
6	33	22	11	00	99	88	77	66	55	44
7	22	11	00	99	88	77	66	55	44	33
8	11	00	99	88	77	66	55	44	33	22
9	00	99	88	77	66	55	44	33	22	11

Список литературы

[1] DeBenedictis, E.A., Chory, E.J., Gretton, D.W. et al. Systematic molecular evolution enables robust biomolecule discovery. Nat Methods 19, 55–64 (2022). `https://doi.org/10.1038/s41592-021-01348-4`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[2] Delgado, R.N., Allen, D.E., Keefe, M.G. et al. Individual human cortical progenitors can produce excitatory and inhibitory neurons. Nature (2021). `https://doi.org/10.1038/s41586-021-04230-7`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[3] Shim, H.S., Horner, J.W., Wu, CJ. et al. Telomerase reverse transcriptase preserves neuron survival and cognition in Alzheimer's disease models. Nat Aging 1, 1162–1174 (2021). `https://doi.org/10.1038/s43587-021-00146-z`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[4] Liu, K., Deng, S., Ye, C. et al. Mapping single-cell-resolution cell phylogeny reveals cell population dynamics during organ development. Nat Methods 18, 1506–1514 (2021). `https://doi.org/10.1038/s41592-021-01325-x`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[5] Foley, E.D.B., Kushwah, M.S., Young, G. et al. Mass photometry enables label-free tracking and mass measurement of single proteins on lipid bilayers. Nat Methods 18, 1247–1252 (2021). `https://doi.org/10.1038/s41592-021-01261-w`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[6] Goodwin, A., Jones, E.J.H., Salomone, S. et al. INTERSTAARS: Attention training for infants with elevated likelihood of developing ADHD: A proof-of-concept randomised controlled trial. Transl Psychiatry 11, 644 (2021). `https://doi.org/10.1038/s41398-021-01698-9`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[7] Asteria, L., Zahn, H.P., Kosch, M.N. et al. Quantum gas magnifier for sub-lattice-resolved imaging of 3D quantum systems. Nature 599, 571–575 (2021). `https://doi.org/10.1038/s41586-021-04011-2`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[8] Trapp, A., Kerepesi, C. & Gladyshev, V.N. Profiling epigenetic age in single cells. Nat Aging 1, 1189–1201 (2021). `https://doi.org/10.1038/s43587-021-00134-3`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[9] Graham, S.E., Clarke, S.L., Wu, KH.H. et al. The power of genetic diversity in genome-wide association studies of lipids. Nature 600, 675–679 (2021). `https://doi.org/10.1038/s41586-021-04064-3`. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[10] Watts, S., McElroy, M., Migicovsky, Z. et al. Cannabis labelling is associated with genetic variation in terpene synthase genes. Nat. Plants 7, 1330–1334 (2021). https://doi.org/10.1038/s41477-021-01003-y. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[11] Zhao, D., Tian, X., Doronkin, D.E. et al. In situ formation of ZnOx species for efficient propane dehydrogenation. Nature 599, 234–238 (2021). https://doi.org/10.1038/s41586-021-03923-3. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[12] Akemann, W., Wolf, S., Villette, V. et al. Fast optical recording of neuronal activity by three-dimensional custom-access serial holography. Nat Methods 19, 100–110 (2022). https://doi.org/10.1038/s41592-021-01329-7. (Дата обращения: 6 Января 2022 г.)

[13] S.E. Kochemazov, O.S. Zaikin, The search for pairs of orthogonal diagonal latin squares of order 10 in the volunteer computing project sat@home. Bulletin of the South Ural State University. Series "Computational Mathematics and Software Engineering", 2015, vol. 4, no. 3, (In Russian) pp. 95–108

[14] Bruck, R.H. (1971). A Survey of Binary Systems. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-43119-1, section I.2

Email address: a.n.zhvanko@gmail.com