Альтернативный формализм на основе алгебры Клиффорда

Бабаев А. Х.

Аннотация: В статье представлен альтернативный формализм на основе обобщённой алгебры Клиффорда. Однородная ($\boldsymbol{\nabla\wedge F= 0}$) и неоднородная ($\boldsymbol{\nabla\bullet F=J}$) системы уравнений Максвелла объединены в одно уравнение. Дана трактовка 4-х мерного электромагнитного тока и некоторых калибровок, связанных с явными свойствами пространства.

Abstract:
The article presents the unification of two Maxwell's systems equations (homogeneous and inhomogeneous) within the generalized Clifford algebra. In this new formalism, an electromagnetic current and certain gauges acquire a geometric meaning associated with the properties of space.

Ключевые слова: Алгебра Клиффорда; внешнее и внутреннее произведения векторов; уравнения Максвелла; 4-х мерный электромагнитный ток; калибровка Лоренца; калибровочная инвариантность.

Keywords: Clifford algebra; outer and inner products of vectors; Maxwell's equations; 4-dimensional electromagnetic current; Lorentz gauge; gauge invariance.

УДК 537.8; 512.7

Введение

Известно, что в ковариантном виде уравнения Максвелла состоят из двух независимых систем[1]:

• однородной – $\boldsymbol{E^{ijkl} F_{ij;k} = 0}$;

• неоднородной – $\boldsymbol{F^{ik}{}_{;k} = J^i}$.

где $\boldsymbol{F_{ij}}$ – тензор электромагнитного поля; $\boldsymbol{J_j}$ – 4-х мерная плотность электромагнитного тока; $\boldsymbol{E^{ijkl} = \varepsilon^{ijkl}/(-g)^{o.5}}$ ($\boldsymbol{\varepsilon^{0123} = +1}$) – контравариантный антисимметричный тензор четвертого ранга; (-g) – определитель метрического тензора; $\boldsymbol{\varepsilon^{ijkl}}$ – антисимметричный тензор четвертого ранга в ортонормированном базисе;

$\boldsymbol{F_{ij;k} = D_k F_{ij} = DF_{ij} / \partial q^k}$ – ковариантная производная тензора электромагнитного поля по аргументу (координате) $\boldsymbol{q^k}$.

Актуальность.

А) Было бы логично объединить независимые системы уравнений Максвелла в единое уравнение. Марсель Рис [2] впервые объединил эти системы в пространстве Минковского, но не связал 4-х ток со свойствами и особенными точками пространства, т.е. «выбросил» особенности пространства: искривлённость и особые точки. Это сильно ограничило возможность алгебры Клиффорда для объединения систем уравнений Максвелла и 4-х тока.

Б) В классической физике электрический заряд и ток не связаны с явными свойствами пространства, например, с метрикой пространства (искривлённостью) и с особыми точками.

Новизна. В данной статье объединены уравнения Максвелла для любого пространства. Также 4-х ток и основные калибровочные условия (калибровка Лоренца, Кулона и т.д.) связываются с особыми точками пространства, где потенциал поля не определён и/или не существует предела.

Теоретические основы

В качестве изменения векторного поля вводим понятие локальной неоднородности векторного поля $\boldsymbol{B}$ с потенциалом $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \boldsymbol{A} \tag{1}$$

где $\nabla \equiv \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{D}/\partial \boldsymbol{q}^i \equiv \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{D}_i$ – оператор набла; $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{A}_j$ – разложение 4-х мерного потенциала $\boldsymbol{A}$ по векторам $\boldsymbol{e}^j$ криволинейного базиса;

Латинские буквы принимают значения от 0 до 3: $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\ldots$ =0,1,2,3., греческие – от 1 до 3: $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\ldots$=1,2,3.

В качестве ортонормированного базиса $(\boldsymbol{i}_i,\boldsymbol{i}_j)=\boldsymbol{\delta ij}$ берем базис:

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = \pm \mathbf{I}\, \boldsymbol{\delta}_{ij} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{i}_j$ – единичные векторы (орты) ортонормированного базиса; γ_i – матрицы Дирака; $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ – символ Кронекера; **I**– единичная 4x4 матрица.

Согласно сигнатуре пространства, в частности, Минковского, если $\boldsymbol{i=0}$ (или $\boldsymbol{j=0}$), то в равенстве (2) берём знак «+», если нет, то знак «-».

В произведениях базисных векторов $\boldsymbol{e}_j = \gamma_k\, \partial_j \boldsymbol{X}^k$ вместо обычных скалярных и векторных произведений используем произведения Клиффорда [3]:

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \tag{3}$$

где внутреннее произведение (inner product) –

$$\boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = \mathbf{0.5}\, (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i) \tag{4}$$

внешнее произведение (outer product) –

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \mathbf{0.5}\, (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i) \tag{5}$$

Примечание. Внутреннее произведение векторов – не есть скалярное произведение, как часто ошибочно употребляется в научной литературе. Внутреннее произведение двух векторов – есть симметричный тензор второго ранга, а скалярное произведение этих же векторов – есть просто скаляр, т.е. след (свёртка) симметричного тензора второго ранга.

$\boldsymbol{X^k}$ – функции от $\{\boldsymbol{q^i}\}$, т.е. функции перехода от криволинейной к ортонормированной системы координат.

С учётом (4) и (5) неоднородность векторного поля (1) в координатной форме записи имеет вид:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e^i} \bullet \boldsymbol{e^j} \boldsymbol{D_i} \boldsymbol{A_j} + \boldsymbol{e^i} \wedge \boldsymbol{e^j} \boldsymbol{D_i} \boldsymbol{A_j} \tag{6}$$

где $\boldsymbol{e^i} \bullet \boldsymbol{e^j} = \boldsymbol{g^{ij}}$ – метрический тензор; $\boldsymbol{e^i} \wedge \boldsymbol{e^j}$ – антисимметричный тензор второго ранга или бивектор.

В общем случае

а) в 4-х мерном пространстве антисимметричный тензор 4-го ранга $\boldsymbol{e_i} \wedge \boldsymbol{e_j} \wedge \boldsymbol{e_k} \wedge \boldsymbol{e_n}$ дуален к псевдоскаляру:

$$\boldsymbol{e_i} \wedge \boldsymbol{e_j} \wedge \boldsymbol{e_k} \wedge \boldsymbol{e_n} = -\gamma\, \boldsymbol{E_{ijkn}} \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{e^i} \wedge \boldsymbol{e^j} \wedge \boldsymbol{e^k} \wedge \boldsymbol{e^n} = \gamma\, \boldsymbol{E^{ijkn}} \tag{7.2}$$

где $\gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$;

$\boldsymbol{E_{ijkn}} = \boldsymbol{\varepsilon_{ijkn}}\, \boldsymbol{(-g)^{0.5}}$ $(\varepsilon_{0123} = -1)$; $\boldsymbol{E^{ijkn}} = \boldsymbol{\varepsilon^{ijkn}} / \boldsymbol{(-g)^{0.5}}$ $(\varepsilon^{0123} = +1)$ – абсолютно антисимметричные тензоры 4-го ранга в ковариантном и контравариантном виде;

Произведение $\boldsymbol{e_0} \wedge \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_3}$ численно равно «4-х мерному объёму», построенному из векторов $\boldsymbol{e_0}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$.

Доказательство равенств (7.1) и (7.2) приведено в **Приложении 1**.

б) Произведение $\boldsymbol{e_i} \wedge \boldsymbol{e_j} \wedge \boldsymbol{e_k}$ (антисимметричный тензор 3-го ранга) в 4-х мерном пространстве дуально псевдовектору:

$$\boldsymbol{e_i} \wedge \boldsymbol{e_j} \wedge \boldsymbol{e_k} = -\gamma\, \boldsymbol{E_{ijkn}}\, \boldsymbol{e^n} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{e^i} \wedge \boldsymbol{e^j} \wedge \boldsymbol{e^k} = \gamma\, \boldsymbol{E^{ijkn}}\, \boldsymbol{e_n} \tag{9}$$

Доказательство равенств (8) и (9) приведено в **Приложении 2**.

в) Произведение $\boldsymbol{e_i} \wedge \boldsymbol{e_j}$ (антисимметричный тензор 2-го ранга) в 4-х мерном пространстве дуально самому себе (антисимметричному псевдотензору 2-го ранга):

$$\boldsymbol{e_i} \wedge \boldsymbol{e_j} = -\gamma\, \boldsymbol{E_{ijkn}}\, \boldsymbol{e^k} \wedge \boldsymbol{e^n} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e^i} \wedge \boldsymbol{e^j} = \gamma\, \boldsymbol{E^{ijkn}}\, \boldsymbol{e_k} \wedge \boldsymbol{e_n} \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) доказываются аналогично предыдущим случаям, поэтому не будем утомлять читателя вычислениями.

Результаты

Уравнения Максвелла.

Чтобы получить единое уравнение электромагнетизма, берём градиент от уравнения (1):

$$\nabla \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \boldsymbol{A}) \tag{12}$$

Согласно произведению Клиффорда, имеем

$$\nabla \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{A} + \nabla \wedge \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{A}) + \nabla \bullet (\nabla \wedge \boldsymbol{A}) + \nabla \wedge \nabla \wedge \boldsymbol{A}$$

Упрощая, получим

$$\nabla \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{A}) + \nabla \bullet (\nabla \wedge \boldsymbol{A}) + \nabla \wedge \nabla \wedge \boldsymbol{A} \tag{13}$$

Уравнение (13) – есть единое уравнение электромагнетизма.

Однородная система уравнений Максвелла.

Теорема:

– верно утверждение:

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \boldsymbol{A} = \mathbf{0} \tag{14}$$

– уравнение (14) эквивалентно однородному уравнению Максвелла.

Если учесть, что

$$\boldsymbol{F} = \nabla \wedge \boldsymbol{A} \qquad (15),$$

то из (14) получим классический вид однородного уравнения Максвелла:

$$\nabla \wedge \boldsymbol{F} = \mathbf{0} \tag{16}$$

Уравнение (16) – есть однородное уравнение Максвелла.

Доказательство утверждения (14) приведено в **Приложении 3**.

4-х мерный электромагнитный ток

Запишем уравнение (13) с учётом (14):

$$\nabla \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{A}) + \nabla \bullet (\nabla \wedge \boldsymbol{A}) \tag{17}$$

Обозначим 4-х ток как

$$\boldsymbol{J} = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{A}) \tag{18}$$

Согласно формуле (18), 4-х ток имеет явный геометрический смысл:

4-х ток есть 4-х градиент от 4-х дивергенции потенциала поля. Ток существует только тогда, когда дивергенция не постоянная, т.е. $\nabla \bullet \boldsymbol{A} \neq \mathbf{const}$. Если $\nabla \bullet \boldsymbol{A} \neq \mathbf{const}$, то пространство имеет «дыры» и/или «сгущения». Назовём их «стоками» и/или «истоками». Именно поэтому электрический заряд бывает либо исток – положительный заряд (+), либо сток – отрицательный заряд (-).

Калибровка Лоренца

$\nabla \bullet \boldsymbol{A} = \mathbf{const}\ (=0)$ означает, что в рассматриваемой области 4-х ток не существует. В частности, калибровка Кулона $\nabla \bullet \boldsymbol{A} = \mathbf{const}\ (=0)$ тоже означает отсутствие 3-х токов в магнитостатических задачах, где временный компонент $\boldsymbol{A}$ игнорируется или предполагается равным нулю.

Калибровочная инвариантность

Если к потенциалу $\boldsymbol{A}$ добавить 4-х градиент скалярной функции

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \boldsymbol{u} \tag{19}$$

и потребовать выполнение условия

$$\nabla \bullet \nabla \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \tag{20}$$

то единое уравнение электромагнетизма (12) будет инвариантным. Преобразования (19) – есть калибровочная инвариантность.

Неоднородная система уравнений Максвелла

Учитывая обозначение 4-х тока (18) и тензора электромагнитного поля (15), единое уравнение электромагнетизма (17) запишем в виде:

$$\nabla \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \nabla \bullet \boldsymbol{F} \tag{21}$$

Так как тензор третьего ранга $\nabla \boldsymbol{B}$ в 4х мерном пространстве дуален псевдовектору, то можем написать

$$\nabla \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{A} \tag{22}$$

где $\boldsymbol{T}$ – тензор энергии-импульса; $\boldsymbol{\mu}$ – постоянный коэффициент. Внутреннее произведение $\boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{A}$ есть дуальный вектор к $\nabla \boldsymbol{B}$.

Тогда из уравнения (21) получим неоднородное уравнение Максвелла:

$$\nabla \bullet \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{A} - \boldsymbol{J} \tag{23}$$

Если $\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{A} \simeq \mathbf{0}$, тогда получим классическое выражение неоднородного уравнения Максвелла:

$$\nabla \bullet \boldsymbol{F} = - \boldsymbol{J} \tag{24}$$

Если $\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$, то классический закон Максвелла (24) не выполняется, точнее, приобретает более универсальный вид. Согласно уравнению (23), при высоких энергиях тензор энергии - импульса даёт вклад в 4-х ток.

Обозначая правую часть уравнения (23) как

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{A} - \boldsymbol{J} \tag{25}$$

получим из (23)

$$\nabla \bullet \boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q} \tag{26}$$

где $\boldsymbol{Q}$ - эффективный 4х ток (в частности, эффективный заряд [4]). Согласно (25), эффективный ток (заряд) зависит от энергии - импульса и не является постоянной величиной.

Таким образом, мы показали, что две независимые системы Максвелла (16) и (23) являются частями единого уравнения (12).

Обсуждения и выводы

1. Две системы уравнения Максвелла объединены в единое уравнение (12), т.е. однородная (14) и неоднородная (23) системы уравнений Максвелла являются частями единого уравнения (12);

2. 4-х ток $\boldsymbol{J} = \nabla(\nabla \bullet \boldsymbol{A})$ (18) имеет явный геометрический смысл: 4-х ток $\boldsymbol{J}$ является градиентом от дивергенции потенциала А, т.е. включает в себя сингулярности пространства. Изменение по времени «стока» и/или «истока» в пространстве – есть положительный и/или отрицательный электрический заряд.

3. Наложение ограничений, таких как калибровка Лоренца, Кулона и т.д. на уравнения – это не более, чем игнорирование сингулярности, т.е. тока. Условие (20) в калибровочной инвариантности (19) означает, что колебания и/или волны не влияют на 4-х ток.

4. Новая форма записи неоднородной системы Максвелла

$$\nabla \bullet \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\mu T \bullet A} - \boldsymbol{J} \qquad (23)$$

означает, что энергия - импульс дает вклад в 4-х электрический ток. При больших энергиях эффективный ток (25) $\boldsymbol{Q}$ будет меньше, чем $\boldsymbol{J}$.

Вероятно, с этим вкладом связана «бегучесть» угла Вайнберга, предсказанная в Стандартной модели [5] и подтверждённая в эксперименте [6], и вообще, «бегучесть констант» при высоких энергиях. Возможно, что этим же вкладом объясняется конфайнмент [7] в теории кварков. При больших вкладах энергии в 4-х ток разность будет отрицательной ($\boldsymbol{Q} = \mathbf{\mu T \bullet A} - \mathbf{J} < \mathbf{0}$), и появление свободных одиноких кварков становится невозможным.

Благодарность и признания.

Выражаем особую благодарность Гомазковой Л. Н. за помощь в корректировке русского варианта текста. Также мы признательны всем, кто посодействовал в появлении на свет этого труда.

Библиографический список:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, том 2. Москва, ФИЗМАТЛИТ, стр. 345-346.

2. Riesz, Marcel (1993) (1958), Clifford numbers and spinors, Fundamental Theories of Physics, 54, Kluwer Academic Publishers
Group, ISBN 978-0-7923-2299-3, MR 1247961.
3. Chris J. L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation
submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February 1994, pages 4-6.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984; Коллинз Дж., Перенормировка, пер. с англ., М., 1988. А. А. Владимиров.
5. Проблемы с углом Вайнберга в эксперименте NuTeV — страница из проекта «Текущие открытия в физике элементарных частиц (ФЭЧ)».
6. P. L. Anthony et al, SLAC E158 Coll., "Precision measurement of the weak mixing angle in Moller scattering", e-print hep--ex/0504049.
7. И.М. Дремин, А.Б. Кайдалов. Квантовая хромодинамика и феноменология сильных взаимодействий. Успехи физических наук (Март 2006 года). стр. 227.

Приложение 1

Доказательство формул (7.1) и (7.2):

Каждый вектор $\boldsymbol{e_i}$ обобщенного базиса разложим по каноническому базису и произведение $\boldsymbol{e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_n}$ напишем в виде:

$$\boldsymbol{e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_n = (\partial_i X^p\, \partial_j X^q\, \partial_k X^r\, \partial_n X^s)\, \gamma_p\, \gamma_q\, \gamma_r\, \gamma_s}$$

Здесь $\boldsymbol{i, j, k, n}$ (также $\boldsymbol{p, q, r, s}$) не равны друг другу и принимают значения 0;1;2;3.

Простые вычисления показывают, что

$$e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_n = \begin{vmatrix} \partial_i X^0 & \partial_i X^1 & \partial_i X^2 & \partial_i X^3 \\ \partial_j X^0 & \partial_j X^1 & \partial_j X^2 & \partial_j X^3 \\ \partial_k X^0 & \partial_k X^1 & \partial_k X^2 & \partial_k X^3 \\ \partial_n X^0 & \partial_n X^1 & \partial_n X^2 & \partial_n X^3 \end{vmatrix} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{vmatrix} \partial_i X^0 & \partial_i X^1 & \partial_i X^2 & \partial_i X^3 \\ \partial_j X^0 & \partial_j X^1 & \partial_j X^2 & \partial_j X^3 \\ \partial_k X^0 & \partial_k X^1 & \partial_k X^2 & \partial_k X^3 \\ \partial_n X^0 & \partial_n X^1 & \partial_n X^2 & \partial_n X^3 \end{vmatrix} \gamma$$

Этот детерминант возведём в квадрат:

$$\begin{vmatrix} \partial_i X^0 & \partial_i X^1 & \partial_i X^2 & \partial_i X^3 \\ \partial_j X^0 & \partial_j X^1 & \partial_j X^2 & \partial_j X^3 \\ \partial_k X^0 & \partial_k X^1 & \partial_k X^2 & \partial_k X^3 \\ \partial_n X^0 & \partial_n X^1 & \partial_n X^2 & \partial_n X^3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \partial_i X^0 & \partial_i X^1 & \partial_i X^2 & \partial_i X^3 \\ \partial_j X^0 & \partial_j X^1 & \partial_j X^2 & \partial_j X^3 \\ \partial_k X^0 & \partial_k X^1 & \partial_k X^2 & \partial_k X^3 \\ \partial_n X^0 & \partial_n X^1 & \partial_n X^2 & \partial_n X^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \partial_i X^0 & \partial_i X^1 & \partial_i X^2 & \partial_i X^3 \\ \partial_j X^0 & \partial_j X^1 & \partial_j X^2 & \partial_j X^3 \\ \partial_k X^0 & \partial_k X^1 & \partial_k X^2 & \partial_k X^3 \\ \partial_n X^0 & \partial_n X^1 & \partial_n X^2 & \partial_n X^3 \end{vmatrix}^T$$

Упрощаем

$$\begin{vmatrix} \partial_i X^0 & \partial_i X^1 & \partial_i X^2 & \partial_i X^3 \\ \partial_j X^0 & \partial_j X^1 & \partial_j X^2 & \partial_j X^3 \\ \partial_k X^0 & \partial_k X^1 & \partial_k X^2 & \partial_k X^3 \\ \partial_n X^0 & \partial_n X^1 & \partial_n X^2 & \partial_n X^3 \end{vmatrix}^2 = -\begin{bmatrix} g_{ii} & g_{ij} & g_{ik} & g_{in} \\ g_{ji} & g_{jj} & g_{jk} & g_{jn} \\ g_{ki} & g_{kj} & g_{kk} & g_{kn} \\ g_{ni} & g_{nj} & g_{nk} & g_{nn} \end{bmatrix} = -g$$

Извлекая из корня последнее выражение и обобщая, получим формулу (7.1). Доказательство формулы (7.2) аналогично.

Мы доказали утверждения (7.1) и (7.2).

Приложение 2

Доказательство формул (8) и (9):

Известно, что в 4-х мерном пространстве антисимметричный тензор 3-го ранга дуален псевдовектору. Это запишем в виде:

$$\boldsymbol{e_i \wedge e_j \wedge e_k = \Omega\, e_m} \tag{2A}$$

$\boldsymbol{\Omega}$– пока неизвестный коэффициент.

Обе стороны равенства (2А) умножим на $\boldsymbol{e_n}$ справа:

$$\boldsymbol{e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_n = \Omega\, e_m \bullet e_n}$$

Упрощаем: $\boldsymbol{-\gamma\, E_{ijkn} = \Omega\, g_{mn}}$

Отсюда $\boldsymbol{\Omega = -\gamma\, g^{mn} E_{ijkn}}$

Подставляя это выражение вместо $\boldsymbol{\Omega}$ в равенстве (2А), получим равенство (8).

Доказательство равенства (9) аналогично.

Мы доказали утверждения (8) и (9).

Приложение 3

Доказательства формул (14) и (16).

1. доказательство утверждения (14), т.е. $\boldsymbol{\nabla \wedge \nabla \wedge A = 0}$.

Учитывая $\boldsymbol{e^k \wedge e^i \wedge e^j \wedge e_n = \gamma\, \Omega\, E^{kijn} g_{nm}\, e^m}$, формулу (14) запишем в координатной форме:

$$\boldsymbol{E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j = 0}$$

Меняя местами индексы $\boldsymbol{i,j,k}$ в этом уравнении и упрощая, получим:

$$\boldsymbol{E^{kijn} (\nabla_k \nabla_i A_j + \nabla_j \nabla_k A_i + \nabla_i \nabla_j A_k - \nabla_i \nabla_k A_j - \nabla_j \nabla_i A_k - \nabla_k \nabla_j A_i) = 0}$$

Известно, что $\boldsymbol{\nabla_i \nabla_j A_k - \nabla_j \nabla_i A_k = - R^p{}_{kij} A_p}$

где $\boldsymbol{R^p{}_{kij}}$ – тензор Римана.

Подставляя выражение тензора Римана в предыдущее уравнение, получим

$$\boldsymbol{- R^p{}_{kij} A_p - R^p{}_{jki} A_p - R^p{}_{ijk} A_p = - A_p(R^p{}_{kij} + R^p{}_{jki} + R^p{}_{ijk}) = 0}$$

Это уравнение действительно равно нулю, так как выражение в скобке тождественно равно нулю.

2. доказательство эквивалентности (14) и однородного уравнения Максвелла.

Формулу $\boldsymbol{E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j = 0}$ преобразуем:

$$\boldsymbol{0 = E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j = E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j + E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j = E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j + E^{kjin} \nabla_k \nabla_j A_i =}$$

$$\boldsymbol{= E^{kijn} \nabla_k \nabla_i A_j - E^{kijn} \nabla_k \nabla_j A_i = E^{kijn} \nabla_k (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) = E^{kijn} \nabla_k F_{ij} = 0}$$

Утверждения доказаны.