Доказательство гипотезы Римана о нетривиальных нулях дзета-функции A proof of the Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function

© Н. М. Мусин

16.05.2022

УДК 511

Аннотация

Доказывается гипотеза Римана о нетривиальных нулях дзета-функции.

Если некоторое комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, то (σ_0, t_0) является решением некоторой системы двух уравнений двух действительных переменных σ и t.

Изучение одного из двух уравнений показало, что его правая часть строго монотонно возрастает при фиксированном $t = t_0 > 0$ как функции переменной $\sigma \in (0, 1)$. Из свойства симметричности нетривиальных нулей относительно прямой $Re\, s = \dfrac{1}{2}$ следует, что $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ключевые слова: гипотеза Римана; дзета-функция; нетривиальные нули.

Abstract

The Riemann hypothesis on nontrivial zeros of the zeta function is proved.

If a complex number $s_0 = \sigma_0 + it_0$ is a nontrivial zero, then (σ_0, t_0) is a solution to a system of two equations of two real variables σ and t.

Considering one of that two equations one can found that while a value $t = t_0 > 0$ is constant the right side of it strictly monotonically increases as a function of $\sigma \in (0, 1)$. As nontrivial zeros are symmetric about the line $Re\, s = \dfrac{1}{2}$ it follows that $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

Keywords: the Riemann hypothesis; zeta function; nontrivial zeros.

Введение и постановка задачи

Пусть $x \in \mathbb{R}$ - действительная переменная,
$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ – комплексная переменная, где $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$.

Известно [1], что при $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть представлена в виде

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \tag{1}$$

Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Перепишем равенство 1 в виде

$$\zeta(s) = s\left(\frac{1}{s-1} - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right)$$

Нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ содержатся в полосе $0 < \sigma < 1$, поэтому их поиск сводится к решению уравнения

$$\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \frac{1}{s-1} \tag{2}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^{s+1}} &= \frac{1}{x^{\sigma+1}}\left(\cos(t\ln x) - i\sin(t\ln x)\right),\\
\frac{1}{s-1} &= \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - i\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2},
\end{aligned}$$

поэтому уравнение 2 будет эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases}
\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},\\
\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx = \frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.
\end{cases} \tag{3}$$

Определение. *Систему 3 назовём характеристической.*

Как известно, нули дзета-функции Римана симметричны относительно действительной оси $t = 0$ и их нет на множестве $\left\{(\sigma, t) \,\middle|\, 0 < \sigma < 1, t = 0\right\}$, поэтому достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

В дальнейшем изложении всегда $0 < \sigma < 1$, $t > 0$. Кроме того, некоторый нетривиальный нуль $\sigma_0 + it_0$ будет считаться фиксированным.

Гипотеза Римана утверждает, что выполняется равенство $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.

О левых и правых частях уравнений характеристической системы

Введем следующие 4 функции:

$$u_1(\sigma,t)=\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\cos(t\ln x)dx,$$

$$v_1(\sigma,t)=\int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}}\sin(t\ln x)dx,$$

$$u_2(\sigma,t)=\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2},$$

$$v_2(\sigma,t)=\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}.$$

Таким образом, характеристическую систему можно записать в виде

$$\begin{cases} u_1(\sigma,t)=u_2(\sigma,t), \\ v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t). \end{cases} \tag{4}$$

Если $s=\sigma_0+it_0$ - нетривиальный нуль дзета-функции, то (σ_0,t_0) является решением системы 4 и, в частности, уравнения $v_1(\sigma,t)=v_2(\sigma,t)$; в дальнейшем изложении фиксируем значение $t=t_0>0$. Далее изучаем поведение левой и правой частей именно этого уравнения. Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства гипотезы не имеет.

Итак, имеет место равенство

$$v_1(\sigma_0,t_0)=v_2(\sigma_0,t_0) \tag{5}$$

Лемма. *Функция $w=v_2(\sigma,t_0)$ при фиксированном $t_0>0$ строго монотонно возрастает как функция от переменной $\sigma\in(0;1)$.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из неравенства

$$\frac{dv_2}{d\sigma}=-\frac{2(\sigma-1)t_0}{(t_0^2+(\sigma-1)^2)^2}>0$$

$\square$

Из леммы следует, что все значения функции $w=v_2(\sigma,t_0)$ при $\sigma\in(0;1)$ принадлежат интервалу $\left(\frac{t_0}{1+t_0^2},\frac{1}{t_0}\right)$.

Определение. *Прямоугольник $\left\{(\sigma,w)\;\middle|\;0<\sigma<1,\frac{t_0}{1+t_0^2}<w<\frac{1}{t_0}\right\}$ называется критическим.*

Таким образом, график функции $w = v_2(\sigma, t_0)$ целиком лежит в критическом прямоугольнике.

Замечание. *Графики функций $w = v_1(\sigma, t_0)$ и $w = v_2(\sigma, t_0)$ не обязаны пересекаться. Это означает, что при данном значении $t = t_0$ у дзета-функции нет нулей.*

Доказательство гипотезы Римана

Теорема. *Если дзета-функция Римана имеет нетривиальный нуль $s_0 = \sigma_0 + it_0$, где $t_0 > 0$, то $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$.*

Доказательство. Комплексное число $s_0 = \sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём, значит, пара (σ_0, t_0) является решением системы 4, поэтому (σ_0, t_0) является точкой пересечения графиков функций $v_1(\sigma, t_0)$ и $v_2(\sigma, t_0)$.

Как известно, если точка $\sigma_0 + it_0$ является нетривиальным нулём дзета-функции, то точка $1 - \sigma_0 + it_0$, то есть симметричная ей относительно прямой $Res = \dfrac{1}{2}$, тоже является нетривиальным нулём дзета-функции. Поэтому число $1 - \sigma_0$ является решением уравнения $v_1(\sigma, t_0) = v_2(\sigma, t_0)$. Точка $(1 - \sigma_0, t_0)$ попадает в критический прямоугольник.

Таким образом, должно выполняться равенство

$$v_1(1 - \sigma_0, t_0) = v_2(1 - \sigma_0, t_0). \tag{6}$$

Проверим, так ли это. Если $\sigma_0 = \dfrac{1}{2}$, то утверждение теоремы выполняется.

Пусть $\sigma_0 \neq \dfrac{1}{2}$, причём, для определённости, можно считать, что $\sigma_0 < \dfrac{1}{2}$. Тогда $\sigma_0 < 1 - \sigma_0$.

Выше в лемме было доказано, что функция $v_2(s, t_0)$ строго монотонно возрастает на $(0; 1)$, поэтому $v_2(\sigma_0, t_0) < v_2(1 - \sigma_0, t_0)$.

С другой стороны, так как $\sigma_0 + 1 < 2 - \sigma_0$ и $x \geqslant 1$, получаем

$$v_1(\sigma_0, t_0) = \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\sigma_0+1}} \sin(t_0 \ln x) dx > \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{2-\sigma_0}} \sin(t_0 \ln x) dx = v_1(1 - \sigma_0, t_0).$$

Учитывая равенство 5, получаем

$$v_2(1 - \sigma_0, t_0) > v_2(\sigma_0, t_0) = v_1(\sigma_0, t_0) > v_1(1 - \sigma_0, t_0).$$

Отсюда следует, что равенство 6 не выполняется.

Случай $\sigma_0 > \dfrac{1}{2}$ рассматривается аналогично.

□

Гипотеза Римана доказана.

Список литературы

[1] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел.* Изд-во Московского университета, 1984.