Ещё 7 шагов вокруг Совершенного Кубоида

Эта статья является продолжением вышедшей ранее статьи «7 шагов вокруг Совершенного Кубоида». Напомню, что в предыдущей статье было показано, что квадраты лицевых диагоналей совершенного кубоида образуют геронов треугольник со сторонами-квадратами, а также был сделан вывод о невозможности существования совершенного кубоида на примере параметризации Брахмагупты для рёбер треугольников Герона. С недавнего времени стало известно, что найдены два героновых треугольника со сторонами-квадратами, которые пропорциональны параметризации Брахмагупты. Данный факт заставляет задуматься: а не возможен ли совершенный кубоид в случае с общим чётным делителем? Здесь мы подробно рассмотрим этот вопрос.

Шаг 1.

Пусть существует такой чётный делитель q, при котором совершенный кубоид будет пропорционален рассмотренной ранее параметризации, тогда такая параметризация будет иметь вид:

$$a^2=\frac{k^2(n+m)}{q}\qquad b^2=\frac{m(mn-k^2)}{q}\qquad c^2=\frac{n(mn-k^2)}{q}$$

$$d^2=\frac{n(m^2+k^2)}{q}\qquad e^2=\frac{m(n^2+k^2)}{q}\qquad f^2=\frac{(m+n)(mn-k^2)}{q}\qquad g^2=\frac{mn(m+n)}{q}\qquad \text{(I)}$$

Шаг 2.

Теперь необходимо действовать в рациональных числах. Выявим квадраты последовательно:

$$a^2=\frac{k^2(n+m)}{q}\Rightarrow\frac{(n+m)}{q}=\square$$

$$f^2=\frac{(m+n)}{q}(mn-k^2)\Rightarrow(mn-k^2)=\square$$

$$b^2=(mn-k^2)\frac{m}{q}\Rightarrow\frac{m}{q}=\square\qquad \text{(II)}$$

$$c^2=(mn-k^2)\frac{n}{q}\Rightarrow\frac{n}{q}=\square$$

Шаг 3.

Итак, существует три варианта, при которых $\frac{(n+m)}{q},\quad\frac{m}{q},\quad\frac{n}{q}$ могут являться квадратами:

- числитель и знаменатель являются квадратами
- числитель делится на знаменатель
- числитель и знаменатель сокращаются на общий делитель

Далее разберём каждый из этих случаев.

Шаг 4.

В случае, когда и числитель и знаменатель являются квадратами, мы можем всю параметризацию (I) умножить на делитель q, являющийся квадратом, то всегда получится совершенный кубоид, но тогда мы вернёмся к чистой параметризации Брахмагупты, рассмотренной в предыдущей статье, а в ней показывается, что она не даёт совершенного кубоида.

Шаг 5.

В случае, когда числитель делится на знаменатель, запишем:

$$m = s^2 q \quad n = t^2 q$$

Тогда: $g^2 = \dfrac{mn(m+n)}{q} = q^2 s^2 t^2 (s^2 + t^2)$

Поскольку q - четное, то получаем чётную телесную диагональ. Этот случай также отпадает.

Шаг 6.

Случай, когда числитель и знаменатель имеют общий делитель немногим сложнее:

$$m = u^2 w \quad n = v^2 w \quad q = x^2 w$$

Подставим в (I) и умножим всю параметризацию на x^2, чтобы избавиться от знаменателя, тогда:

$$\begin{array}{lll} a^2 = k^2(u^2+v^2) & b^2 = u^2(u^2v^2w^2 - k^2) & c^2 = v^2(u^2v^2w^2 - k^2) \\ d^2 = v^2(u^4w^2 + k^2) & e^2 = u^2(v^4w^2 + k^2) & f^2 = (u^2+v^2)(u^2v^2w^2 - k^2) \end{array} \quad g^2 = w^2u^2v^2(u^2+v^2) \quad \text{(III)}$$

Очевидно, что w может быть только нечётным, иначе телесная диагональ будет всегда чётной.

Шаг 7.

Таблица чётности при условии, что w - нечётное.

u	v	k	a	b	c	d	e	f	g
нечет	нечет	нечет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет
нечет	нечет	чет	чет	нечет	нечет	нечет	нечет	чет	чет
нечет	чет	нечет	нечет	нечет	чет	чет	нечет	нечет	чет
нечет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет
чет	нечет	нечет	нечет	чет	нечет	нечет	чет	нечет	чет
чет	нечет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет
чет	чет	нечет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет
чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет	чет

Как и в предыдущей статье, по таблице чётности обнаруживаем, что ни в одной строке нет условий, удовлетворяющие свойствам совершенного кубоида. Действительно, данная таблица исключает возможность существования совершенного кубоида для параметризации с чётным делителем q.

Если для геронова треугольника делитель возможен, то для кубоида он бесполезен.

Захар Пехтерев,

17 апреля 2022г.