



7 шагов вокруг Совершенного Кубоида

Шаг 1.

В математике *совершенный кубоид* - это прямоугольный кубоид, ребра которого, лицевые диагонали и телесная диагональ имеют целые длины: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_brick

Совершенный кубоид должен удовлетворять следующей системе диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 \\ a^2 + c^2 = e^2 \\ b^2 + c^2 = f^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = g^2 \end{cases} \quad (I)$$

где: a, b, c - рёбра, d, e, f - лицевые диагонали и g - телесная диагональ.

До сих пор не было подтверждения существования совершенного кубоида, но и не было доказано, что такой кубоид не может существовать, так что это оставалось проблемой в течение нескольких столетий. Однако я попытаюсь показать причину, по которой идеальный кубоид невозможен.

Шаг 2.

Если совершенный кубоид существует, то квадраты трёх его лицевых диагоналей должны образовывать треугольник Герона.

Доказательство.

Из несложных преобразований (I) имеем:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = d^2 + e^2 + f^2 \quad (II)$$

$$2g^2 = d^2 + e^2 + f^2 \quad (III)$$

$$g^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} \quad (IV)$$

$$\begin{cases} a^2 = g^2 - f^2 \\ b^2 = g^2 - e^2 \\ c^2 = g^2 - d^2 \end{cases} \quad (V)$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} - f^2 \\ b^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} - e^2 \\ c^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} - d^2 \end{cases} \quad (VI)$$

Посредством подстановки из (IV) и (VI) вытекает:

$$abcg = \sqrt{\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2} - f^2\right)\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2} - e^2\right)\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2} - d^2\right)\left(\frac{d^2+e^2+f^2}{2}\right)} \quad (\text{VII})$$

$$abcg = \frac{1}{4} \sqrt{(-d^2 + e^2 + f^2)(d^2 - e^2 + f^2)(d^2 + e^2 - f^2)(d^2 + e^2 + f^2)} \quad (\text{VII})$$

$ab, bc, ca \in \mathbb{N} \Rightarrow d^2, e^2, f^2$ должны быть сторонами геронова треугольника со сторонами-квадратами и площадью, равной ab, bc, ca (https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle). Что и требовалось.

Шаг 3.

Точная формула всех героновых треугольников. Хорошо известное параметрическое решение показывает, что каждый геронов треугольник имеет стороны, пропорциональные:

$$\begin{cases} a = n(m^2 + k^2) \\ b = m(n^2 + k^2) \\ c = (m+n)(mn - k^2) \end{cases}$$

где a, b, c - его рёбра, $\gcd(m, n, k) = 1, mn > k^2 \geq 1, m \geq n \geq 1$.

Таким образом, путем подстановки из шага 2, наш геронов треугольник с квадратными сторонами будет параметризован аналогично:

$$\begin{cases} d^2 = n(m^2 + k^2) \\ e^2 = m(n^2 + k^2) \\ f^2 = (m+n)(mn - k^2) \end{cases} \quad (\text{VIII})$$

Шаг 4.

Теперь можно также выразить и остальные параметры совершенного кубоида. Из (IV), (V) и (VIII) следует:

$$\begin{cases} g^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} = mn(m+n) \\ a^2 = g^2 - f^2 = k^2(m+n) \\ b^2 = g^2 - e^2 = m(mn - k^2) \\ c^2 = g^2 - d^2 = n(mn - k^2) \end{cases} \quad (\text{IX})$$

Шаг 5.

Таблица чётности.

[illegible]

Шаг 6.

Используем хорошо известное свойство, которому должен удовлетворять примитивный совершенный кубоид:

- Одно ребро, две лицевые диагонали и телесная диагональ должны быть нечетными, одно ребро и оставшаяся лицевая диагональ должны быть кратны 4, а оставшееся ребро должно быть кратно 16.

Согласно таблице четности из шага 5, становится ясно, что такой кубоид отсутствует. Действительно, это показывает невозможность существования совершенного кубоида.

Шаг 7.

Из (VIII) и (IX) давайте определим квадраты последовательно:

$$a^2 = k^2(m+n) \Rightarrow (m+n) = \square$$

$$f^2 = (m+n)(mn-k^2) \Rightarrow (mn-k^2) = \square$$

$$b^2 = m(mn-k^2) \Rightarrow m = \square$$

$$c^2 = n(mn-k^2) \Rightarrow n = \square$$

Кроме того, есть еще одно хорошо известное свойство:

- Пространственная диагональ может содержать только простые делители $\equiv 1 \pmod{4}$.

В то же время хорошо известен тот факт, что:

- Точный квадрат либо делится на 4, либо при делении на 8 дает остаток от 1.

Таким образом, мы можем написать:

$$\begin{cases} m = \square = 8p+1 \\ n = \square = 8q+1 \end{cases}$$

но из (IX) следует: $g^2 = mn(m+n) = (8p+1)(8q+1)(8p+8q+2)$ (X)

Противоречие.

Захар Пехтерев,

12 апреля 2022г.