УДК 517.521

Ю.Н. Тимошенко

КОНЕЧНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ И БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

Аннотация. В статье доказано, что прямая, плоскость, пространство замкнуты и конечны. Введено понятие (определение): единственной актуально – бесконечной величины, виртуального замкнутого кольца нулевой кривизны, прямой и безразмерной точки. Числовая ось замкнута в конечно – бесконечное виртуальное кольцо. Доказано, что физические величины дискретны и имеют абсолютно большое и абсолютно малое значения. Приведены новые способы нахождения сумм (пределов) сходящихся и расходящихся рядов. Подтверждены знаменитые принципы великого Эйлера о сумме всякого ряда. Представлена новая методика разложения функций в функциональные ряды, не имеющие аналогов в теории и практике.

Ключевые слова. Реальные и виртуальные величины, объекты, замкнутость прямой (числовой оси), замкнутость пространства, единственность бесконечности, актуальная бесконечность. Развитие теории рядов. Уравнение статусов сходящихся и расходящихся рядов.

Введение.

В главе 1 статьи с помощью системы логических аксиом и определений введены новые понятия: обратных величин и объектов, реальных величин и объектов, виртуальных величин и объектов. Показано, что реальные неограниченно возрастающие и реальные неограниченно убывающие величины всегда конечны. Даны определения актуальной конечной бесконечности, потенциальной бесконечности, прямой линии и безразмерной точки. Доказана: замкнутость и виртуальность прямой линии и пространства, отсутствие в реальном (материальном) мире реальных прямых линий и гладких плоскостей. Введено понятие абсолютно больших и абсолютно малых реальных величин. Доказано, что физические величины конечны, дискретны и состоят из неделимых элементов и как следствие этого сделан вывод, что материя конечна, а это значит, что: расстояние, пространство, время, скорость и т.д. конечные и начальные. Из этого, следует, что, например, тело, запущенное в вакууме с некоторой скоростью через некоторое время вернётся по кольцевой орбите в исходную точку, а не улетит в “никуда”. В этой главе математика тесно соприкасается с физикой, да простят нас физики за вторжение в их пространство, но это неизбежно, ибо тематика этой главы такова, что в ней всегда пересекалась математика, физика и философия.

В **главе 2**, основываясь на выводе, сделанном в предыдущей главе, о замкнутости и конечности числовой оси, выполнена попытка обоснования и обобщения теории расходящихся рядов и уравнивания их значимости со значимостью (статусом) сходящихся рядов. Приведён новый способ нахождения сумм многих расходящихся рядов, который пригоден и для нахождения сумм многих и сходящихся рядов. Подтверждён принцип великого Эйлера о том, что всякий ряд имеет сумму и о том, что сумма всякого ряда равна значению того выражения, которое образует этот ряд. Введён большой класс полезных науки новых биноминальных и не биноминальных функциональных рядов, которые отсутствуют в математической базе. Это позволяет исчислять легко с любой степенью точности, интегралы от сложнейших функции, образующих эти ряды. Понятно, что это делается почленным интегрированием этих рядов, т.е. просто, наглядно, алгоритмически и доступно даже ученикам общеобразовательных школ. Современные компьютерные расчётные системы делают это часто громоздко, не наглядно с применением специальных функций, не понятных широкому кругу людей.

ГЛАВА 1

Обратные, реальные величины (объекты)

Аксиома 1 (А.1). *Всякая величина* $B>1$ *всегда имеет единственную обратную ей величину* $M<1$ *и наоборот*.

Величины B, M взаимно обратные: $B=1/M>1, M=1/B<1$. Чем больше, B тем меньше M и наоборот. На числовой оси B располагается справа от единицы, а M - слева от неё.

Назовём меньшую величину $M < 1$ шагом или условной единицей (у.е.) большей величины $B > 1$. Тогда B будет содержать $q = B / M = B^2 = 1 / M^2$ шагов (у.е.). Величины B и M связаны между собой *однозначно*, *каждой из этих величин* соответствует *единственная обратная ей величина*. Шаг $M < 1$ является единственной естественной условной единицей измерения величины $B > 1$. Величину M нельзя дробить, делить, увеличить или уменьшить, ибо всякие увеличенная или уменьшенная M будет уже условной единицей (шагом) для другой величины, но не для данной величины B.

Определение 1. (О.1) *Неограниченно возрастающая (убывающая) величина – это переменная, фиксированные числовые значения которой могут возрастать (убывать) сколько угодно, без всяких внешних ограничений*.

Важно подчеркнуть то, что в процессе возрастания (убывания) эти величины всегда остаются *конечными* (фиксированными).

А.2. *Всякая переменная, неограниченно возрастающая величина* $\omega\ (\omega \to \infty)$ *имеет обратную переменную, неограниченно убывающую величину* $\varepsilon = 1 / \omega \to 0$ *и наоборот*.

Каждому значению $\omega \to \infty$ соответствует единственное значение $\varepsilon = 1 / \omega \to 0$ и наоборот. На числовой оси значения ω упорядочиваются справа от единицы, а ε - слева от неё: $\omega \in (1, \infty), \varepsilon \in (1, 0)$. Из этого следует, что бесконечное множество возможных числовых значений в промежутке $(1, \infty)$ равно бесконечному множеству возможных числовых значений в промежутке $(1, 0)$. Каждое значение ω_i имеет свой шаг (у.е.) равный соответствующему значению $\varepsilon_i = 1 / \omega_i$ при этом каждое значение ω_i содержит $q_i = \omega_i / \varepsilon_i = \omega_i^2 = 1 / \varepsilon_i^2$ шагов (у.е.).

О.2. *Две окружности с обратными длинами радиусов* $R, r = 1 / R \ \ (R > 1)$ *назовём взаимно обратными*.

В системе концентрических окружностей на плоскости всякая окружность радиуса $R > 1$ имеет единственную обратную ей окружность радиуса $r = 1 / R < 1$ и наоборот. Бесчисленному множеству окружностей радиуса $R > 1$ соответствует такое же бесчисленное множество обратных окружностей радиуса $r = 1 / R < 1$, что следует из А.2.

О.3. *Постоянные или переменные величины, принимающие всегда только фиксированные (конечные) вещественные числовые значения назовём реальными величинами*.

Например, величины $B, M ; \omega, \varepsilon$ (смотри выше) являются реальными величинами по тому, что они имеют постоянные или переменные фиксированные (конечные) значения.

Геометрические объекты (тела) имеющие постоянные или переменные фиксированные размеры назовём реальными объектами.

Например, в системе концентрических окружностей (см. выше) все окружности конечных радиусов и кривизны являются реальными.

Виртуальные величины (объекты)

О.4. *Виртуальная величина (объект) – это некоторый предел (граница) к которому неограниченно стремятся реальные величины (объекты), но, ни когда в них не воплощаются*.

Термин “не воплощаются” означает “не достигают”, “не совмещаются”, “недоступны” “могут быть меньше или больше, но не равными ”. При этом виртуальная величина (объект), не смотря на не достижимость их реальными величинами (объектами), не является эфемерностью, ибо к эфемерности не могут стремиться реальные величины (объекты). Они могут неограниченно стремиться воплотиться только в себя подобным величинам (объектам), существующим, хоть и в не доступной (скрытой) для них форме. Например, виртуальной числовой величиной является всякое иррациональное число. Другие виртуальные величины (объекты) будут рассмотрены ниже.

Бесконечность, ноль

А.3. *Бесконечная величина (бесконечность) является виртуальной (невоплотимой) величиной (объектом) для реальных неограниченно возрастающих величин* $\omega\ (\omega \to \infty)$.

Реальная неограниченно возрастающая величина $\omega \to \infty$ в процессе возрастания принимает только фиксированные (конечные) значения и не может воплотиться в бесконечность, ибо ни что *конечное*, по определению, не может стать *бесконечным*. В противном случае, произойдёт абсурдная и противоречивая ситуация при которой конечная величина воплощается в бесконечную величину, а бесконечная - в конечную. Т.е. нивелируются эти два фундаментальных понятия.

А.4. *Ноль является виртуальной (невоплотимой) величиной (объектом) для реальных неограниченно убывающих величин* $\varepsilon(\varepsilon \to 0)$.

Понятно, что если бесконечность ∞ виртуальна для $\omega \to \infty$, то обратная бесконечности величина – ноль ($0 = 1/\infty$) виртуальна (не воплощаема) для $\varepsilon = 1/\omega \to 0$

Вывод из А.4, А.5 следует, что *всякая реальная величина (реальное значение) не может быть нулевой (нулевым) и бесконечной (бесконечным)* .

Следует отметить важную деталь, что физические величины, фиксированные значения которых могут неограниченно возрастать и убывать, являются реальными величинами (см. О.1.). Т.е., *физические величины не могут быть бесконечными и нулевыми* (что – то сущее (реально существующее) не может быть “ничем”). Позже это важное утверждение будет развито подробнее.

Прямая линия, безразмерная точка

А.5. *Бесконечная прямая линия является виртуальным объектом, а именно виртуальным замкнутым кольцом*.

О.5. *Виртуальное замкнутое кольцо (ВЗК или Кольцо) – это окружность нулевой кривизны и бесконечной (неограниченной) длины*.

ВЗК является виртуальным объектом, ибо не воплощаемо (не достижимо) для реальной окружности неограниченно возрастающего радиуса и неограниченно убывающей кривизны. Оно не достижимо для реальной окружности по двум причинам:

- во первых из А.3 и А.4. следует, что ни какая реальная геометрическая линия (в том числе реальная окружность) не может иметь реальный бесконечный радиус и реальную нулевую кривизну. Эти параметры являются реальным величинами, значит, не могут быть бесконечными или нулевыми.- во - вторых понятно, что если исходить из логических соображений - реальная окружность ни *когда* не может воплотиться в кольцо нулевой кривизны без нарушения замкнутости (целостности) её линии. При неограниченном возрастании размера реальной окружности, её линия будет неограниченно стремиться к совмещению с линией ВЗК, но этого воплощения, ни когда не произойдёт.

Учитывая то, что бесконечная линия имеет параметры: радиус кривизны $\rho = \infty$ и кривизну $k = 1/\rho = 0$ те же, что и ВЗК. Значит, прямая бесконечная линия является виртуальным объектом, а именно виртуальным замкнутым кольцом (ВЗК), но не реальной прямой, уходящей в противоположных направлениях в бесконечность (“в никуда”).

И так прямая линия это виртуальный объект, а именно бесконечное *ВЗК (виртуальное замкнутое кольцо)*. Учитывая важность этого утверждения, тема будет развита ниже (см. **А.7.**)

А.6. *Безразмерная точка является обратным объектом для ВЗК (прямой линии)*.

Безразмерная точка имеет параметры: радиус кривизны $\rho_t = 1/\infty = 0$ и кривизну $k_t = 1/\rho_t = \infty$. Т.е. безразмерная точка является виртуальным объектом с обратными параметрами по отношению к параметрам ВЗК (см. О.5). Значит ВЗК и безразмерная точка являются взаимно обратными виртуальными объектами (окружностями). Фактически точка является максимально малым виртуальным замкнутым кольцом на плоскости, а ВЗК – максимально большим. А в промежутке между виртуальными Кольцами: *малым и большим расположено множество* ***реальных*** *концентрических окружностей (колец), имеющих фиксированные (конечные) параметры (длину и кривизну линий).*

А.7. *Реальных прямых конечных линий в природе не существует*.

Действительно виртуальная прямая линия или ВЗК является прообразом реальных окружностей фиксированной (конечной) длины и кривизны линии. Следует особо подчеркнуть, что бесконечная прямая линия замкнутая (“свёрнутая”) в ВЗК, является не прообразом для отрезков фиксированной (конечной) длины, а прообразом именно для реальных окружностей фиксированной длины и кривизны. Отрезок прямой не имеет прообраза в природе (материальном мире). Он является искусственным геометрическим объектом нарисованным на листе бумаги или песке с помощью линейки, но такой объект нельзя продлевать даже гипотетически бесконечно в оба конца “в никуда”, ибо у него нет в бесконечности прообраза, а у реальной окружности он, есть – это прямая бесконечная замкнутая линия или ВЗК. Если, гипотетически, попытаться продлевать (рисовать) в вакууме прямую (как нам кажется) линию неограниченно в пространство, то она, по мимо нашей воли и под действием ненулевой кривизны, всегда будет сворачиваться в окружность. Если же предположить наличие в природе реальных прямолинейных отрезков, то необходимо согласиться и с тем, что длина каждого из них может неограниченно возрастать. Это значит, что неограниченно возрастающей длины реальный отрезок должен воплотиться в реальную прямую бесконечной длины и нулевой кривизны линию. Это не возможно, ибо такая реальная линия “обязана” бесконечно возрастать и ни когда не сможет “свернуться” в замкнутое кольцо, а это противоречит аксиоме А.5 с учётом определения О.5.

Окружности относительно не большого (локального) размера нами таковыми, визуально или с помощью технических средств, и воспринимаются. Окружности же относительно большого (глобального, астрономического) размера и ничтожно малой и абсолютно не уловимой кривизны людьми ошибочно воспринимаются как реальные прямые линия бесконечной (в оба конца) длины. Это грубая теоретическая ошибка. Например, тело, запущенное в вакууме в одну сторону по реальной кольцевой (круговой) орбите вернётся в исходную точку, а не улетит в бесконечность (в “никуда”), как сейчас полагают. Ибо реальных кольцевых (круговых) орбит нулевой кривизны в природе не существует. Исключением является ВЗК – Кольцо нулевой кривизны, но это не реальный, а априори реально существующий невидимый *виртуальный* объект. Человеку его невозможно не только воссоздать опытным путём, но и осмыслить, тем не менее, он существует, ибо в него стремится воплотиться реальная окружность, у которой размер неограниченно возрастает, а кривизна неограниченно убывает.

Свойства ВЗК (виртуальной прямой линии)

1. *ВЗК (виртуальная прямая линия) единственное (единственная) на плоскости*.

На плоскости не может быть двух и более *различных* концентрических колец *одинаковой (нулевой) кривизны*. Действительно не может быть колец нулевой и “более” или “менее” нулевой кривизны. Не может быть на плоскости также двух и более пересекающихся в двух общих точках колец нулевой кривизны, ибо через эти две точки можно провести только одну прямую линию или одно ВЗК. Следовательно, на плоскости может быть только единственное виртуальное замкнутое кольцо (или единственная виртуальная замкнутая бесконечная прямая линия). Из А.6 следует, что и безразмерная точка (или малое виртуальное замкнутое Кольцо), как объект обратный большому Кольцу, также является единственной на этой плоскости. Следует отметить, что на прямой виртуальной линии (большом Кольце) находится бесчисленное множество *линейных* безразмерных точек, ибо длина большого Кольца бесконечна, и его условная единица (шаг) равен нулю ($1/\infty = 0$).

Итак мы доказали, что ВЗК является единственным (не воплощаемым) прообразом всякой реальной окружности на плоскости. Учитывая, что ВЗК бесконечно, то и всякая бесконечность может быть единственной. Если предположить обратное, а именно что бесконечностей может быть две и более, то возникает необходимость считать, что и ВЗК должно быть два и более, а это невозможно (смотри выше).

2. *ВЗК (прямая) является геометрическим символом актуальной бесконечности*.

ВЗК реально существует здесь и сейчас в скрытой форме. Длина большого Кольца бесконечна (не ограничена) в то же время оно, как любой замкнутый объект, начинаясь и заканчиваясь в своей произвольной точке, приобретает конечную длину. То есть, Кольцо является геометрическим символом *актуальной конечной бесконечности*. Понятно, что актуальная бесконечность является виртуальным объектом, не воплощаемым для реальности (реального) мира. При таком раскладе, *потенциальной бесконечностью является бесчисленное множество реальных концентрических окружностей на плоскости, которые располагаются на плоскости между малым и большим виртуальными плоскостями*.

3. *ВЗК (бесконечная прямая) не подчиняется законам геометрии Евклида*.

Действительно:

ВЗК, т.е. актуальная бесконечность единственная на плоскости (в двухмерном пространстве), по этому, бесконечные параметры ВЗК: радиус R, диаметр D, длина L, площадь S равны бесконечности, а бесконечность единственна. То есть, все эти параметры равны между собой: $R = D = L = S = \infty$.

В природе не существует бесконечных параллельных и бесконечных пересекающихся прямых, бесконечных треугольников и других бесконечных ломаных геометрических фигур. Все эти бесконечные объекты являются сутью единственного ВЗК или единственной бесконечной прямой линии.

Эти свойства, да и само понятие о ВЗК хорошо согласуется с учением Н. Кузанского о максимальном круге. Цитируем: “…поскольку это максимальный круг, его диаметр тоже максимален, а раз многих максимумов не может быть, такой круг до того един, что его диаметр есть окружность. Но у бесконечного диаметра бесконечна и середина, середина же есть центр; значит, центр, диаметр и окружность у такого круга тождественны ” [1], Гл. 21, с 83. Приведём ещё одну цитату из этого источника, которая хорошо согласуется с положением статьи о неограниченном стремлении реальных окружностей воплотиться в свой скрытый прообраз, которым является ВЗК: “…видимое поистине есть образ невидимого…всякий образ стремится уподобиться своему прообразу… ”[1], Гл. 11, с. 64.

4. *ВЗК стационарно (не подвижно). Всякое движение (перемещение) по Кольцу (прямой бесконечной линии) исключено*.

Действительно, длина кольца L бесконечна ($L=\infty$), обратная величине (шаг иди условная единица смотри А.1, А.2) равна $1/L=1/\infty=0$. Двигаться (перемещаться) нулевыми шагами $(0+0+..=0)$ невозможно. То же можно утверждать из других соображений: если радиус Кольца $R=\infty$, то поворот его вокруг начала его должен описать априори реальную бесконечную окружность, что не возможно, ибо бесконечность не воплощаема для реальных окружностей. Поворот не возможен так же из соображений того, что конец реального луча прямой должен двигаться с бесконечной скоростью. Т.е нет ни каких оснований того, чтобы допускать любые перемещения ВЗК и по ВЗК.

6. Абсолютно большие и абсолютно малые значения реальных величин.

А.8. *Всякая реальная величина, имеющая максимально возможное для неё числовое значение имеет и единственное обратное ей минимально возможное для неё значение и наоборот*.

Понятно, что если реальная величина имеет максимально возможное значение $b_{i\max}$, то обратное ей $m_{i\min}=1/b_{i\max}$ будет минимально возможным значением этой величины и наоборот.

Назовём максимально большое значение реальной величины $b_{i\max}$ *абсолютно большим значением её*, а минимально возможное $m_{i\min}=1/b_{i\max}$ *абсолютно малым её значением*.

Например, реальная окружность имеет абсолютно большую длину дуги (без учёта периодичности или, как её называют философы, дурной бесконечности) которая равна длине окружности. Значит, абсолютно большой дугой реальной окружности является её длина L, а абсолютно малой длиной дуги окружности будет обратная ей длина $1/L$. Так если длина окружности (её абсолютно большое значение) 100 метров, то её абсолютно малым (единственным) значением будет 1/100 *метров*. То есть, *всякая реальная окружность длины L является дискретной величиной*, состоящей из $q=L/(1/L)=L^2$ элементарных отрезков (дуг) абсолютно малой (для данной окружности) длины $1/L$.

Таким образом, всякая реальная окружность системы концентрических окружностей на плоскости имеет абсолютно большую длину (без учёта периодичности) и единственную обратную ей абсолютно малую длину.

Исторические предпосылки замкнутости прямой

Из истории математики известно, что идея замкнутости и конечности прямой и пространства не нова. Так Б. Риман в 1853 году прочёл в Гёттингене исторический доклад “О гипотезах, лежащих в основании геометрии”. Он предположил, что пространство, хотя и неограниченно, но конечно, при этом прямая приобретает конечную длину и стала возможной неевклидова геометрия [2], с. 430.

Многие плодотворные работы великого Л. Эйлера можно объяснить только замкнутостью прямой (числовой оси). Эйлер полагал, что отрицательные числа больше бесконечности [2], с. 18. Он фактически, доказал это в своём труде: “Основания дифференциального исчисления”, где показал, что положительные и отрицательные числа связаны переходом через бесконечность [2], с. 18. Это возможно только при замкнутости, а значит виртуальности прямой. На основании связи положительных и отрицательных чисел Эйлер высказал два знаменитых принципа о бесконечных рядах: 1) “Я полагаю, что каждый ряд должен обладать определённым значением…” [3], с. 283. 2) “Сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд…” [4], с. 1. Эти принципы он распространял и на расходящиеся ряды, чем вызывал критику в свой адрес. Эта критика могла быть обоснованной, при условии, что прямая (числовая ось) не замкнута и бесконечная в оба конца. При замкнутости же числовой прямой и непосредственном суммировании членов расходящегося ряда, его частные суммы будут неограниченно возрастать, стремясь к бесконечности, которую невозможно преодолеть. Если же, расходящийся ряд, заменить на эквивалентно равный ему, таким образом, что он станет сходящимся к значению того выражения, которое разворачивает (образует) этот ряд, то цель будет достигнута. Представим себе окружность, обозначим на ней начальную точку O, в окрестности её допустим, справа отметим ещё одну точку C, символизирующую значение выражения образующего некий ряд. Справа от точки C отметим точку X, символизирующую частные суммы ряда. Если частные суммы будут неограниченно возрастать, координата точки X будет меняться вправо от точки O в сторону бесконечности, то она ни когда не достигнет точки C (значения выражения образующего ряд). Точка C в этом случае будет виртуальной (не воплощаемой) для переменной величины X. Если преобразовать, расходящийся ряд в эквивалентно равный ему, таким образом, чтобы частные суммы его убывали, а координата точки X менялась влево к своему реальному конечному пределу C. Этот принцип лежит в основании теории суммирования расходящихся рядов, основателем которой, фактически является Эйлер. Понятно, что рассмотренные принципы Эйлера, закономерны только при условии замкнутости прямой (числовой оси).

Новые факты, посильно развивающие теорию рядов, будут приведены в главе 2 этой статьи

И наконец, замечательный математик наш современник и соотечественник Варшамов, упорядочивая особым способом, множество целых чисел на числовой оси вывел следующие формулы: $\lim_{n\to\infty}(n,-n)=\varnothing$, $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\lim_{n\to\infty}(-n)$ [5], с. 23, 26. Эти формулы явно свидетельствуют о том, что числовая ось (прямая) является замкнутой и конечной. Правда он не предполагал, что бесконечная числовая ось является виртуальной (а не реальной).

На виртуальном замкнутом числовом кольце могут быть размещены *все вещественные* числовые значения *всех не связанных между собой абстрактных величин*. На правом от нуля полукольце размещаются *все* положительные вещественные значения величин, - на левом *все* отрицательные. Они не упорядочены последовательно, а именно размещены (закреплены) стационарно раз и навсегда. Всякое движение (перемещения) между точками, символизирующими числовые значения не возможны. Эти точки можно сравнить с множеством стационарных электрических лампочек, каждая из которых подключена параллельно источнику тока и управляются из общего пульта управления. Включение и выключение лампочек не зависимое друг от друга, и при этом исключается всякое перемещение лампочек (точек символизирующих числа) по отношению друг к другу, все они стабильны и строго привязаны к своим местам. Например, если рассматривать ряд натуральных чисел: $1+2+3+\ldots$
То частные суммы ряда будут распределяться по следующей схеме:
$s_1=1$ включена одна лампочка,
$s_2=1+2=3$ включены 2 лампочки, символизирующие два первых члена ряда и третья лампочка, символизирующая сумму первых двух членов ряда,
$s_3=1+2+3=6$ включены 3 лампочки, символизирующие три первых члена ряда и четвёртая лампочка, символизирующая сумму трёх первых членов ряда и т.д. И никакого движения лампочек (чисел) по отношению друг друга не происходит, ибо все они незыблемо закреплены строго на своих местах. Движения нет, а процесс есть (перемена координат). Понятно, что таким образом сумма ряда не определима, этому мешает необходимость преодоления виртуальной бесконечности. Но числовая прямая – это замкнутое кольцо, позволяющее запустить процесс в обратном от бесконечности направлении и таким образом найти конечную сумму этого ряда или конечное значение выражения, образующего этот ряд, если таковое имеется. В теории суммирования расходящихся рядов найден способ (и не один) определения конечной суммы

этого ряда (сумма натуральных чисел), которая равна $-1/12$. Позже будет приведён ещё один новый способ суммирования некоторых расходящихся рядов, а так же рассмотрен очень обширный класс функциональных рядов, которых до сих пор ни кто не касался. Новый способ суммирования рядов и новые функциональные ряды, которые будут рассмотрены позже, будут ещё одним косвенным подтверждением замкнутости прямой линии и пространства. Замкнутость, а значит конечность, числовой (виртуальной) линии, позволяет рассматривать расходящиеся ряды с меньшей критичностью, чем это принято в настоящее время. Более того замкнутость числовой линии позволяет уровнять значимость (статус) расходящихся и сходящихся рядов, что в свою очередь, позволяет ввести в обращение большой класс новых числовых и функциональных рядов. Подробно смотри в главе II.

8. Гладкая плоскость

А.9. *Гладкая плоскость является виртуальной замкнутой сферой бесконечной площади поверхности и нулевой кривизны*.

Если реальному шару придать неограниченное возрастание размера (радиуса), то виртуальным пределом (границей) его сферы будет замкнутая сфера бесконечной площади и нулевой кривизны поверхности. Эта сфера является виртуальной, ибо не воплощаема для реальной сферы, неограниченно возрастающего размера (радиуса), без нарушения её замкнутости (целостности). Назовём замкнутую *сферу бесконечной площади и нулевой кривизны виртуальной замкнутой сферой (ВЗС)*.

Покажем, что ВЗС является так же *бесконечной прямой в пространстве*. Проведём через прямую линию в пространстве пучок плоскостей пересекающихся в этой прямой. В каждой из этих плоскостей прямая линия является виртуальным замкнутым кольцом, а в совокупности множество ВЗК на множестве плоскостей пучка образуют виртуальную замкнутую сферу актуально бесконечной площади поверхности и нулевой кривизны. Т.е. прямая линия в пространстве является *ВЗС* и наоборот. В то же время, ВЗС является виртуальной границей для реальной сферы неограниченно возрастающей площади поверхности. Понятно то, что площадь виртуальной сферы S, актуально бесконечна ($S=\infty$). Множество больших Кольца, образующих эту сферу, имеют актуально бесконечные: длину L, радиуса R и диаметра D. С учётом того, что бесконечность единственна, то все эти величины равны между собой, т.е. $S=L=R=D=\infty$. Единственным обратным объектом ВЗС является виртуальная нулевая сфера, имеющая нулевые параметры (площадь поверхности, радиус, диаметр), а так же актуально бесконечную кривизну. Таким образом, пространство состоит из замкнутой системы концентрических сфер. Первой виртуальной нулевой сферы, последней виртуальной бесконечной сферы и множества промежуточных реальных сфер конечной площади поверхности и конечной (не нулевой) кривизны. Исходя из этого, можно сделать вывод, что реальных гладких плоскостей в природе не существует. Гладкая плоскость актуально существует в пространстве в единственном числе и является виртуальной (не воплощаемой) сферой.

Все абстрактные вещественные, мнимые и комплексные числа стационарно закреплены на числовой ВЗС. На экваторе сферы стационарно закреплены все не связанные между собой абстрактные вещественные числа. На перпендикулярном к экватору ВЗК закреплены все не связанные между собой мнимые числа, на наклонных к экватору ВЗК закреплены все не связанные между собой комплексные числа. Все эти величины незыблемо закреплены в стационарных (не подвижных) точках ВЗС. Всякое движение (перемещение) материальных точек (тел) по поверхности сфер не возможны.

8. Физические величины

Ранее показано, что всякая физическая величина является реальной величиной, которая не может быть бесконечной и нулевой (смотри пояснение к А.4). Эти величины могут быть только конечными. Являясь конечными, имеющими абсолютно большое значение, следовательно, и обратное абсолютно малое значение (смотри А.8). То есть эти величины являются дискретными, имеющими абсолютно малую (не делимую) величину (элемент) $M<1$ и обратную ей абсолютно большую конечную величину $B>1$ (и наоборот). Всякая абсолютно большая величина $B>1$ содержит в себе q абсолютно малых величин $M<1$, где $q=B/M=B^2=1/M^2$ (смотри А.1). Эти реальные величины могут быть упорядочены только на своём числовом конечной длины кольце, ибо реальных числовых прямых линий в природе не существует.

Предварительные выводы: *1) Материальный (видимый мир) конечен и не делим до бесконечности; 2) ВЗК и ВЗС являются виртуальными границами между конечным видимым и бесконечным не видимым миром; 3) на числовых ВЗК и ВЗС могут быть упорядочены (распределены) только абстрактные непрерывные величины. Реальные же физические величины дискретны и могут быть упорядочены только на реальных конечных окружностях, где возможно движение. На ВЗК и ВЗС движение не возможно.*

Приведём конкретные примеры:

<u>Абсолютно большая скорость</u> $B=c\approx 0.3\cdot 10^9$ м/с, c - скорость света. Обратная ей величина абсолютно малая скорость $M=1/B=1/c\approx 1/0.3\cdot 10^9\approx (10/3)\cdot 10^{-9}$ м/с . То есть всякое тело может или быть в относительном покое или двигаться со скоростью не менее $(10/3)\cdot 10^{-9}$ м/с.

<u>Абсолютно малая длина</u> $M=l_p\approx 1.616\cdot 10^{-35}$ м, l_p - длина Планка. Обратная ей абсолютно большая длина $B=1/l_p\approx (1/1616)10^{35}$ м. Больше этой длины в материальном мире не существует, как не существует и длины меньше чем абсолютно малая длина ($M=l_p$).
Если запустить в вакууме тело с некоторой скоростью в одну сторону, то оно полетит по реальной круговой орбите условного радиуса ($R=B/2\pi=1/2\pi l_p$) и через некоторое время вернётся в исходную точку с другой стороны (смотри пояснение к аксиоме А.7). Если в вакуумном пространстве произвести взрыв, то осколки этого взрыва, пройдя по своим одинаковым полукольцам через с одинаковой скоростью и через некоторое (определённое и определяемое) время сойдутся одновременно в точке диаметрально противоположной исходной. Т.е. взорвавшееся тело будет восстановлено.

<u>Абсолютно малое время</u> $M=t_p\approx 5.39\cdot 10^{-44}c.$, где t_p время Планка. Абсолютно большое время $B=1/M=1/t_p\approx 0.185\cdot 10^{44}c.$ Абсолютно малое время – это такое время, за которое свет преодолевает планковское расстояние. Абсолютно большое время – это время, за которое тело, двигаясь в вакууме с абсолютно малой скоростью, преодолевает абсолютно большое расстояние.
<u>Абсолютно большая температура</u> $B=T_p\approx 1{,}42\cdot 10^{32}K,$ <u>Абсолютно малая температура</u> $M=1/T_p\approx 0{,}71\cdot 10^{-32}K$, где T_p - температура Планка.
<u>Абсолютно большая плотность</u> $B=\rho_p\approx 5.1\cdot 10^{96}$ кг/м^3, <u>абсолютно малая плотность</u> $M=1/B=1/\rho_p\approx 0.19\cdot 10^{-96}$ кг/м^3, где ρ_p - Планковская плотность.

Опираясь на Планковские единицы можно продолжить дальше список абсолютно больших и абсолютно малых значений физических величин. Правда, планковская масса $m_p\approx 2.18\cdot 10^{-8}$ кг не может быть абсолютно малой массой, как и обратная ей величина $1/m_p$ не может быть абсолютно большой. Необходим способ определения значения массы элементарной не делимой частицы (абсолютно малое значение массы) и по ней определить абсолютно большое значение массы, т.е. по сути, массу видимой части Вселенной (а другой реальной Вселенной не существует). Можно гипотетически предположить, что видимая часть Вселенной, ограничена конечной сферой образующей которой, является окружность абсолютно большой длины $B = 1/l_p \approx (1/1616)10^{35}$ м (смотри выше пример 2). Видимая часть Вселенной – это суть материальной Вселенной, дальше которой материя не распространяется.

Как известно древнегреческий философ Зенон из Элеи выдвинул так называемые апории движения, основополагающим принципом которых является предположение: у пространства нет пределов делимости. Всякое, даже сколько угодно малое пространство можно делить бесконечно большое количество раз и конца этому процессу в природе не предусмотрено. Он, например, утверждал, что быстроногий бегун Ахиллес стартуя одновременно с черепахой, давая ей фору, допустим тысячу шагов, ни когда не догонит черепаху, объясняя это возможностью неограниченного деления длины. Что парадоксально, Зенон, как и любой нормальный человек, знал, что быстроногий Ахиллес обязательно догонит и обгонит черепаху. А это значит, что апория о черепахе опровергает (а не утверждает) возможность неограниченного деления длины (пространства). Как мы вывели раньше, делить расстояние можно только до предела, равного абсолютно малой длины или длины Планка (l_p). У этой длины нет, например, середины. Арифметически эту численную величину можно разделить на два, но эту длину разделить на пополам нельзя, ибо длина меньше l_p существует, но она в этом случае виртуальна (не воплощаема).

Коснёмся ещё одной апории движения Зенона – летящей стрелы. Если коротко, то он утверждал, что летящая стрела неподвижна, так как в каждый конкретный *момент* она покоится, а поскольку она покоится в каждый *момент* времени, то она покоится всегда. Ему вторит древнекитайский философ Гунсунь Луну “В стремительном [полёте] стрелы есть момент отсутствия и движения, и остановки”. На это можно возразить, исходя из нашей статьи, что путь стрелы состоит из множества дискретных элементов l_p (неделимая единица измерения Планка) и стрела летит в каждом из этих отрезков с определённой скоростью, по этому, она будет находиться в покое, только когда упадёт на землю. Зенон, вероятно, говоря о *моменте времени*, имел в виду *нулевой* промежуток времени, но мы уже знаем, что время (как и любая физическая величина) не может быть нулевым. В случае с летящей стрелой моментом времени будет отношением длины элемента l_p к скорости движения стрелы, а это отношение не равно нулю. А вот если бы стрела была запущена в вакууме, то она вообще всегда была бы в движении.

ГЛАВА 2

1. Новый способ нахождения суммы ряда

Предложенный способ подходит для знакопеременных расходящихся и сходящихся рядов. Он наиболее рационален для расходящихся и медленно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Если составить последовательность (1) из средних значений смежных пар последовательности частных сумм знакопеременного ряда. Затем последовательность (2) из средних значений смежных пар последовательности (1), за тем, таким же образом, составим последовательность (3) из последовательности (2) и так далее, то в итоге получим сумму ряда в конечном виде или приблизительную (точность зависит от числа задействованных частных сумм).*

Доказательство. Рассмотрим знакопеременный расходящийся ряд:

$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{k-1} u_k \pm \ldots, k = 1..\infty$, где $|u_1| < |u_2| < u_3 < |u_4| < \ldots$.

Составим последовательность частных сумм:

$$s_1 = u_1 > 0,\ s_2 = u_1 - u_2 < 0,\ s_3 = u_1 - u_2 + u_3 > 0,\ s_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 < 0,\ s_5 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 > 0,\ s_6 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 < 0, \ldots,\ s_{2n-1} = u_1 - u_2 + \ldots + u_{2n-1} > 0;\ s_{2n} = u_1 - u_2 + \ldots - u_{2n} < 0, \ldots \quad (1)$$

То есть значения частных сумм, расположенных на нечётных местах положительны, а на чётных местах – отрицательны.
Составим последовательность средних значений смежных пар (1) (число членов этой последовательности будет меньше на единицу числа членов предыдущей последовательности):

$$s_1' = \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2) = s_1 - \tfrac{1}{2}u_2,\ s_2' = \tfrac{1}{2}(s_2 + s_3) = s_2 + \tfrac{1}{2}u_3,\ s_3' = \tfrac{1}{2}(s_3 + s_4) = s_3 - \tfrac{1}{2}u_4, ...,$$
$$s_{n-1}' = \tfrac{1}{2}(s_{n-1} + s_n) = s_{n-1} \pm \tfrac{1}{2}u_n. \qquad (2)$$

В новой последовательности величины «не чётных» членов уменьшились по сравнению с соответствующими членами последовательности (1), то есть сдвинулись по числовой оси влево относительно их. Величины “чётных”, же (отрицательные) увеличились и сдвинулись вправо от соответствующих значений членов последовательности (1). То есть смежные пары новой последовательности тоже сдвинулись навстречу друг к другу.

Продолжим то же действие с последовательностью (2)

$$s_1'' = \tfrac{1}{2}(s_1' + s_2') = \tfrac{1}{2}(s_1 - \tfrac{1}{2}u_2 + s_2 + \tfrac{1}{2}u_3) = s_1' - \tfrac{1}{4}u_2 + \tfrac{1}{4}u_2,\ s_2'' = \tfrac{1}{2}(s_2' + s_3') = s_2' + \tfrac{1}{4}u_3 - \tfrac{1}{4}u_4$$
$$s_3'' = \tfrac{1}{2}(s_3' + s_4') = s_3' - \tfrac{1}{4}u_4 + \tfrac{1}{4}u_5,\ s_4'' = \tfrac{1}{2}(s_4' + s_5') = s_4' - \tfrac{1}{4}u_5 - \tfrac{1}{4}u_6, ...$$

.

Легко заметить, что значения «нечётных» членов этой последовательности увеличиваются по сравнению с соответствующими членами предыдущей последовательности, а «чётных» – уменьшаются и смежные пары продолжают перемещаться навстречу друг друга на числовой оси, а число членов этой последовательности сокращается ещё на единицу. Продолжая эти действия дальше, до тех пор, пока останется единственный член, к которому низойдёт вся система последовательностей. Получится подобие перевёрнутого равнобедренного треугольника, в вершине которого будет число, являющееся приблизительным (в отдельных случаях конечным) пределом частных сумм (для расходящихся рядов) или регулярной суммой (для сходящихся рядов). Чем большее число частных сумм рассматривается, тем будет ближе результат к фактическому пределу или сумме ряда.
Продемонстрируем метод на примере расходящегося ряда

Разложим в биноминальный ряд выражение $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - ..$ примем $x = 1.1 > 1$, сумма ряда должна быть равна значению того выражения, образующего этот ряд (по Эйлеру), то есть: $(1+1,1)^{-1} \approx 0.476190476..$

$(1+x)^{-1} = (1+1.1)^{-1} = 1 - 1.1 + (1.1)^2 - (1.1)^3 + ... + (-1.1)^n \pm ..$ ряд расходится

Рассмотрим восемь первых частных сумм и составим «треугольник» (верхняя строка это последовательность частных сумм, последующие строки это средние значения смежных пар предыдущих строк):

1; - 0.1; 1.11; - 0.221; 1,2431; - 0.36741; 1.404151; - 0.5445661;

0.45; 0.505; 0.4445; 0.51105; 0.437845; 0.5183705; 0.42979245;

0.4775; 0.47475; 0.477775; 0.4744475; 0.47810775; 0.474081475;

0.476125; 0.4762625; 0.47611125; 0.476277625; 0.476094612

0.47619375; 0.476186875; 0.476194437; 0.476186118;

0.476190312; 0.476190656; 0.476190277;

0.476190484; 0.476190466;

0.476190475.

Легко заметить, что у второй строки «нечётные» члены дают недостаточные приближения к фактической сумме, «чётные» - избыточные, на следующей строке наоборот первые дают избыточные значения, а вторые – не достаточные и так далее. При переходе от строки к строке эти приближения становятся слева и справа более «близкими» к фактической сумме или к значению того выражения, которое образует этот ряд. То есть подтверждается принцип (о сумме всякого ряда) великого Эйлера.

Сопоставим последнюю цифру «треугольника» с фактической суммой $= 0.476190476...$
Видно, что 8 частных сумм даёт результат с восьмью верными знаками после запятой, но это не

всегда происходит так быстро. Часто для достижения необходимой точности нужно рассматривать последовательность большего числа частных сумм. Так, если принять $x = 1.5, (1+x)^{-1} = 0.4$, то только девять частных сумм дадут результат с точностью до четырёх верных знаков после запятой $(0.39991..)$. Но с другой стороны метод может дать в отдельных случаях сумму в конечном виде. Это касается, например, знакопеременных бесконечных арифметических прогрессий. Метод может применяться так же к рядам, где положительные и отрицательные значения чередуются сериями, при этом серии положительных и отрицательных значений группируются и для каждой из них подсчитывается среднее значение. В результате этих преобразований получается обычный знакочередующийся ряд (последовательность). Метод охватывает множество различных рядов, в том числе биноминальных, которые в свою очередь представляют при различных параметрах большой класс неизвестных рядов, в том числе и функциональных, о которых речь пойдёт позже.

Способ простой, легко выполнимый после не большой тренировки, но громоздкий, поэтому была выведена общая формула для суммы знакочередующегося ряда.
Рассмотрим последовательность, например, первых восьми частных сумм.
Выполняя требования теоремы 1, получим схему:

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \quad s_5 \quad s_6 \quad s_7 \quad s_8$$

$$\frac{1}{2}(s_1+s_2) \quad \frac{1}{2}(s_2+s_3) \quad \frac{1}{2}(s_3+s_4) \quad \frac{1}{2}(s_5+s_4) \quad \frac{1}{2}(s_5+s_6) \quad \frac{1}{2}(s_7+s_6) \quad \frac{1}{2}(s_7+s_8)$$

$$\frac{1}{2^2}(s_1+2s_2+s_3) \quad \frac{1}{2^2}(s_2+2s_3+s_4) \quad \frac{1}{2^2}(s_3+2s_4+s_5) \quad \frac{1}{2^2}(s_4+2s_5+s_6) \quad \frac{1}{2^2}(s_5+2s_6+s_7) \quad \frac{1}{2^2}(s_6+2s_7+s_8)$$

$$\frac{1}{2^3}(s_1+3s_2+3s_3+s_4) \quad \frac{1}{2^3}(s_2+3s_3+3s_4+s_5) \quad \frac{1}{2^3}(s_3+3s_4+3s_5+s_6) \quad \frac{1}{2^3}(s_4+3s_5+3s_6+s_7) \quad \frac{1}{2^3}(s_5+3s_6+3s_7+s_8$$

$$\frac{1}{2^4}(s_1+4s_2+6s_3+4s_4+s_5) \quad \frac{1}{2^4}(s_2+4s_3+6s_4+4s_5+s_6) \frac{1}{2^4}(s_3+4s_4+6s_5+4s_6+s_7) \frac{1}{2^4}(s_4+4s_5+6s_6+4s_7+s_8)$$

$$\frac{1}{2^5}(s_1+5s_2+10s_3+10s_4+5s_5+s_6) \quad \frac{1}{2^5}(s_2+5s_3+10s_4+10s_5+5s_6+s_7) \quad \frac{1}{2^5}(s_3+5s_4+10s_5+10s_6+5s_7+s_8)$$

$$\frac{1}{2^6}(s_1+6s_2+15s_3+20s_4+15s_5+6s_6+s_7) \quad \frac{1}{2^6}(s_2+6s_3+15s_4+20s_5+15s_6+6s_7+s_8)$$

$$\frac{1}{2^7}(s_1+7s_2+21s_3+35s_4+35s_5+21s_6+7s_7+s_8) \qquad (3)$$

где значения членов последовательностей расположенных на чётных и нечётных местах движутся навстречу друг к другу, стремясь, в общем, к некоторому пределу.
Запишем формулу суммы ряда в общем виде:

$$s_n' = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_{k+1} = \frac{1}{2^n}[s_1 + \binom{n}{1}s_2 + \binom{n}{2}s_3 + .. + \binom{n}{k}s_{k+1} + .. + \binom{n}{n-1}s_n + s_{n+1}] \qquad (3)$$

где: $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ - частные суммы ряда, которые проставляются в формулу со своими знаками $n \wedge k \in N$, $\binom{n}{k}$ - биноминальные коэффициенты.

Формула даёт более точный результат, с увеличением числа рассматриваемых частных сумм. Но может быть и так, что она даёт сумму в конечном виде, даже при небольшом числе частных сумм, например, ряд основанный на арифметической знакопеременной прогрессии, а так же и для других видов числовых рядов. Следует также отметить, что если формула не даёт конечного результата, то она даёт приближение с недостатком или с избытком, при этом если s_n' даёт результат с недостатком (избытком), то s_{n+1}' наоборот даёт результат с избытком (недостатком).
Приведём примеры, тестирующие формулу (3) и попутно подтверждающие истинность знаменитого принципа Эйлера о сумме ряда

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = 1 - x + x^2 - .. \qquad (4)$$

Положим в (4) $x = 1$, получим частный случай биноминального ряда колеблющийся ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - ..$$

Последовательность частных сумм $s_k \to 1; 0; 1; 0; \ldots$

Применяем последовательно ф. (3):

$s_1' = 1/2(1+0) = 1/2,$

$s_2' = 1/2^2(1+2\cdot 0+1) = 1/2$

....

И так далее формула даёт стабильно конечное значение равное $1/2$ т.е. значение выражения образующего этот ряд. Результат согласуется со множеством источников по теории суммирования расходящихся рядов.

1.2. положим в (4) степень бинома -2, $x = 1$.

$(1+1)^{-2} = 1 - 2 + 3 - .. = 1/4$.

Последовательность частных сумм:

$s_k \to 1; -1; 2; -2; ..k; -k; ..$.

Применяем последовательно ф. (3):

$s_2' = 1/2^2(1 - 2\cdot 1 + 2) = 1/4,$

$s_3' = 1/2^3(1 - 3\cdot 1 + 3\cdot 2 - 2) = 1/4$.

Иногда формула (3) даёт 2-а постоянных конечных значения, средняя величина которых является суммой ряда. Например, если в (4) принять $x = 3$ получим ряд:

$(1+3)^{-1} = \sum(-3)^k = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + .. = 1/4$,

$s_k \to 1, -2, 7, -20, 61..$

применим ф.(3):

$s_1' = 1/2(1-2) = -1/2,$

$s_2' = 1/2^2(1 - 2\cdot 2 + 7) = 1,$

$s_3' = 1/2^3(1 - 3\cdot 2 + 3\cdot 7 - 20) = -1/2,$

$s_4' = 1/2^4(1 - 4\cdot 2 + 6\cdot 7 - 4\cdot 20 + 61) = 1$.

Средние значения смежных пар равно 1/4 , что равно значению выражения образующего ряд.

Примеры других (не биноминальных) рядов

2 Ряд $\sum(-1)^k(2k+1) = 1 - 3 + 5 - .., k = 0..\infty$

Регулярная сумм ряда равна нулю [5] с. 56 [6] с. 15

Применим формулу (3):

$s_k \to 1; -2; 3; -4; 5 - ..$

$s_2' = 1/2^2(1 - 2\cdot 2 + 3) = 0$

$s_2' = 1/2^3(1 - 3\cdot 2 + 3\cdot 3 - 4) = 0$

И все последующие применения формулы даёт нулевой результат.

3 Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2!} = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + ..$. Регулярная сумма равна 1/8 [5] с.60, [6] с.124

Применим ф. (3)

$s_k \to 1; -2; 4; -6; 9; -12; +..$

$S_2' = 1/2^2(1 - 2\cdot 2 + 4) = 1/4$.

$S_3' = 1/2^3(1 - 3\cdot 2 + 3\cdot 4 - 6) = 1/8$

$S_4' = 1/2^4(1 - 4\cdot 2 + 6\cdot 4 - 4\cdot 6 + 9) = 1/8$.

Все последующие применения формулы дают один и тот же результат 1/8.

4. Ряд: $\ln(1+x) = x/1 - x^2/2 + x^3/3 - ..$

Приняв $x = 2$, получим числовой расходящийся ряд:

$\ln(1+2) = 2/1 - 2^2/2 + 2^3/3 - 2^4/4 + 2^5/5 - 2^6/6 + 2^7/7 - 2^8/8 + ..$.

Значение выражения образующего ряд $\ln 3 \approx 1.09861$

Последовательное применение ф. (3):

$s_k \to 2,\ 0,\ 2.666..,\ -1.333..,\ 5.0666..,\ -5.6,\ 12.68571..,\ -19.31429..$

$s_2' = 2^{-2}(2 + 2\cdot 0 + 2.666..) = 1.1666..$

$s_3' = 2^{-3}(2 + 3\cdot 0 + 3\cdot 2.666.. - 1.333..) = 1.0833..$

$s_4' = 2^{-4}(2 + 4\cdot 0 + 6\cdot 2.666.. - 4\cdot 1.333.. + 5.0666..) = 1.108333..$

$s_5' = 2^{-5}(2 + 5\cdot 0 + 10\cdot 2.666.. - 10\cdot 1.333.. + 5\cdot 5.0666.. - 5.6) = 1.09586..$

$s_6' = 2^{-6}(2 + 6\cdot 0 + 15\cdot 2.666.. - 20\cdot 1.333.. + 15\cdot 5.0666.. - 6\cdot 5.6 + 12.68571..) = 1.100298..$

$s_7' = 2^{-7}(2 + 7\cdot 0 + 21\cdot 2.666.. - 35\cdot 1.333.. + 35\cdot 5.0666.. - 21\cdot 5.6 + 7\cdot 12.68571.. - 19.31429..) = 1.09807.$.

Результаты, имеющие чётные индексы, дают значения с избытком, а нечётные – с недостатком. С ростом индексов эти значения слева и справа приближаются к значению выражения образующему ряд, т. е. к значению $\ln 3 \approx 1.09861$.

Покажем что ф. (3) пригодна для сходящихся рядов и особенно эффективна для медленно сходящихся рядов:

5. Ряд: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} \pm ..$ медленно сходящийся ряд, сумма ряда $\ln 2 \approx 0.69315$.

Первые пять частных сумм ряда:

$1;\ 0.5;\ 0.8333...;\ 0.58333...;\ 0.78333...;\ 0.61667..$

Найдём сумму ряда по формуле (3)

$s_5' = 2^{-5}(1 + 5\cdot 0.5 + 10\cdot 0.8333 + 10\cdot 0.58333 + 5\cdot 0.78333 + 0.61667) = 0.69375$ то есть первые пять частных сумм по формуле (3) дают результат до третьего верного знака. Такой же результат даёт только тысячная частная сумма ряда (s_{1000}).

5. Для ряда $1 - 2^{2k} + 3^{2k} -$ формула (7) выдаёт сумму $= 0$, что согласуется с [6] с. 15 [5], с. 33.

6. Для ряда $1 - 2^3 + 3^3 - \ldots$ формула выдаёт сумму $= -1/8$

7. Для ряда $1 - 2^5 + 3^5 - \ldots$ формула выдаёт $1/4$

Результаты последних двух примеров согласуются с регулярными суммами по методам: Абеля, Бореля согласуется с [8].

Пояснение. Согласуется с [8]означает, что результаты согласуются с результатами выдаваемыми базой знаний Wolfram Alpha.

Рассматриваемый здесь новый метод суммирования рядов подходит для многих знакопеременных расходящихся рядов, а так же может быть очень рациональным для медленно и весьма медленно сходящихся рядов. По ходу статьи справедливость метода будет подтверждаться.

2. Биноминальные ряды

Здесь рассматривается большой класс недооценённых наукой и практикой функциональных рядов, полученных на основе биноминальных разложений. Подавляющее большинство этих рядов не заложены в программы компьютерных расчётных и поисковых систем, а следовательно, отсутствуют в математических базах. Это произошло не по тому, что они не актуальны, а по тому, что ими ни кто и никогда не занимался. Это вызывает удивление. Вероятно, мешал стереотип “повышенной осторожности обращения с рядами”. Этот стереотип возник из – за того, что исследователи не учитывали замкнутость и конечность числовой прямой (числового пространства).

2.1 Принятые обозначения

$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!} = \frac{p!}{(p-k)!k!}, p \notin N, k = 0..\infty$. $\binom{p}{k}$ можно выразить и через гамма – функцию $\Gamma(q)$, с учётом соотношения $\Gamma(q) = (q-1)!$ которое отображает связь биноминальных разложений со специальными функциями. Везде считать $\binom{p}{0} = \binom{p \pm 1}{0} = 1,\ 0! = 1$.

$$\binom{-p}{k} = \frac{-p(-p-1)...(-p-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{p(p+1)...(p+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} = \frac{(-p)!}{(-p-k)!k!},\ k = 0..\infty$$

$$\frac{p(p+1)...(p+k-1)}{k!} = \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}.$$

Примечание: выражение $\frac{(-p)!}{(-p-k)!k!}$ имеет смысл только если *p* не целое (имеет дробную часть).

$$(-1)^k \binom{-p}{k} = (-1)\frac{-p(-p-1)...(-p-k+1)}{k!} = \frac{p(p+1)...(p+k-1)}{k!} = \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} = (-1)^k \frac{(-p)!}{(-p-k)!k!}.$$

Знак $\sum$ означает, что нижний предел суммирования равен 0, верхний – бесконечность; если нижний предел суммирования не нулевой, а начинается с любого $n \in N$, то символ "$\sum$" остаётся, но делается оговорка, например $k = n..\infty, n \in N$.

2.2. Основные свойства биноминальных рядов

Утверждение. *Всякий биноминальный расходящийся ряд может быть заменён на эквивалентный ему сходящийся.*

Доказательство. Рассмотрим ряд $(a+x)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}x + \binom{p}{2}a^{p-2}x^2 + .. = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}a^{p-k}x^k$

При $x > a$ он расходится. Произведём замену его эквивалентно равным ему:

$$(a+c+x-c)^p = (a+c)^p + \binom{p}{1}(a+c)^{p-1}(x-c) + \binom{p}{2}(a+c)^{p-2}(x-c)^2 + .. =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(a+c)^{p-k}(x-c)^k.$$

Левые части этих выражений равны между собой, то равны и их правые части т.е $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(a+c)^{p-k}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}a^{p-k}x^k = (a+c)^p$. Этим мы поменяли расходящийся ряд на эквивалентно равный ему сходящийся при определённом значении произвольной $c(c > \frac{1}{2}(x-a))$. Такой приём может быть применён для разложения в сходящийся биноминальный ряд не целого положительного числа a в произвольную степень p: $a^p = (c+\delta)^p = c^p + \binom{p}{1}c^{p-1}\delta + \binom{p}{2}c^{p-2}\delta^2 + ..$, где c, δ - соответственно целая и дробная часть a.

Другой вариант приведения расходящегося ряда в эквивалентно равный ему сходящийся ряд способом разложения “наоборот”. Этот вариант в своё время предлагал великий Ньютон, но математическое сообщество не обратило на это внимания. При этом способе члены бинома меняются местами:

$$(a+x)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}x + \binom{p}{2}a^{p-2}x^2 + .. = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}a^{p-k}x^k, x > a \text{ расходится,}$$

$$(x+a)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}x + \binom{p}{2}x^{p-2}a^2 + .. = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}x^{p-k}a^k \text{ сходится или наоборот,}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}a^{p-k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}x^{p-k}a^k.$$

То есть и здесь мы заменили расходящийся ряд на эквивалентно равный ему сходящийся. Эти приёмы позволяют считать областью сходимости биноминальных рядов всю числовую ось, а так же подтверждают принцип Эйлера о сумме всякого ряда.

Рассмотрим подробно биноминальные разложения для произвольных вещественных степеней.

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}b + ..\binom{p}{k} a^{p-k}b^k .. = \sum \binom{p}{k} a^{p-k}b^k = \sum \frac{p!}{(p-k)!k!} a^{p-k}b^k,$$

$$p \notin N, a^\wedge b^\wedge p \in R, a > b \qquad (5)$$

Если $b > a$, то a, b меняются местами и разложение в биноминальный ряд выполняется в обратном порядке

$$b^p + \binom{p}{1} b^{p-1}a + \binom{p}{2} b^{p-2}a^2 + .. = \sum \binom{p}{k} b^{p-k}a^k = b^p \sum \binom{p}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^p \sum \frac{p!}{(p-k)!k!} \left(\frac{a}{b}\right)^k \qquad (5').$$

$$(a-b)^p = a^p - \binom{p}{1} a^{p-1}b + \binom{p}{2} a^{p-k}b^k - = ..\sum (-1)^k \binom{p}{k} a^{p-k}b^k = a^p \sum (-1)^k \frac{p!}{(p-k)!k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k, a > b \qquad (6)$$

$$(a+b)^{-p} = a^{-p} + \binom{-p}{1} a^{-p-1}b + \binom{-p}{2} a^{-p-2}b^2 + .. = \sum \binom{-p}{k} a^{-p-k}b^k = a^{-p} \sum \binom{-p}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k =$$

$$a^{-p} \sum \frac{(-1)^k (p+k-1)!}{(p-1)!k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k, a > b \qquad (7)$$

Если $a < b$, то разложение выполняется в обратном порядке. Ряд (7) формируется из (5) путём перемены в левой и правой частях знака p на противоположный.

$$(a-b)^{-p} = a^{-p} - \binom{-p}{1} a^{-p-1}b + \binom{-p}{2} a^{-p-2}b^2 + .. = \sum (-1)^k \binom{-p}{k} a^{-p-k}b^k =$$

$$a^{-p} \sum \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k, a > b \qquad (8)$$

Если *p* целое и $a < b$, то разложение выполняется в обратном порядке. Ряд (8) формируется из (6) путём перемены в левой и правой частях знака p на противоположный.

Ряды (5), (7) знакопеременные (знакочередующиеся) и к ним применима формула (3) для нахождения обычной и регулярной сумм. Члены рядов (6), (8) имеют постоянные знаки.

Другая форма записи биноминальных рядов:

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + .. = \sum \binom{p}{k} x^k = \sum \frac{p!}{(p-k)!k!} x^k \qquad (5').$$

$$(1-x)^p = 1 - \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 - = \sum (-1)^k \binom{p}{k} x^k = \sum (-1)^k \frac{p!}{(p-k)!k!} x^k \qquad (6').$$

$$(1+x)^{-p} = 1 + \binom{-p}{1} x + .. = \sum \binom{-p}{k} x^k = \sum \frac{(-1)^k (p+k-1)!}{(p-1)!k!} x^k, \qquad (7').$$

$$(1-x)^{-p} = 1 - \binom{-p}{1} x + .. = \sum (-1)^k \binom{-p}{k} x^k = \sum \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} x^k, \qquad (8').$$

$(5')$, $(7')$ знакочередующиеся ряды, $(6'), (8')$ ряды постоянных (положительных или отрицательных) знаков.

Всегда имеет место неравенство $(1+x)^p < (1+x)^{c+1}$, где *с* целая часть степени *p*. Правая часть неравенства конечная величина. То есть $(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + ..$ ограничено конечной величиной не зависимо от того какое значение принимает *х*, то есть не зависимо от сходимости или расходимости ряда. При любом значении x правая часть, рассматриваемого выражения, всегда равна левой части. Доказательство справедливости биноминального разложения, как и ряда Тейлора, так же не накладывает ограничения на величину переменной или аргумента. Эти доказательства строго констатируют равенство суммы ряда значению выражения (функции), образующей биноминальный ряд, без всяких дополнительных ограничений на значения *х* . Факт неограниченности, замкнутости и конечности числовой оси ставит всё на свои места и уравнивают важность и значимость для науки как сходящихся так и расходящихся рядов, а так же подтверждает принципы Эйлера о сумме всякого ряда не смотря на сходимость или расходимость его. То есть биноминальные ряды $(5)-(8)$ и $(9')-(12')$ не зависимо от их сходимости и расходимости всегда имеют суммы равные значениям выражений образующих эти ряды, т.е. значениям выражений расположенным в данном случае в левых частях этих формул.

Теорема 2. *Биноминальные коэффициенты для произвольной степени* $p \notin N$ *подчиняются основным законам биноминальных коэффициентов для натуральной степени* $n(n \in N)$.

Доказательство.

Пределы выражений $(5')-(8')$ при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1}(1+x)^p = \lim_{x\to 1}\sum \binom{p}{k} x^k$$

отсюда:

$$2^p = 1 + \binom{p}{1} + ..\binom{p}{k}.. = \sum \binom{p}{k} = \sum \frac{p!}{(p-k)!k!}* \qquad (9)$$

сходится (ряд знакопеременный и легко проверяется формулой (3).)

Замечание. Выражения, помеченные звёздочками, отсутствуют в математических базах.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^p = \lim_{x\to 1}\sum (-1)^k \binom{p}{k} x^k$$ отсюда:

$$0 = 1 - \binom{p}{1} + ..(-1)^k \binom{p}{k} \pm .. = \sum (-1)^k \binom{p}{k} = \sum (-1)^k \frac{p!}{(p-k)!k!}* \qquad (10)$$ ряд сходится

$$\lim_{x\to 1}(1+x)^{-p} = \lim_{x\to 1}\sum \binom{-p}{k} x^k$$ отсюда:

$$2^{-p} = 1 + \binom{-p}{1} + .. + \binom{-p}{k} + .. = \sum \frac{(-1)^k (p+k-1)!}{(p-1)!k!}* \qquad (11)$$

Этот ряд сходится при $p \in (0,1)$, при $p > 1$ расходится, но имеет регулярную сумму 2^{-p}

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{-p} = \lim_{x\to 1}\sum (-1)^k \binom{-p}{k} x^k$$

$$\infty = 1 - \binom{-p}{1} + \binom{-p}{2} - .. = \sum (-1)^k \binom{-p}{k} = \sum \frac{p(p+1)..(p+k-1)}{k!} = \sum \frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!} = \sum \frac{(-1)^k (-p)!}{(-p-k)!k!}.$$

Расходится всегда, ибо значение выражения образующего его бесконечно.

Последовательно суммируя и вычитая левые и правые части (9), (10) получим:

$$2^{p-1} = 1 + \binom{p}{2} + \binom{p}{4} + .. + \binom{p}{2k} + .. = \frac{p!}{(p-2k)!(2k)!}*,$$

$$2^{p-1} = \binom{p}{1} + \binom{p}{3} + .. + \binom{p}{2k+1} + .. = \frac{p!}{(p-2k-1)!(2k+1)!}*$$

$$1 + \binom{p}{3} + \binom{p}{6} + .. = \sum \binom{p}{3k} = \sum \frac{p!}{(p-3k)!k!} = 1/3(2^p + 2\cos p\pi/3)* \qquad (12)$$

$$1 + \binom{p}{4} + \binom{p}{8} + .. = \sum \binom{p}{4k} = \sum \frac{p!}{(p-4k)!k!} = 1/2(2^{p-1} + 2^{p/2}\cos p\pi/4)* \qquad (13)$$

Суммы биноминальных коэффициентов произвольных степеней рядов (12), (13) и другие подобные суммы проверены эмпирически.

Таким образом, суммы биноминальных коэффициентов произвольной степени соответствуют суммам биноминальных коэффициентов для натуральных степеней, полный перечень которых приводится в справочнике [7] с. 17, 18.

Проведём тестирование рядов (9) – (11). Положим в (9) $p = 1.7$, получим числовой ряд:

$$2^{1.7} = 1 + \binom{1.7}{1} + \binom{1.7}{2} + .. + \binom{1.7}{k} + .. = \sum \frac{1.7!}{(1.7-k)!(k)!}$$.

Частные суммы: $s_{10} \approx 3,249444, s_{12} \approx 3.249271, s_{14} \approx 3,24180$. Из последовательности частных сумм видно, что с ростом чётных индексов этих сумм их значения неуклонно приближаются к значению $2^{1.7} \approx 3.249001$ с избытком, а частные суммы с ростом нечётных индексов неуклонно приближается к значению $2^{1.7}$ с недостатком (проверено).

Положим в (10) $p = \pi$

$$0 = 1 - \binom{\pi}{1} + ..(-1)^k \binom{\pi}{k} .. = \sum (-1)^k \binom{\pi}{k} = \sum (-1)^k \frac{\pi!}{(\pi-k)!k!}$$

Частные суммы:

$$s_0 = 1, s_1 \approx -2,141593, s_2 \approx 1,224132, s_3 \approx -0,057695, s_4 \approx -0,0123814, s_5 = -0,004602,$$
$$s_6 = -0,002192, ..., s_{100} = -0,0000001689, ...$$.

Т.е частные суммы последовательно стремятся к нулю

Положим в (11) $p = 1$ получим колеблющийся числовой ряд:

$1 - 1 + 1 - 1 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1/2$ регулярная сумма по Абелю, подтверждённая выведенной выше формулой (3), согласуется (смотри [5], с. 33 и [6], с. 15.).

Положим в (11) $p = 2$, получим расходящийся ряд

$1 - 2 + 3 - ... + (-1)^{k+1} k \pm .. = \sum (-1)^k (k+1) = 1/4,$ - регулярная сумма по Абелю и Борелю [8], подтверждённая ф. (4), а так же см. [5], с. 56 и [6], с. 15.

Последние два ряда были рассмотрены выше.

Ряд (11) сходится при $p \in (0,1)$ и расходится при $p \geq 1$ с регулярной суммой 2^{-p}

Положив $p = 1.5, \quad 2^{-p} = 2^{-1.5} \approx 0.35355$ расходится) применив последовательно формулу (3) получим следующую последовательность частных сумм:

$s_1' = 0.25; s_2' = 0.34375; s_3' = 0.35156; s_4' \approx 3,530; s_5' \approx 3.5339$. То есть происходит уверенное приближение к контрольному значению $2^{-1.5} \approx 0.35355$

Если в(11) *P целое*, то ф. (3) даёт конечный результат, равный значению выражения образующего этот ряд то есть $1/2^p$

Положив в (11) $p = 0.5, \quad 2^{-0.5} \approx 0.7071$. Последовательность первых семи частных сумм: $1, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{107}{128}, \frac{151}{256}, \frac{835}{1024}$. Подставим в ф.(3)

$\frac{1}{2^6}(1 + 6\frac{1}{2} + 15\frac{7}{8} + 20\frac{9}{16} + 15\frac{107}{128} + 6\frac{151}{256} + \frac{835}{1024}) = 0.7073$, т.е семь первых частных сумм дают результат верный до трёх знаков после запятой. Обычным суммированием такой точности можно достигнуть только алгебраическим суммированием 600 тысяч членов ряда. Это говорит о исключительной эффективности ф. (3) для медленно и весьма медленно сходящихся рядов.

Уместно заметить, что ряды(11) при произвольной величине *p*, вне зависимости от их сходимости или расходимости их, суммируются по формуле (3) и их сумма всегда равна $1/2^p$. При этом в частности при целых *p* этот результат согласуется с регулярными суммами по методам: Абеля, Бореля и Дирихле. Примеры:

$p=1$ ряд (15) примет вид $1-1+1-..=\sum(-1)^k=1/2^1$, согласуется с методами Абеля, Бореля.
$p=2,\quad 1-2+3-..=\sum(-1)^k k=1/2^2$ - согласуется с методами Абеля, Бореля [8]
$p=3,\quad 1-3+6-..=\sum\frac{((-1)^\wedge k)(2+k)!}{2!k!}=1/2^3$
$p=4,\quad 1-4+10-20+..=\sum\frac{((-1)^\wedge k)(3+k)!}{3!k!}=1/2^4$ -при $p\geq 3$, регулярные суммы согласуются с методом Дирихле [8].

Примечание. Значения частных сумм в этом случае и все проверочные расчёты в будущем выполнены (и будут выполняться впредь) с помощью вычислительной "машины знаний" Wolfram| Alpha.

Следует отметить что

$$(1-x)^{-p}=1+\binom{-p}{1}x+..+\binom{-p}{k}x^k+..=\sum\frac{p(p+1)..(p+k-1)}{k!}x^k=\sum\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}x^k$$.

- расходится всегда, значение выражения образующего этот ряд при $x=1$ равно бесконечности $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{-n}=\frac{1}{0}=\infty, n\in N$. Однако ряд по методу Дирихле [8] имеет множество регулярных конечных сумм в зависимости от величины *p*.

Из $(5')$ следует:

$$(t+1)^p+(1+t^{-1})^p=1+\binom{p}{1}t+\binom{p}{2}t^2..+1+\binom{p}{1}t^{-1}+\binom{p}{2}t^{-2}+..=$$

$$2+\binom{p}{1}(t+t^{-1})+\binom{p}{2}(t^2+t^{-2})+..=2(1+\binom{p}{1}\mathrm{ch}(\ln(t))+\binom{p}{2}\mathrm{ch}(2\ln(t))+..)$$

$$(1+t)^p-(1+t^{-1})^p=\binom{p}{1}(t-t^{-1})+\binom{p}{2}(t^2-t^{-2})+..=2(\binom{p}{1}\mathrm{sh}\ln(t))+\binom{p}{2}\mathrm{sh}\,2\ln t)+..)$$

положим $x=\ln(t), t=e^x$:

$$1+\binom{p}{1}\mathrm{ch}x+\binom{p}{2}\mathrm{ch}2x+..=\sum\binom{p}{k}\mathrm{ch}(kx)=\tfrac{1}{2}(e^x+1)^p(e^{xp}+1)e^{-xp}\,*$$

$$\binom{p}{1}\mathrm{sh}(x)+\binom{p}{2}\mathrm{sh}(2x)+..=\sum\binom{p}{k}\mathrm{sh}(kx)=\tfrac{1}{2}(e^x+1)^p(e^{xp}-1)e^{-xp}*, k=1..\infty$$

положим $x=1$:

$$1+\binom{p}{1}\mathrm{ch}1+\binom{p}{2}\mathrm{ch}2+..=\sum\binom{p}{k}\mathrm{ch}k=\tfrac{1}{2}(e+1)^p(e^p+1)e^{-p}\,*$$

$$\binom{p}{1}\mathrm{sh}1+\binom{p}{2}\mathrm{sh}2+..=\sum\binom{p}{k}\mathrm{sh}k=\tfrac{1}{2}(e+1)^p(e^p-1)e^{-p}*, k=1..\infty$$

.

Таким же образом из $(7'),(8')$ следует:

$$1+\binom{-p}{1}\mathrm{ch}(x)+\binom{-p}{2}\mathrm{ch}(2x)-..=(1+e^{px})/2(1+e^x)^p*,$$

$$1-\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}(2x)-..=1/2*,\quad p=1,$$

$$1-\mathrm{ch}1+\mathrm{ch}2-..=1/2*,\quad p=1, x=1,$$

$$\binom{-p}{1}\mathrm{sh}\,x+\binom{-p}{2}\mathrm{sh}\,2x+..=-(e^{px}-1)/2(1+e^x)^p\,*$$

$$\mathrm{sh}\,x-\mathrm{sh}\,2x+..=(e^x-1)/2(e^x+1)=(1/2)\mathrm{cth}(x/2)*, p=1,$$

$\mathrm{sh}1-\mathrm{sh}2+..=(e-1)/2(e+1)=(1/2)\mathrm{th}(1/2), p=1, x=1,$ [8] Борель, Дерихле.

$1+\frac{p}{1!}\mathrm{ch}x+\frac{p(p+1)}{2!}\mathrm{ch}2x+..=\sum\frac{p(p+1)..(p+k-1)}{k!}\mathrm{ch}xk=(1-e^{px})/2(1-e^{x})*$

$\frac{p}{1!}\mathrm{sh}x+\frac{p(p+1)}{2!}\mathrm{sh}2x+..=\sum\frac{p(p+1)..(p+k-1)}{k!}\mathrm{sh}xk=(1+e^{px})/2(1-e^{x})=-(1+e^{px})/2(e^{x}-1)*$

$p=1$ получим:

$1+\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}2x+..=1/2$ согласуется с Дирихле, [8]

или при $x=1$

$\mathrm{ch}1+\mathrm{ch}2+..=-1/2$ [5], с.35.

$\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}2x+..=-(e^{x}+1)/2(e^{x}-1)=-\frac{1}{2}\mathrm{cth}(x/2)$ согл. с Дирихле[8].

.

$1+\frac{p}{1!}\mathrm{ch}x+\frac{p(p+1)}{2!}\mathrm{ch}2x+..=\sum\frac{p(p+1)..(p+k-1)}{k!}\mathrm{ch}xk=(1-e^{px})/2(1-e^{x})*$

$\frac{p}{1!}\mathrm{sh}x+\frac{p(p+1)}{2!}\mathrm{sh}2x+..=\sum\frac{p(p+1)..(p+k-1)}{k!}\mathrm{sh}xk=(1+e^{px})/2(1-e^{x})=-(1+e^{px})/2(e^{x}-1)*$

$p=1$ получим:

$1+\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}2x+..=1/2$ согласуется с Дирихле, [8]

или при $x=1$

$\mathrm{ch}1+\mathrm{ch}2+..=-1/2$ согласуется [5], с.35.

$\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}2x+..=-(e^{x}+1)/2(e^{x}-1)=-\frac{1}{2}\mathrm{cth}(x/2)$ согл. с Дирихле[8].

.

2.3 Функциональные ряды на основе биноминальных разложений

Заменим в (5) произвольные члены бинома элементарными функциями: $a=F, b=f$, где подразумевается $F=F(x), f=f(x)$. Это сделано для сокращения нагромождения в формулах. (5) примет вид:

$$(F+f)^{p}=\sum\binom{p}{k}F^{p-k}f^{k}=F^{p}+\binom{p}{1}F^{p-1}f+\binom{p}{2}F^{p-2}f^{2}+..+$$
$$\binom{p}{k}F^{p-k}f^{k}.., p\notin N, p\in R, F>f \qquad (14).$$

Производные от левой и правой частей (14)

$$[(F+f)^{p}]'=pF^{p-1}F'+\tfrac{p}{1!}(F^{p-1}f'+(p-1)F^{p-2}fF')+$$
$$\tfrac{p(p-1)}{2!}(F^{p-2}2f'+(p-2)F^{p-3}f^{2}F')+...=p[(F^{p-1}+\tfrac{(p-1)}{1!}F^{p-2}f+...)F'+$$
$$(F^{p-1}+\tfrac{(p-1)}{1!}F^{p-2}f+...)f'=p(F+f)^{p-1}(F'+f')$$
$$[(F+f)^{p}]'=p(F+f)^{p-1}(F'+f').$$

Производные левой и правой части (14) равны между собой. Это значит, что функциональные ряды, полученные посредством биноминального разложения, *можно почленно дифференцировать и выполнять обратное ему действие – интегрирование*.

2.3.1. Биноминальный дифференциал

$$x^m(a+bx^n)^p = a^p\left(x^m + \binom{p}{1}\tfrac{b}{a}x^{m+n} + \binom{p}{2}\left(\tfrac{b}{a}\right)^2 x^{m+2n} + ..\right) = a^p \sum \binom{p}{k}\left(\tfrac{b}{a}\right)^k x^{m+kn} *.$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = a^p \sum \binom{p}{k}\left(\tfrac{b}{a}\right)^k \tfrac{1}{m+1+kn} x^{m+1+kn} + c.,* \qquad (15)$$

$$x \le \left(\tfrac{a}{b}\right)^{1/n},$$

$$\int_0^{(\sqrt[n]{a/b})} x^m(a+bx^n)^p dx = a^p\left(\tfrac{a}{b}\right)^{(m+1)/n} \sum \binom{p}{k} \tfrac{1}{m+1+kn},$$

$$p \notin N, a \wedge b \wedge m \wedge n \in R^{\pm}, kn+m+1 \ne 0.$$

при $x > \left(\tfrac{a}{b}\right)^{1/n}$ разложение в ряд ведём в обратном порядке:

$$x^m(bx^n+a)^p = a^p x^m\left(\tfrac{b}{a}x^n+1\right)^p = a^p x^m\left(\left(\tfrac{b}{a}\right)^p x^{np} + \binom{p}{1}\left(\tfrac{b}{a}\right)^{p-1} x^{n(p-1)} + \binom{p}{2}\left(\tfrac{b}{a}\right)^{p-2} x^{n(p-2)} + ..\right) =$$

$$a^p\left(\left(\tfrac{b}{a}\right)^p x^{m+np} + \binom{p}{1}\left(\tfrac{b}{a}\right)^{p-1} x^{m+n(p-1)} + \binom{p}{2}\left(\tfrac{b}{a}\right)^{p-2} x^{m+n(p-2)} + ..\right) = a^p\left(\tfrac{b}{a}\right)^p\left(x^{m+np} + \binom{p}{1}\left(\tfrac{a}{b}\right) x^{m+n(p-1)}\right.$$

$$\left.+ \binom{p}{2}\left(\tfrac{a}{b}\right)^2 x^{m+n(p-2)} + ..\right) = b^p \sum \binom{p}{k}\left(\tfrac{a}{b}\right)^k x^{m+n(p-k)} *$$

$$\int x^m(bx^n+a)^p dx = b^p \sum \binom{p}{k}\left(\tfrac{a}{b}\right)^k \tfrac{1}{m+1+n(p-k)} x^{m+1+n(p-k)} + c *., \qquad (16)$$

.

Исчисление определённых интегралов с любой степенью точности. Если пределы интегрирования расположены: в промежутке $(0,(a/b)^{1/n})$, то почленное интегрирование выполняется по (15), в промежутке $((a/b)^{1/n}, t), t > (a/b)^{1/n}$ интегрирование выполняется по (16), если нижний предел интегрирования t_0 меньше $(a/b)^{1/n}$, а верхний t больше $(a/b)^{1/n}$, то почленное интегрирование исчисляется из двух частей (интегралов) I_1 и I_2. Первый интеграл исчисляется по (15) с пределами интегрирования $\uparrow {}_{t_0}^{\sqrt[n]{a/b}}$ - второй по (16) с пределами ${}_{\sqrt[n]{a/b}}^{t}$. Окончательный результат $I = I_1 + I_2$.

Пример.

Положим $m = \pi, n = e, a = 3.7, b = 2.8, p = 1.7, t = 1.5 > (a/b)^{1/n} = (3.7/2.8)^{1/e} \approx 1.108$ поэтому исчисление состоит из 2 – х частей:

$$I_1 = \int_0^{(a/b)^{1/n}} x^m(a+bx^n)^p dx = \int_0^{\left(\frac{37}{28}\right)^{1/e}} x^{\pi}(3.7+2.8x^e)^{1.7} dx =$$

$$3.7^{1.7}\left(\tfrac{37}{28}\right)^{(\pi+1)/e} \sum \tfrac{1.7!}{(1.7-k)!k!}\tfrac{1}{\pi+1+ke} \approx 7.7401$$

По формуле (15)

$$I_2 = \int_{(a/b)^{1/n}}^{t} x^m(bx^n+a)^p dx = \int_{(37/28)^{1/e}}^{1.5} x^{\pi}(2.8x^e+3,7)^{1.7} dx =$$

$$2.8^{1.7}\sum \tfrac{1.7!}{(1.7-k)!k!}\left(\tfrac{37}{28}\right)^k \tfrac{1.5^{\pi+1+e(1.7-k)}}{\pi+1+e(1.7-k)} - 3.7^{1.7}\left(\tfrac{37}{28}\right)^{(\pi+1)/e} \sum \tfrac{1.7!}{(1.7-k)!k!}\tfrac{1}{\pi+1+e(1.7-k)} =$$

$$52.9510 - 6.6246 = 46.3264.$$

. По ф. (16).

То есть:

$$\int_0^{1.5} x^m(a+bx^n)^p dx = I_1 + I_2 = 7.7401 + 46.3264 = 54.0665$$

.

Результат, полученный почленным интегрированием рядов, соответствует значению вычисленному с помощью компьютерной системы, которая исчисляет подобные интегралы с применением табличных гипергеометрических функций.

2.3.2. Биноминальное разложение выражений, содержащих тригонометрические (гиперболические) функции и их интегралы

Теорема 2. *Выражения* $\sin^q x, \cos^q x, \mathrm{tg}^q x, \sin^q(x)\cdot\cos^r(x)$ *и их интегралы разлагаются в функциональные биноминальные ряды по целым степеням тригонометрических функций*.

Действительно используя тригонометрические соотношения, получим:

$$\sin^{2q} x = (1-\cos^2 x)^q = 1 - \binom{q}{1}\cos^2 x + \binom{q}{2}\cos^4 x - .. = \sum (-1)^k \binom{q}{k}\cos^{2k} x*,$$
$$x \in (0,\pi), q \in \pm\mathbb{R}$$
$$\cos^{2q} x = (1-\sin^2 x)^q = \sum (-1)^k \binom{q}{k}\sin^{2k} x*, x \in (-\pi/2, \pi/2),$$
$$\cos^{2q} x = (1+\mathrm{tg}^2 x)^{-q} = \sum \binom{-q}{k}\mathrm{tg}^{2k} x*$$
$$\mathrm{tg}^{2q} x = \cos^{-2q} x(1-\cos^2 x)^q = \cos^{-2q} x(1 - \binom{q}{1}\cos^2 x + \binom{q}{2}\cos^4 x - .. =$$
$$\sum (-1)^k \binom{q}{k}\cos^{2k-2q} x*,$$
$$x \in (0, \pi/2).$$
.

$$\sin^q x\cos^{2r} x = \sin^q x(1-\sin^2 x)^{2r} = \sin^q x(1 - \binom{r}{1}\sin^2 x + .. = \sum (-1)^k \binom{r}{k}\sin^{2k+q} x*,$$
$$r \wedge q \in \pm\mathbb{R}, x \in (0, \pi/2),$$
или: $\sin^{2r} x\cos^q x = \cos^q x(1-\cos^2 x)^r = \sum (-1)^k \binom{r}{k}\cos^{2k+q} x*, x \in (0, \pi/2),$

или:
$$\sin^q x\cos^r x = \mathrm{tg}^q x(1+\mathrm{tg}^2 x)^{-(q+r)/2} = \sum \binom{-p}{k}\mathrm{tg}^{2k+q} x*, x \in (0, \pi/4)$$
$$= \sum \binom{-p}{k}\mathrm{ctg}^{2(p+k)-q} x*, x \in (\pi/4, \pi/2) \quad p = (q+r)/2.$$

Комбинации знаков q, r любая (произвольная) за исключением случаев неопределённости.

Учитывая, параллелизм формул обычной и гиперболической геометрий, подобные гиперболические функции разлагаются в биноминальные функциональные ряды по той же схеме, с учётом соотношений: $\mathrm{ch}\, x = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}, \mathrm{sh}\, x = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1}, \mathrm{ch}\, x = 1/\sqrt{1-\mathrm{th}^2 x}$ и других.
Есть и другой альтернативный вариант разложения, например:
$$\mathrm{ch}^p(x) = \tfrac{1}{2^p}(e^x + e^{-x})^p = \tfrac{e^{px}}{2^p}(1+e^{-2x})^p = \tfrac{e^{px}}{2^p}(1 + \binom{p}{1}e^{-2x} + \binom{p}{2}e^{-4x} + ..) = \tfrac{1}{2^p}\sum \binom{p}{k} e^{(p-2k)x}.$$
..

Вариант будет позже рассмотрен более подробно.

Почленное интегрирование таких функций:
$$\int \sin^{2p+1} x dx = -\int \sin^{2p} x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^p d(\cos x) =$$
$$-\int (1 - \binom{p}{1}\cos^2 x + \binom{p}{2}\cos^4 x - ..)d(\cos x) = -\sum (-1)^k \binom{p}{k}\tfrac{1}{2k+1}\cos^{2k+1} x * + c. \qquad (a)$$
$$p \in \mathbb{R}^{\pm}, x \in (0, \pi).$$
или:
$$\int \sin^q x dx = \int \sin^q x(1-\sin^2 x)^{-0.5} d(\sin x) = \int \sin^q x(1 - \binom{-0.5}{1}\sin^2 x + \binom{-0.5}{2}\sin^2 x - ..)d(\sin x) =$$
$$\tfrac{1}{q+1}\sin^{q+1} x - \binom{-0.5}{2}\tfrac{1}{q+3}\sin^{q+3} x + .. + c. = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-0.5}{k}\tfrac{1}{q+2k-1}\sin^{q+2k-1} x + c. =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}\tfrac{1}{q+2k-1}\sin^{q+2k-1} x + c.$$
из (a) следует:
$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2c+1} x dx = \sum (-1)^k \binom{c}{k}\tfrac{1}{2k+1} = \sum (-1)^k \tfrac{c!}{(2k+1)(c-k)!k!}* \text{ (проверено)}$$
.

По аналогии можно проинтегрировать с любой степенью произвольную степень косинуса (не приводится)

$$\operatorname{tg}^p x dx = \operatorname{tg}^p x \cos^2 x d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^p x(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-1} d(\operatorname{tg} x) = (\operatorname{tg}^p x - \operatorname{tg}^{p+2} x + \operatorname{tg}^{p+4} x - ..) d(\operatorname{tg} x)$$

$$\int \operatorname{tg}^p x dx = \tfrac{1}{p+1}\operatorname{tg}^{p+1} x - \tfrac{1}{p+3}\operatorname{tg}^{p+3} x + .. + c. = \sum (-1)^k \tfrac{1}{p+2k+1}\operatorname{tg}^{p+2k+1} x * + c.,$$

$$x \in (0, \pi/4),\ p > -1,\ p \neq -(2k+1)$$

$$\int \operatorname{tg}^p x dx = \int \operatorname{tg}^p x (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{-1} d(\operatorname{tg} x) = \int (\operatorname{tg}^{p-2} x - \operatorname{tg}^{p-2} x + ..) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$\tfrac{1}{p-1}\operatorname{tg}^{p-1} x - \tfrac{1}{p-3}\operatorname{tg}^{p-3} x + .. + \mathrm{c}. = \sum (-1)^k \tfrac{1}{p-(2k+1)}\operatorname{tg}^{p-(2k+1)} x * + c.,$$

$$x \in (\pi/4, \pi/2),\ p < 1,$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^p x dx = \sum (-1)^k \tfrac{1}{p+2k+1} *,\ p > -1$$

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x dx = -\sum (-1)^k \tfrac{1}{p-(2k+1)} *,\ p < 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x dx = I_1 + I_2 = \sum (-1)^k \tfrac{1}{2k+1+p} + \sum (-1)^k \tfrac{1}{(2k+1)-p} = \sum (-1)^k \tfrac{2(2k+1)}{(2k+1)^2 - p^2} *,\ -1 < p < 1. \qquad \text{(A)}$$

Интегрирование произведения $\sin^p x \cdot \cos^p x$.

Разложение этих функций и их интегралов выполняется с использованием следующих тригонометрических выражений:

$$\sin^p x \cos^q x = \sin^p x (1 - \sin^2 x)^{q/2} = \cos^q x (1 - \cos^2 x)^{p/2} = \operatorname{tg}^p x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{(p+q)/2} =$$

$$\operatorname{ctg}^q x (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{(p+q)/2}.$$

Например

$$\sin^p x \cos^q x = \sin^p x (1 - \sin^2 x)^{q/2} = \sin^p x - \binom{q/2}{1}\sin^{p+2} x + \binom{q/2}{2}\sin^{p+4} x - ..$$

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \tfrac{1}{p+1}\sin^{p+1} x - \tfrac{1}{p+3}\binom{q/2}{1}\sin^{p+3} x + .. = \sum (-1)^k \tfrac{1}{p+2k+1}\binom{q/2}{k}\sin^{p+2k+1} x + c. *$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx = \sum (-1)^k \tfrac{1}{p+2k+1}\binom{q/2}{k} *,\ p \geq -1.$$

.

Степени подынтегрального выражения и их знаки могут быть произвольными, но не должны приводить к неопределённости. Понятно, что этот же интеграл таким же образом может быть разложен в ряд через косинусы, тангенсы (котангенсы).

Теорема 3. *Произвольные степени* $p \in R^{\pm}, p \notin N$ *тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов разлагаются в биноминальный ряд через функции, аргументы которых, являются арифметической прогрессией с разностью равной* $|2|x$ *т.е. бесконечной последовательностью вида* $px, (p \pm 2)x, .., (p \pm 2k)x, ..$.

То есть этим утверждаем, что конечные формулы выражения степеней ($n \in \mathbb{N}$) тригонометрических и гиперболических кратных аргументов (дуг) (смотри [7], с 39, 40) являются частным случаем данной теоремы.

Доказательство:

для тригонометрических функций

Докажем для косинуса

$$\cos^p x = \tfrac{1}{2^p}(e^{ix} + e^{-ix})^p = \tfrac{1}{2^p}(e^{ixp} + \binom{p}{1} e^{ix(p-2)} + .. + \binom{p}{k} e^{ix(p-2k)} + ..) = \tfrac{1}{2^p}((\cos px + \binom{p}{1}\cos(p-2)x + ... +$$

$$\binom{p}{k}\cos(p-2k)x + ..) + i((\sin px + \tfrac{p}{1!}\sin(p-2)x + ... + \binom{p}{k}\sin(p-2k)x + ..) =$$

$$\tfrac{1}{2^p}(\sum \binom{p}{k}\cos(p-2k)x + i\sum \binom{p}{k}\sin(p-2k)x)*,$$

$$x \in (-\infty, \infty),\ p \in \mathbb{R}.$$

.

$\uparrow$ в комплексной области $\cos x < 0, x \in (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2})$.

В действительной области $\cos x > 0,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$\cos^p x = \frac{1}{2^p}\sum\binom{p}{k}\cos(p-2k)x*$ проверено (17)

$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\sin(p-2k)x = 0.$ * проверено

Таким же образом:

В комплексной области:

$$\cos^{-p} x = 2^p\left(\sum\binom{-p}{k}\cos(p+2k)x - i\sum\binom{-p}{k}\sin(p+2k)x\right) = 2^p\left(\sum(-1)^k\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}\cos(p+2k)x - i\sum(-1)^k\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}\sin(p+2k)x*, x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\right.$$

.

$$\cos^{-p} x = 2^p\left(\sum\binom{-p}{k}\cos(p+2k)x - i\sum\binom{-p}{k}\sin(p+2k)x\right) = 2^p\left(\sum(-1)^k\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}\cos(p+2k)x - i\sum(-1)^k\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}\sin(p+2k)x*, x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\right.$$

.

В действительной области

$$\cos^{-p} x = 2^p\sum\binom{-p}{k}\cos(p+2k)x*, \qquad (18)$$

$$\sum\binom{-p}{k}\sin(p+2k)x = 0*, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

.

Пример. Положив в (17) $p = 1, x = \pi/5$, получим:

$$\sum\binom{-p}{k}\cos(p+2k)x = \sum(-1)^k\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}\cos(p+2k)x = 2^{-p}\cos^{-p} x$$

$$\cos\pi/5 - \cos 3\pi/5 + .. + (-1)^k\cos(2k+1)\pi/5 \pm .. = \sum(-1)^k\cos((1+2k)\pi/5) = 2^{-1}\cos^{-1}\pi/5 \approx 0.618034.$$

Последовательность 10 частных сумм $s_0 - s_{10}$:

$$s_0 \approx 0.809017, s_1 \approx 1.118034, s_2 \approx 0.118034, s_3 \approx 0.427051, s_4 \approx 1.236068, s_5 \approx 0.427051,$$
$$s_6 \approx 0.118034, s_7 \approx 1.118034, s_8 \approx 0.809017, s_9 = 0.$$

Составим последовательность следующих 10 частных сумм:

$$s_{10} \approx 0.809017, s_{11} \approx 1.118034, s_{12} \approx 0.118034, s_{13} \approx 0.427051, s_{14} \approx 1.236068, s_{15} \approx 0.427051,$$
$$s_{16} \approx 0.118034, s_{17} \approx 1.118034, s_{18} \approx 0.809017, s_{19} = 0.$$

.

Видно, что эти две серии имеют зеркально равные значения. Если рассмотреть следующую серию, то можно убедиться, что её значения так же зеркально равны значениям первых двух серий (проверено).

Средние значения каждой серии частных сумм:

$$\frac{s_0+s_1+..s_9}{10} = \frac{s_{10}+s_{11}+..s_{19}}{10} = \frac{s_{10n}+s_{10n+1}+..+s_{10n+9}}{10} = (2\cos(2k+1)\pi/5)^{-1} \approx 0.618034$$

Понятно, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{10n}+s_{10n+1}+..+s_{10n+9}}{10} = (2\cos(2k+1)\pi/5)^{-1} \approx 0.618034$$

.

То есть обобщённая сумма по методу Чезаро равна значению того выражения, которое разворачивает ряд.

Докажем то же для синуса

$$(i\sin x)^p = i^p\sin^p x = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^p\sin^p x = (\cos\frac{p\pi}{2} + i\sin\frac{p\pi}{2})\sin^p x =$$
$$\cos\frac{p\pi}{2}\sin^p x + i\sin\frac{p\pi}{2}\sin^p x$$

.

С другой стороны:

$$(i\sin x)^p = (i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^p = \frac{1}{2^p}(e^{ix}-e^{-ix})^p = \frac{1}{2^p}(e^{ipx} - \binom{p}{1}e^{i(p-2)x} + .. + (-1)^k\binom{p}{k}e^{i(p-2k)x} - ...) =$$
$$\frac{1}{2^p}((\cos px - \binom{p}{1}\cos(p-2)x + .. + (-1)^k\binom{p}{k}\cos(p-4)x - ...) + i(\sin px - \binom{p}{1}\sin(p-2)x + .. +$$
$$(-1)^k\binom{p}{k}\sin(p-2k)x - ...)) = \frac{1}{2^p}\sum(-1)^k\binom{p}{k}\cos(p-2k)x + i\frac{1}{2^p}\sum(-1)^k\binom{p}{k}\sin(p-2k)x, k = 0..\infty$$

.

Или:

$$\cos\frac{p\pi}{2}\sin^p x + i\sin\frac{p\pi}{2}\sin^p x = \frac{1}{2^p}\sum(-1)^k\binom{p}{k}\cos(p-2k)x + i\frac{1}{2^p}\sum(-1)^k\binom{p}{k}\sin(p-2k)x^*.$$

Отсюда в действительной области:

$$\sin^p x = \frac{1}{2^p\cos(\frac{p\pi}{2})}\sum(-1)^k\binom{p}{k}\cos(p-2k)x^*$$

$$\sin^p x = \frac{1}{2^p\sin(\frac{p\pi}{2})}\sum(-1)^k\binom{p}{k}\sin(p-2k)x^* \quad x\in(0,\pi)$$ проверены.

Отсюда:

$$\sum(-1)^k\binom{p}{k}(\sin(p-2k)x = \operatorname{tg}(p\pi/2)\sum(-1)^k\binom{p}{k}(\cos(p-2k)x^* \text{ или}$$

$$\frac{\sum(-1)^k\binom{p}{k}(\sin(p-2k)x}{\sum(-1)^k\binom{p}{k}(\cos(p-2k)x} = \operatorname{tg}(p\pi/2)$$

То же самое для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}^{\pm p}x = 2^{-p}(e^x+e^{-x})^{\pm p} = 2^{\mp p}\sum\binom{p}{k}e^{(\pm p-2k)x} = 2^{\mp p}\sum\binom{\pm p}{k}(\operatorname{ch}((\pm p-2k)x)+\operatorname{sh}(\pm p-2k)x).^*$$

$$\operatorname{sh}^{\pm p}x = 2^{\mp p}(e^x-e^{-x})^{\pm p} = 2^{\mp p}\sum(-1)^k\binom{\pm p}{k}e^{(\pm p-2k)x} = 2^{-p}\sum(-1)^k\binom{\pm p}{k}(\operatorname{ch}(\pm p-2k)x)+\operatorname{sh}(\pm p-2k)x)^*.$$

$p\in\mathbb{R}$

Теорема 4. *Тригонометрические и гиперболические функции аргументов* $px\ (p\notin N)$ *могут быть разложены в ряд через степени этих функций.*

Теорема является общим случаем для частных случаев когда $p\in\mathbb{N}$ полный перечень которых приведён в справочниках, например в [7], с.41, 42.

Доказательство

$$(\cos x + i\sin x)^p = \cos px + i\sin px$$

$$(\cos x + i\sin x)^p = \cos^p x + i\binom{p}{1}\cos^{p-1}x\sin x -$$

$$\binom{p}{2}\cos^{p-2}x\sin^2 x - i\binom{p}{3}\cos^{p-3}x\sin^3 x + + - - .. =$$

$$(\cos^p x - \binom{p}{2}\cos^{p-2}x\sin^2 x + \binom{p}{4}\cos^{p-4}x\sin^4 x - \ldots) +$$

$$i(\binom{p}{1}\cos^{p-1}x\sin x - \binom{p}{3}\cos^{p-3}x\sin^3 x + \ldots)$$

Отсюда:

$$\cos px = \cos^p x - \binom{p}{2}\cos^{p-2}x\sin^2 x + .. = \sum(-1)^k\binom{p}{2k}\cos^{p-2k}x\sin^{2k}x^* =$$

$$\cos^p x\sum(-1)^k\binom{p}{2k}\operatorname{tg}^{2k}x^*, \quad x\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})$$

Или $\frac{\cos px}{\cos^p x} = \sum(-1)^k\binom{p}{2k}\operatorname{tg}^{2k}x$.

$$\frac{\cos px}{\cos^p x} = \sum(-1)^k\binom{p}{2k}\operatorname{tg}^{2k}x.$$

$$\sin px = \binom{p}{1}\cos^{p-1}x\sin x - \binom{p}{3}\cos^{p-3}x\sin^3 x + .. =$$

$$\sum(-1)^k\binom{p}{2k+1}\cos^{p-(2k+1)}x\sin^{2k+1}x^* = \cos^p x\sum(-1)^k\binom{p}{2k+1}\operatorname{tg}^{2k+1}x^*.$$

$$\frac{\sin px}{\cos^p x} = \sum(-1)^k\binom{p}{2k+1}\operatorname{tg}^{2k+1}x^*.$$

Таким же образом для гиперболических функций:

$$\operatorname{ch}px = \operatorname{ch}^p x + \binom{p}{2}\operatorname{ch}^{p-2}x\operatorname{sh}^2 x + .. = \sum \binom{p}{2k}\operatorname{ch}^{p-2k}x\operatorname{sh}^{2k}x$$

$$\operatorname{sh}px = \binom{p}{1}\operatorname{ch}^{p-1}x\operatorname{sh}x + \binom{p}{3}\operatorname{ch}^{p-3}x\operatorname{sh}^3 x + .. = \sum \operatorname{ch}^{p-(2k+1)}x\operatorname{sh}^{2k+1}x.$$

$$\operatorname{ch}px = \operatorname{ch}^{-p} x + \binom{-p}{2}\operatorname{ch}^{-(p+2)}x\operatorname{sh}^2 x + .. = \sum \binom{-p}{2}\operatorname{ch}^{-(p+2k)}x\operatorname{sh}^{2k}x$$

$$\operatorname{sh}(px) = \binom{-p}{1}\operatorname{ch}^{-(p+1)}x\operatorname{sh}x + \binom{-p}{3}\operatorname{ch}^{-(p+3)}x\operatorname{sh}^3 x + .. = \sum \binom{-p}{2k+1}\operatorname{ch}^{-(p+2k+1)}x\operatorname{sh}^{2k+1}x.$$

Сумма последовательности $\cos^{2p_1} x, \cos^{2p_2} x, \ldots, \cos^{2p_m} x,\ \ p_1, p_2, \ldots, p_m \in R^{\pm}$:

$$\cos^{2p_1} x + \cos^{2p_2} x + \ldots + \cos^{2p_m} x = (1 - \binom{p_1}{1}\sin^2 x + \binom{p_1}{2}\sin^4 x - \ldots + (-1)^k\binom{p_1}{k}\sin^{2k} x \pm \ldots) + (1 - \binom{p_2}{1}\sin^2 x +$$

$$\binom{p_2}{2}\sin^4 x - \ldots + (-1)^k\binom{p_2}{k}\sin^{2k} x \pm \ldots) + .. + (1 - \binom{p_m}{1}\sin^2 x + \binom{p_m}{2}\sin^4 x - \ldots + (-1)^k\binom{p_m}{k}\sin^{2k} x \pm ..) + \ldots =$$

$$m - (\binom{p_1}{1} + \binom{p_2}{1} + \ldots + \binom{p_m}{1})\sin^2 x + (\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + \ldots + \binom{p_m}{2})\sin^4 x - \ldots + (-1)^k(\binom{p_1}{k} + \binom{p_2}{k} + \ldots + \binom{p_m}{k})\sin^{2k} x + ..,$$

т.е. $\cos^{2p_1} x + \cos^{2p_2} x + \ldots + \cos^{2p_m} x = m + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\binom{p_1}{k} + \binom{p_2}{k} + \ldots + \binom{p_m}{k})\sin^{2k} x$*

$\cos x > 0, x \in (-\pi/2, \pi/2).$

При необходимости чётные степени синуса можно выразить по готовым формулам через функции кратных аргументов([7], с. 39 – 40]), что значительно облегчит почленное интегрирование правой части. Таким же образом можно разложить в ряд сумму последовательности $\sin^{2p_1} x, \sin^{2p_2} x, \ldots, \sin^{2p_m} x,\ \ p_1, p_2, \ldots, p_m \in R^{\pm}$ через чётные степени косинуса.

Используя степени известных тригонометрических соотношения:

$$(\cos(x-\alpha) + \cos(x+\alpha))^p = (2\cos\alpha)^p\cos^p x,$$

$$\frac{(\cos(x-\alpha) - \cos(x+\alpha))^p}{(\cos(x-\alpha) + \cos(x+\alpha))^p} = (\operatorname{tg}^p\alpha)\operatorname{tg}^p x, \qquad \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^p = \operatorname{tg}^p x, \quad \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)^{\pm p} = \operatorname{tg}^{2p}(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{x}{2})$$ и др.

можно почленно интегрировать эти функции с любой степени точности, например, с учётом (18) получим:

$$\int (\cos(x-\alpha) + \cos(x+\alpha))^p dx = \int (2\cos\alpha)^p\cos^p x dx =$$

$$\frac{1}{2^p}(2\cos\alpha)^p\int\sum\binom{p}{k}\cos(p-2k)x dx = \cos^p\alpha\sum\binom{p}{k}\frac{1}{p-2k}\sin(p-2k)x + c.^*,\ p - 2k \neq 0.$$

Или используя метод разложения произвольной степени косинуса в биноминальный ряд по степеням синуса (смотри выше) получим:

$$\int (\cos(x-\alpha) + \cos(x+\alpha))^p dx = \int (2\cos\alpha)^p\cos^p x dx = (2\cos\alpha)^p\sum(-1)^k\binom{q}{k}\frac{1}{2k+1}\sin^{2k+1} x + c.^*, q = (p-1)/2.$$

Т. е. получили два простых и алгоритмических варианта интегральных рядов для одного подынтегрального выражения.

Приведём ещё один пример интегрирования сложной функции, интегралы от которых не берут и не исчисляют компьютерные программы:

$$I = \int \frac{(\cos(x-\alpha) - \cos(x+\alpha))^p}{(\cos(x-\alpha) + \cos(x+\alpha))^p} dx = \int (\operatorname{tg}^p\alpha)\operatorname{tg}^p x dx.$$

Для интегрирования применяем серию формул (А).

$$\int \frac{(\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha))^p}{(\cos(x-\alpha)+\cos(x+\alpha))^p}dx = \int (\operatorname{tg}^p\alpha)\operatorname{tg}^p x dx = \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{1}{p+2k+1}\operatorname{tg}^{p+2k+1} x * + c.,$$

$x \in (0, \pi/4),\ p > -1$

$$\int \frac{(\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha))^p}{(\cos(x-\alpha)+\cos(x+\alpha))^p}dx = \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{1}{p-(2k+1)}\operatorname{tg}^{p-(2k+1)} x *, + c.,$$

$x \in (\pi/4, \pi/2),\ p < 1$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{(\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha))^p}{(\cos(x-\alpha)+\cos(x+\alpha))^p}dx = \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{1}{p+2k+1}, * p > -1$$

$$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha))^p}{(\cos(x-\alpha)+\cos(x+\alpha))^p}dx = \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{1}{p-(2k+1)}\operatorname{tg}^{p-(2k+1)} x *, p < 1$$

.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x dx = I_1 + I_2 = \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{1}{2k+1+p} + \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{1}{(2k+1)-p} = \operatorname{tg}^p\alpha \sum (-1)^k \tfrac{2(2k+1)}{(2k+1)^2-p^2} *,$$

$p \in (-1, 1)$

.

Биноминальные разложения и ранее выведенные формулы позволяют разлагать в функциональные ряды и интегральные функциональные ряды, например, такие выражения:

$\cos^r x(a \pm b\cos^q x)^p, \cos^r x(a \pm b\sin^q x)^p, (a \pm b\operatorname{ch}^q x)^p, (a \pm b\operatorname{sh}^q x)^p, (a \pm b\tan^q x)^p *,$

$r \wedge q \wedge p \wedge a \wedge b \in R^{\pm}$

и другие их разновидности.

Разложим в биноминальный функциональный ряд, например, выражение

$\cos^r x(a + b\cos^q x)^p$

$$\cos^r x(a + b\cos^q x)^p = a^p[\cos^r x + \tbinom{p}{1} q\cos^{r+q} x + \tbinom{p}{2} q^2\cos^{r+2q} x + .. + \tbinom{p}{k} q^k \cos^{r+kq} x + ...] =$$

$$a^p[\tfrac{1}{2^r}\tbinom{r}{k}\sum\cos(r-2k)x) + \tbinom{p}{1} q \tfrac{1}{2^{r+q}}\sum\tbinom{r+q}{k}\cos(r+q-2k)x +$$

$$\tbinom{p}{2} q^2 \tfrac{1}{2^{r+2q}}\sum\tbinom{r+2q}{k}\cos(r+2q-2k)x) + ... + \tbinom{p}{k}\tfrac{1}{2^{r+kq}} q^k \sum\tbinom{r+kq}{k}\cos(r+kq-2k)x + ...] =$$

$$a^p \sum\tbinom{p}{k}\tfrac{1}{2^{r+kq}} q^k \sum\tbinom{r+kq}{k}\cos(r+kq-2k)x *$$

$q = b/a, (a + b\cos^m x) > 0, x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),$

ряд сходится если $a > b\cos^m x$, ряд расходится если $a < b\cos^m x$ в этом случае разлагаем в обратном порядке (не приводится).

.

Для разложения этой функции последовательно применялось ранее выведенное биноминальное разложение $\cos^p x = \frac{1}{2^p}\sum\tbinom{p}{k}\cos(p-2k)x*$.

Почленное интегрирование (интегральный ряд):

$$\int \cos^r x(a + b\cos^q x)^p dx = a^p \sum\tbinom{p}{k}\tfrac{1}{2^{r+kq}(r+kq-2k)} q^k \sum\tbinom{r+kq}{k}\sin(r+kq-2k)x *$$

$r + kq - 2k \neq 0.$

.

Вольфрам в общем виде не берёт.

В случае если степени r, q целые, то разложение ведём с применением конечных формул выражения степеней тригонометрических и гиперболических функций кратных аргументов ([7] с. 39.

Частные случаи разложения подобных выражений в биноминальные ряды:

1. $\int_0^{\pi/2} (a+b\cos^{2m} x)^{\pm p} dx = a^p \frac{\pi}{2}(1+\frac{q}{2^{2m}}\binom{\pm p}{1}\binom{2m}{m}+\frac{q^2}{2^{4m}}\binom{\pm p}{2}\binom{4m}{2m}+\ldots+\frac{q^k}{2^{2mk}}\binom{\pm p}{k}\binom{2mk}{mk})+\ldots) =$

$$a^p \frac{\pi}{2}\sum \frac{q^k}{2^{2mk}}\binom{\pm p}{k}\frac{(2km)!}{(km)!^2}*,$$

$q = b/a, m \in N,$

$a \geq b\cos^{2m} x$ - сходится, в противном случае - расходится.

Проверка проводилась для $m = 3, p = \pm 3/2$.

Тот же случай но $p \in N$.

2. $\int_0^{\pi/2} (a+b\cos^{2m} x)^p dx = a^p \frac{\pi}{2}(1+\binom{p}{1}\frac{q}{2^{2m}}\frac{(2m)!}{m!^2}+\binom{p}{2}\frac{q^2}{2^{4m}}\frac{(4m)!}{(2m!)^2}+\ldots+\binom{p}{k}\frac{q^k}{2^{2mk}}\frac{(2mk)!}{(mk)!^2}+..$

$\binom{p}{p-1}\frac{q^{p-1}}{2^{2m(p-1)}}\frac{(2m(p-1)!}{(m(p-1))!^2}+\frac{q^p}{2^{2mp}}\frac{(2mk)!}{(mk)!^2} = a^p \frac{\pi}{2}\sum\binom{p}{k}\frac{q^k}{2^{2mk}}\frac{(2mk)!}{(mk)!^2}*$

3. $\int_0^{\pi/2} (a+b\cos^8 x)^3 dx = a^p \frac{\pi}{2}(1+3\frac{1}{2^8}\frac{(8)!}{4!^2}q+3\frac{1}{2^{16}}\frac{(16)!}{8!^2}q^2+\frac{1}{2^{24}}\frac{(24)!}{12!^2}q^2) = a^p \frac{\pi}{2}(1+\frac{105}{2^7}q+\frac{19305}{2^{15}}q^2+\frac{676039}{2^{22}}q^3)$

$q = b/a.$

Другой способ биноминального разложения подобных выражений

$\sin^m x(a+b\sin^n)^p dx = \sin^m x(a+b\sin^n)^p / \cos x d(\sin x) =$

$\sin^m x(a+b\sin^n)^p (1-\sin^2 x)^{-1/2} d(\sin x) = a^p\left((s^m+\binom{p}{1}\frac{b}{a}s^{m+n}+\binom{p}{2}(\frac{b}{a})^2 s^{m+2n}+..\right)\times$

$\times\left(1-\binom{-1/2}{1}s^2+\binom{-1/2}{2}s^4-..\right) = a^p[(s^m-\binom{-1/2}{1}s^{m+2}+\binom{-1/2}{2}s^{m+4}-..)+$

$\binom{p}{1}\frac{b}{a}(s^{m+n}-\binom{-1/2}{1}s^{m+n+2}+\binom{-1/2}{2}\sin^{m+n+4}-..)+\binom{p}{2}(\frac{b}{a})^2(s^{m+2n}-\binom{-1/2}{1}s^{m+2n+2}+$

$\binom{-1/2}{2}s^{m+2n+4}-..)+\binom{p}{3}(\frac{b}{a})^3(s^{m+3n}-\binom{-1/2}{1}s^{m+3n+2}+\binom{-1/2}{2}s^{m+3n+4}-..)..+$

$\binom{p}{k}(\frac{b}{a})^k(s^{m+kn}-\binom{-1/2}{1}s^{m+kn+2}+\binom{-1/2}{2}s^{m+kn+4}-..+(-1)^t\binom{-1/2}{t}s^{m+kn+2t}\pm..)+..]d(s) =$

$a^p\sum\binom{p}{k}(\frac{b}{a})^k\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-1/2}{t}s^{m+kn+2t}d(s),$

$s = \sin x,\ m\,\hat{}\ n\,\hat{}\ p \in \mathbb{R},$

$\int \sin^m x(a+b\sin^n)^p dx = -a^p\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(\frac{b}{a})^k\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-1/2}{t}\frac{1}{m+kn+2t+1}\cos^{m+kn+2t+1} x + c.*$

$\int_0^{\pi/2} \sin^m x(a+b\sin^n)^p dx = a^p\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(\frac{b}{a})^k\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-1/2}{t}\frac{1}{m+kn+2t+1}*$

Выражения содержащие тангенсы

$(a+b\tan^m x)^p dx = a^p(1+qt^m x)^p dx = a^p(1+\binom{p}{1}qt^m+\binom{p}{2}q^2t^{2m}+\ldots+$

$\binom{p}{k}q^k t^{2m}+\ldots)dx = a^p(1+\binom{p}{1}qt^m+\binom{p}{2}q^2t^{2m}+\ldots)+\binom{p}{k}q^k t^{km}+\ldots)(1/(1+t^2)dt =$

$a^p(1+\binom{p}{1}qt^m+\binom{p}{2}q^2t^{2m}+\ldots+\binom{p}{k}q^k t^{2m}+\ldots)(1-t_2+t_4-..)dt =$

$a^p((1-t^2+t^2-..)+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\binom{p}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{km+2n})dt,$

$q = b/a,\ a\,\hat{}\ b\,\hat{}\ m\,\hat{}\ p \in R^{\pm},\ |a| \geq |b|t^m,\ t = \mathrm{tg}\, x > 0$ сходится,

$t = \mathrm{tg}\, x < 0$ расходится и тогда:

$(b\,\mathrm{tg}^m x+a)^p dx = b^p(\mathrm{tg}^{mp} x+\binom{p}{1}q't^{m(p-1)}+\binom{p}{2}q'^2t^{m(p-2)}+..)(t^{-2}+t^{-4}+..)dt =$

$b^p\sum_{k=0}^{\infty}q'^k\binom{p}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{m(p-k)-2n}dt, q' = a/b.$

$\int(a+b\,\mathrm{tg}^m x)^p dx = a^p(\mathrm{arctg}\, t+\sum_{k=1}^{\infty}q^k\binom{p}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{km+2n+1}\mathrm{tg}^{km+2n+1} x)+c.,$

$$km+2n+1 \neq 0, m > -1$$

$$\int (b\,\mathrm{tg}^m x + a)^p dx = b^p \sum_{k=0}^{\infty} q'^k \binom{p}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{m(p-k)-2n+1} \mathrm{tg}^{m(p-k)-2n+1} x + c.,$$

$$m(p-k)-2n+1 \neq 0, mp < 1, q' = a/b$$

$$\int_0^{\pi/4} (a + b\,\mathrm{tg}^m x)^p dx = a^p \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \binom{p}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{km+2n+1}\right), m > -1,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (b\,\mathrm{tg}^m x + a)^p dx = b^p \sum_{k=0}^{\infty} q'^k \binom{p}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{m(p-k)-2n+1}, mp < 1.$$

2.3.3. Разложение других функций в биноминальные функциональные ряды

1. $(x+\ln x)^p = x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} \ln x + \binom{p}{2} x^{p-2} \ln^2 x + \ldots + \binom{p}{k} x^{p-k} \ln^k x + \ldots = \sum \binom{p}{k} x^{p-k} \ln^k x*,$

$x \in (0, \Omega)$

$(\ln x + x)^p = \ln^p x + \binom{p}{1} x \ln^{p-1} x + \binom{p}{2} x^2 \ln^{p-2} x + .. + \binom{p}{k} x^k \ln^{p-k} x + .. = \sum \binom{p}{k} x^k \ln^{p-k} x*$

$x \in (\Omega, \infty)$

Где $\Omega = W(1) \approx 0.56714329$ функция Ламберта от единицы.

Почленное интегрирование ряда удобно выполнять с помощью формулы обобщённого интегрирования по частям, преобразовав подынтегральное выражение следующим образом $(x+\ln x)^p dx = e^z (e^z + z)^p dz$, где $z = \ln x$.

Например

$$\int (x+\ln x)^p dx = \int \left(e^{(p+1)z} + \binom{p}{1} e^{pz} z + \binom{p}{2} e^{(p-1)z} z^2 + .. + \binom{p}{2} e^{(p-k+1)z} z^k + ..\right) dz =$$

$$= \frac{1}{p+1} e^{(p+1)z} + \binom{p}{1} e^{pz}\left(z - \frac{1}{p}\right) + \binom{p}{2} e^{(p-1)z}\left(z^2 - \frac{2}{(p-1)} z + \frac{2!}{(p-1)^2}\right) + .. + \binom{p}{k} e^{(p-k+1)z}\Big(z^k -$$

$$\frac{k}{p-k+1} z^{k-1} + \frac{k(k-1)}{(p-k+1)^2} z^{k-2} - \ldots \pm \frac{k!}{(p-k+1)^{k-1}} z \mp \frac{k!}{(p-k+1)^k}\Big) + \ldots + c. =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^{p-k+1} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{k(k-1)..(k-n+1)}{(p-k+1)^n} \ln^{k-n}(x) + c*.$$

$$\infty > x_1 \geq 1, \quad 1 \geq x_2 \geq T \approx 0,56714329..., \quad z = \ln x.$$

Компьютерные расчётные системы такие интегралы не берут

Более сложный вариант:

$$(x^n + \ln^m x)^p dx = x(x^n + \ln^m x)^p d(\ln x) = e^z (e^{nz} + z^m)^p dz = \left(e^{(np+1)z} + \binom{p}{1} e^{(n(p-1)+1)z} z + \right.$$

$$\left. \binom{p}{2} e^{(n(p-2)+1)z} z^2 + .. + \binom{p}{k} e^{(n(p-k)+1)z} z^k + .., n \wedge m \wedge p \in \mathbb{R}^{\pm}.\right.$$

Для интегрирования этого выражения можно применить так же формулу обобщённого интегрирования по частям. Правда здесь имеет место затруднение, связанное с определением промежутков сходимости (расходимости) ряда, т.е. с решением неравенства $x^n > \ln^m x, (x^n < \ln^m x)$. Это затруднение исчезает, если в подынтегральном выражении $n = 1$ или $m = 1$ ибо указанное выше неравенство разрешимо посредством функции Ламберта в действительной области. Неравенства же: $x^n > \ln^m x, (x^n < \ln^m x)$ с произвольными m, n ни всегда разрешимо в действительной области.

2. $\quad (e^{\alpha x}+e^{\beta x})^p=\sum\binom{p}{k}e^{(\alpha p+k(\beta-\alpha))x}*, \alpha>\beta$

$(e^{\beta x}+e^{\alpha x})^p=\sum\binom{p}{k}e^{(\beta p+k(\alpha-\beta))x}*, \alpha<\beta.$

$\int(e^{\alpha x}+e^{\beta x})^p\,dx=\sum\binom{p}{k}\frac{1}{\alpha p+k(\beta-\alpha)}e^{(\alpha p+k(\beta-\alpha))x}+c.*$

$\alpha p+k(\beta-\alpha)\neq 0$

$\int(e^{\beta x}+e^{\alpha x})^p\,dx=\sum\binom{p}{k}\frac{1}{\beta p+k(\alpha-\beta)}e^{(\beta p+k(\alpha-\beta))x}+c.*$

$\beta p+k(\alpha-\beta)\neq 0$

.

3. $\quad (e^x\pm\cos x)^p=e^{px}\pm\binom{p}{1}e^{(p-1)x}\cos x+\binom{p}{2}e^{(p-2)x}\cos^2 x\pm\ldots\pm$

$\binom{p}{k}e^{(p-k)x}\cos^k x+\ldots$

$x\in(0,\infty)$

$(e^{-x}\pm\sin x)^p=e^{-px}\pm\binom{p}{1}e^{-(p-1)x}\sin x+\ldots\pm\binom{p}{k}e^{-(p-k)x}\sin^k x*+\ldots$

$x\in(0,T_1),\ T_1\approx 0.588532744$ - найдено эмпирически.

.

Почленное интегрирование таких рядов выполняется с использованием выражений:

$$\int e^{ax}\cos(nx)dx=e^{ax}\frac{n\sin nx+a\cos nx}{a^2+n^2}+c,$$

$$\int e^{ax}\sin(nx)dx=e^{ax}\frac{a\sin nx-n\cos nx}{a^2+n^2}+c. \qquad (19)$$

4. $\ (e^x\pm x)^p=e^{px}\pm\binom{p}{1}e^{(p-1)x}x+\binom{p}{2}e^{(p-2)x}x^2\pm\ldots\pm\binom{p}{2}e^{(p-k)x}x^k+\ldots, x\geq 0,$

$(e^{-x}\pm x)^p=e^{-px}\pm\binom{p}{1}e^{-(p-1)x}x+\binom{p}{2}e^{-(p-2)x}x^2\pm\ldots\pm\binom{p}{k}e^{-(p-k)x}x^k+\ldots*,$

$0\leq x\leq T\approx 0{,}56714329\ldots,(e^{-T}=T)$

$(x\pm e^{-x})^p=x^p\pm\binom{p}{1}x^{p-1}e^{-x}+\binom{p}{2}x^{p-2}e^{-2x}\pm\ldots\pm\binom{p}{k}x^{p-k}e^{-kx}+\ldots*,\ T\leq x<\infty.$

$\int(e^x\pm x)^p\,dx=e^{px}\frac{1}{p}\pm\binom{p}{1}e^{(p-1)x}\left(x-\frac{1}{(p-1)}\right)+\binom{p}{2}e^{(p-2)x}\left(x^2-\frac{2}{p-2}x+\frac{2\cdot 1}{(p-2)^2}\right)\pm\ldots+$

$(-1)^k\binom{p}{k}e^{(p-k)x}\left(x^k-\frac{k}{p-k}x^{k-1}+\frac{k(k-1)}{(p-k)^2}x^{k-2}-\ldots\pm\frac{k!}{(p-k)^{k-1}}x\mp\frac{k!}{(p-k)^k}\right)+\ldots+c*, 0\leq x<\infty.$

.

$(a^x+x)^p=(e^{x\ln a}+x)^p$

$=e^{(\ln a)px}+\binom{p}{1}e^{(\ln a)(p-1)x}x+\binom{p}{2}e^{(\ln a)(p-2)x}x^2\pm\ldots\pm\binom{p}{k}e^{(\ln a)(p-k)x}x^k+..*$ (20)

$\int(a^x\pm x)^p\,dx=\frac{1}{\ln a}e^{(\ln a)px}+\binom{p}{1}\frac{1}{\ln a(p-1)x}e^{(\ln a)(p-1)x}\left(x-\frac{1}{\ln a(p-1)}\right)+$

$\binom{p}{2}\frac{1}{\ln a(p-2)x}e^{(\ln a)(p-2)x}\left(x^2-\frac{2}{\ln a(p-2)}x+\frac{2\cdot 1}{(p-2)^2}\right)+..+$

$\binom{p}{k}e^{(\ln a)(p-k)x}\left(x^k-\frac{k}{\ln a(p-k)}x^{k-1}+\frac{k(k-1)}{(\ln a(p-k))^2}x^{k-2}-\ldots\pm\frac{k!}{((\ln a(p-k))^{k-1}}x\mp\frac{k!}{(\ln a(p-k))^k}\right)+\ldots*+c.$. (21)

Или:

$\int(a^x\pm x)^p\,dx=\sum\binom{p}{k}\frac{a^{(p-k)x}}{(p-k)\ln a}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{k!}{(k-n)!((p-k)\ln a)^n}x^{k-n}$ при почленном интегрировании последовательно применялась обобщённая формула интегрирования по частям. Следует заметить, что интервал сходимости (20), (21): при $a\geq\sqrt{2}, x\in(0,\infty)$, при $0\leq a<\sqrt{2}$ интервалы сходимости : $0\leq x\leq T_1, x\geq T_2$, где величины T_1, T_2 определяются в каждом конкретном случае, в зависимости от величины a из равенства $(a^T = T)$. Так если $a = 1,4$, то $T_1 \approx 1.886663..., T_2 \approx 4.41029...$, если $a = \sqrt{2}$, то $T_1 = 2, T_2 = 4$. За пределами этих промежутков разложение (20), (21) в биноминальные ряды выполняем в обратном порядке.

Разложение в не биноминальные функциональные ряды функций и их интегралов

$$e^{mx}\cos^p x = \frac{1}{2^p}e^{mx}(\cos xp + \binom{p}{1}\cos x(p-2) + .. + \binom{p}{k}\cos x(p-2k) + ..)^*, m, p \in R^{\pm}.$$

При почленном интегрировании применяем формулу из серии (19):

$$\int e^{mx}\cos^p xdx = \frac{1}{2^p}e^{mx}[\frac{p\sin px + m\cos px}{m^2+p^2} + \binom{p}{1}\frac{(p-2)\sin(p-2)x + m\cos(p-2)x}{m^2+(p-2)^2} + .. +$$

$$\binom{p}{k}\frac{(p-2k)\sin(p-2k)x + m\cos(p-2k)x}{m^2+(p-2k)^2} + ..] = \frac{1}{2^p}e^{mx}\sum\binom{p}{k}\frac{(p-2k)\sin(p-2k)x + m\cos(p-2k)x}{m^2+(p-2k)^2} + c.$$

Таким же способом можно разложить $e^{mx}\sin^p x$ и $\int e^{mx}\sin^p xdx$.

Разложение в ряд показательно – степенных функций

$$x^x = e^{x\ln x} = e^{\ln x e^{\ln x}} = e^{ze^z} = 1 + \frac{z}{1}e^z + \frac{z^2}{2!}e^{2z} + \frac{z^3}{3!}e^{3z} + ... + \frac{z^k}{k!}e^{kz} + ... =$$

$$= 1 + \frac{z}{1}(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^k}{k!} + ...) + \frac{z^2}{2!}(1 + \frac{2z}{1} + \frac{2^2z^2}{2!} + \frac{2^3z^3}{3!} + ... + \frac{2^kz^k}{k!} + ...) +$$

$$+ \frac{z^3}{3!}(1 + \frac{3z}{1} + \frac{3^2z^2}{2!} + \frac{3^3z^3}{3!} + ... + \frac{3^kz^k}{k!} + ...) + ...$$

Группировка коэффициентов при одинаковых степенях *z* даёт:

$$x^x = 1 + A_1\frac{z}{1} + A_2\frac{z^2}{2!} + A_3\frac{z^3}{3!} + .. + A_k\frac{z^k}{k!} + ...$$

$$A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 10, A_4 = 41, A_5 = 196, A_6 = 1057, A_7 = 6322, A_8 = 41393...$$

$$A_k = 1^{k-1}\binom{k}{1} + 2^{k-2}\binom{k}{2} + 3^{k-3}\binom{k}{3} + .. + n^{k-n}\binom{k}{n} + .. + (k-1)^1\binom{k}{k-1} + 1 =$$

$$\sum_{n=1}^{k} n^{k-n}\binom{k}{n}, k = 0..\infty,\ z = \ln x. \qquad (22)$$

Запишем в общем виде разложение в ряд выражения x^x:

$$x^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k / k! \sum_{n=1}^{k} n^{k-n}\binom{k}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{n^{k-n}}{(k-n)!n!}z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{n^{k-n}}{(k-n)!n!}\ln^k x,$$

↑ сходится $x \in (1, \infty)$.

Таким же образом:

$$x^{-x} = e^{-x\ln x} = e^{-\ln x e^{\ln x}} = e^{-ze^z} = 1 - \frac{z}{1}e^z + \frac{z^2}{2!}e^{2z} - \frac{z^3}{3!}e^{3z} + \frac{z^4}{4!}e^{4z} - ... \pm \frac{z^k}{k!}e^{kz} \mp .. =$$

$$= 1 - \frac{z}{1}(1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^k}{k!} + ..) + \frac{z^2}{2!}(1 + \frac{2z}{1} + \frac{2^2z^2}{2!} + \frac{2^3z^3}{3!} + .. + \frac{2^kz^k}{k!} + ..) -$$

$$- \frac{z^3}{3!}(1 + \frac{3z}{1} + \frac{3^2z^2}{2!} + \frac{3^3z^3}{3!} + .. + \frac{3^kz^k}{k!} + ..) + - ... = 1 + A_1'\frac{z}{1} + A_2'\frac{z^2}{2!} + A_3'\frac{z^3}{3!} + .. + A_k'\frac{z^k}{k!} + ..$$

$$A_1' = -1, A_2' = -1, A_3' = 2, A_4' = 9, A_5' = 4, A_6' = -95, A_7' = -414, A_8' = 49, A_9' = 10088, ...,$$

$$A_k' = (-1)^{k-1}\binom{k}{1} + 2^{k-2}\binom{k}{2} - 3^{k-3}\binom{k}{3} + ... + (-1)^n n^{k-n}\binom{k}{n} .. \mp (k-2)^2\binom{k}{k-2} \pm (k-1)^1\binom{k}{k-1} \mp 1) =$$

$$\sum_{n=0}^{k}(-1)^n n^{k-n}\binom{k}{n}, k = 0..\infty,\ z = \ln x.$$

$$x^{-x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{n^{k-n}}{(k-n)!n!}z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{n^{k-n}}{(k-n)!n!}\ln^k x.$$

↑ сходится $x \in (1, \infty)$.

Следует отметить, что уравнение $x^x = a$ в интервале $a \in (e^{-1/e}, 1)$, а уравнение x^{-x} в интервале $a \in (1, e^{1/e})$ имеют по два действительных решения, если a находится вне этих интервалов, эти уравнения имеют по одному действительному решению. Например, если

$x^x = 0.8,$ то $x_1 = e^{W(\ln 0.8)} \approx 0.739534, e^{W_{-1}(\ln 0.8)} \approx 0.09465$ т.е $x_1^{x_1} = x_2^{x_2} = 0.8$, где $W(z)$ функция Ламберта, проверено по [8]. То же самое для $x^{-x} = 1.2, x_1 \approx 0.79598, x_2 \approx 0.06772, x_1^{X_1} = x_2^{X_2} = 1.2$.
В рассмотренных выше интервалах выражения x^x, x^{-x} образуют по два эквивалентно равных ряда.

Разложим в функциональный ряд показательно – степенную функцию x^{x+b}:

$$x^{x+b} = x^b x^x = e^{bz} x^x = (1 + \tfrac{b}{1!}z + \tfrac{b^2}{2!}z^2 + ..)(1 + A_1\tfrac{z}{1} + A_2\tfrac{z^2}{2!} + .. + A_k\tfrac{z^k}{k!} + ..)$$

Перемножая почленно ряды, имеем:

$$x^{x+b} = 1 + (A_1 + b)z + (A_2 + 2A_1 b + b^2)z^2 + (A_3 + 3A_2 b + 3A_1 b^2 + b^3)z^3 + .. +$$
$$(A_k + \tbinom{k}{1} A_{k-1} b + \tbinom{k}{2} A_{k-2} b^2 + .. + \tbinom{k}{n} A_{k-n} b^n + .. + \tbinom{k}{k-1} A_1 b^{k-1} + b^k)z^k + .$$

$$x^{x+b} = x^b x^x = e^{bz} x^x = (1 + \tfrac{b}{1!}z + \tfrac{b^2}{2!}z^2 + ..)(1 + A_1\tfrac{z}{1} + A_2\tfrac{z^2}{2!} + .. + A_k\tfrac{z^k}{k!} + ..)$$
$$= 1 + (A_1 + b)z + (A_2 + 2A_1 b + b^2)z^2 +$$
$$(A_3 + 3A_2 b + 3A_1 b^2 + b^3)z^3 + .. +$$
$$(A_k + \tbinom{k}{1} A_{k-1} b + \tbinom{k}{2} A_{k-2} b^2 + .. + \tbinom{k}{n} A_{k-n} b^n + .. + \tbinom{k}{k-1} A_1 b^{k-1} + b^k)z^k + ..* (23).$$

$z = \ln x$, $b \in \mathbb{R}^{\pm}, A_1, A_2, ..A_k$ - смотри (22)

Запишем (23) в более компактном виде:

$x^{x+b} = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + .. + B_k z^k + ..$. *b* произвольное, если *b* целое, то $B_1, B_2, ..B_k, ..$ тоже целые.

Интегрируем:

$$\int x^{x+b} dx = \int x^{x+b+1} d(\ln x) = z + \tfrac{1}{2}B_1' z^2 + \tfrac{1}{3}B_2' z^3 + .. + \tfrac{1}{k+1}B_k' z^{k+1} + ...$$

B_i' определяются по тем же формулам, что и соответствующие B_i только вместо b ставится $b+1$ т.е.: $B_1' = (A_1 + (b+1)), B_2' = (A_2 + 2A_1(b+1) + (b+1)^2)$ и т.д. Компьютерные программы такие интегралы не берут. Такими же способами можно почленно интегрировать с любой степенью точности следующие варианты: $x^{\pm x \pm b}$.

Усложним задачу:

$$x^{nx^m} = 1 + \tfrac{nz}{1!}x^m + \tfrac{n^2z^2}{2!}x^{2m} + .. + \tfrac{n^kz^k}{k!}x^{km} + .. = 1 + \tfrac{nz}{1!}(1 + \tfrac{mz}{1!} + \tfrac{m^2z^2}{2!} + .. + \tfrac{m^qz^q}{q!} + ..) +$$
$$\tfrac{n^2z^2}{2!}(1 + \tfrac{2mz}{1!} + \tfrac{(2m)^2z^2}{2!} + .. + \tfrac{(2m^q)z^q}{q!} + ..) + ... = 1 + nz + \tfrac{1}{2!}(2nm + n^2)z^2 + \tfrac{1}{3!}(3nm^2 + 2 \cdot 3n^2m + n^3)z^3 + ..$$
$$\tfrac{1}{4!}(4nm^3 + 2^2 6n^2m^2 + 4n^3n + n^4)z^3 + ..$$
$$\tfrac{1}{k!}(\tbinom{k}{1} nm^{k-1} + 2^{k-2}\tbinom{k}{2} n^2m^{k-2} + .. + d^{k-d}\tbinom{k}{d} n^d m^{k-d} + .. + (k-1)\tbinom{k}{k-1} n^{k-1}m + n^k)z^k + .. =$$
$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{k} d^{k-d}\tbinom{k}{d} n^d m^{k-d} z^k *,$$

Проверено

$z = \ln x, n \wedge m \in \mathbb{R}^{\pm}.$

.

Запишем разложение в виде:

$$x^{nx^m} = 1 + D_1 z + D_2 z^2 + .. + D_k z^k + .., D_k = \sum_{d=1}^{k} d^{k-d}\tbinom{k}{d} n^d m^{k-d}, k = 1..\infty.$$

Тогда:

$$x^{nx^m+b} = x^{nx^m} x^b = (1 + D_1 z + D_2 z^2 + .. + D_k z^k + ..)(1 + \tfrac{1}{1!}bz + \tfrac{1}{2!}b^2z^2 + ..) =$$
$$1 + (b + D_1)z + (\tfrac{1}{2!}b^2 + \tfrac{1}{1!}D_1 b + D_2)z^2 + (\tfrac{1}{3!}b^3 + \tfrac{1}{2!}D_1 b^2 + \tfrac{1}{1!}D_2 b + D_3)z^3 + .. +$$
$$(\tfrac{1}{k!}b^k + \tfrac{1}{(k-1)!}D_1 b^{k-1} + .. + \tfrac{1}{(k-n)!}D_n b^{k-n} + .. + \tfrac{1}{1!}D_{k-1}b + b)z^k + .. = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\tfrac{1}{(k-n)!}D_n b^{k-n} z^k *, z = \ln x$$

(24)

$\int x^{nx^m} dx = \int x^{nx^m+1} dz$ в (24) подставим $b = 1$, тогда

$$\int x^{nx^m}dx = \int x^{nx^m+1}dz = \int (1+(1+D_1)z+(\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{1!}D_1+D_2)z^2+(\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{2!}D_1+\tfrac{1}{1!}D_2+D_3)z^3+..$$

$$(\tfrac{1}{k!}+\tfrac{1}{(k-1)!}D_1+..+\tfrac{1}{(k-n)!}D_n+..+\tfrac{1}{1!}D_{k-1}+1)z^k+..)dz = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\tfrac{1}{(k-n)!}D_n z^k * =$$

$$z+(1+D_1)\tfrac{1}{2}z^2+(\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{1!}D_1+D_2)\tfrac{1}{3}z^3+..+\tfrac{1}{k+1}(\tfrac{1}{k!}+\tfrac{D_1}{(k-1)!}+..+\tfrac{D_n}{(k-n)!}+..+\tfrac{D_{k-1}}{1!}+1)z^{k+1}+.. =$$

$$z+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\tfrac{1}{(k+1)(k-n)!}D_n z^{k+1}+c.*$$

$$z=\ln x$$

.

Где:

$$z=\ln x, D_1=n, D_2=\tfrac{1}{2!}(2nm+n^2), D_3=\tfrac{1}{3!}(3nm^2+2\cdot 3n^2m+n^3),..,$$

$$D_k=\tfrac{1}{k!}\left(\binom{k}{1}nm^{k-1}+2^{k-2}\binom{k}{2}n^2m^{k-2}+..+d^{k-d}\binom{k}{d}n^d m^{k-d}+..+(k-1)\binom{k}{k-1}n^{k-1}m+n^k\right)$$

.

Такими методами можно разложить в ряды ещё много и более сложных показательно – степенных функций и их интегралов, например, “многоэтажных” самым простым представителем которых является функция $f(x)=x^{x^x}$. Замена $z=\ln x$ с последующим перемножением между собой нескольких рядов и приведением подобных членов, позволяет разлагать подобные функции в ряды с последующим почленным интегрированием их.

Заключение

В статье выполнена попытка более углублённого изучения и уточнённого определения таких фундаментальных понятий как прямая, безразмерная точка, пространство, бесконечность. Системой связанных между собой аксиом доказано, что прямая, точка, пространство, бесконечность неограниченны, замкнуты и конечно – бесконечные виртуальные объекты к которым неограниченно стремятся подобные реальные объекты, но ни когда в них не воплощаются. Доказано, что в природе не существует абсолютно гладких прямых линий и плоскостей, уходящих бесконечно в никуда.

Список литературы

1. Н. Кузанский Об учёном незнании. Книга 1, глава 1.
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия . Наука, 1966.
3. Воробьёв Н. Н. Теория рядов, “Наука”, М.,1979.
4. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. ГИТТЛ, М – Л., 1949
5. Варшамов Р.Р. Введение в новую нетрадиционную математику, СИНТЕГ, М.,1999.
6. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИЛ,1951.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
8. Wolfram Alpha База знаний и набор вычислительных алгоритмов.