Сохранение 4-х мерного электромагнитного тока в формализме, основанном на алгебры Клиффорда

Бабаев А. Х.

Аннотация. В статье получены уравнения непрерывности и закон сохранения вихревого 4-х тока в новом формализме на основе обобщенной алгебры Клиффорда (на случай криволинейных координат).

Abstract. The article presents the derivation of the continuity equation and the conservation law of the eddy 4-current on the generalized Clifford algebra (curvilinear coordinates' case) based formalism.

Ключевые слова: внешнее и внутреннее произведения векторов; 4-х мерный электромагнитный ток; уравнение непрерывности; вихревой ток.

Keywords: inner and outer product of vectors; 4-dimensional electromagnetic current; continuity equation; eddy current.

Введение

В классической физике электрический заряд и ток [1]

$$J^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \tag{1}$$

не связаны с явными свойствами пространства, например, с метрикой пространства (искривленностью) и с особыми точками (сингулярностью). Плотность электрического заряда (ρ) вводится ниоткуда, как бы, сама собой разумеющаяся величина. Также закон сохранения заряда (уравнение непрерывности)

$$J^i_{;i} = \frac{\partial_i(\sqrt{-g}J^i)}{\sqrt{-g}} = 0 \tag{2}$$

выводится [1] из уравнения неразрывности гидродинамики.

Было бы логично получить уравнение непрерывности для электромагнитного 4-х тока в рамках нового формализма на основе обобщенной алгебры Клиффорда, предложенной нами в предыдущей статье [2].

Новинка. В рамках данной концепции формализма при выводе сохраняющихся величин наряду с законом сохранения электрического заряда (уравнения непрерывности) появился нетривиальный закон – закон сохранения вихревого 4-х тока. Говоря простым языком, сохраняется не только 4-х мерная дивергенция, но и «4-х мерный» ротор 4-х тока.

Теоретические основы

В статье [2] была дана мера локальной неоднородности векторного поля с потенциалом A:

$$B = \nabla A \tag{3}$$

Если произведение базисных векторов в уравнении (3) разделить на внешнее и внутреннее произведения Клиффорда [2], то неоднородность векторного поля (3) в координатной форме имеет вид:

$$B = e^i \bullet e^i \mathcal{D}_i A_j + e^i \wedge e^i \mathcal{D}_i A_j \quad (4)$$

где $e^i \bullet e^i = g^{ij}$ – метрический тензор; $e^i \wedge e^i$ – антисимметричный тензор второго ранга или бивектор.

Таким образом, локальная неоднородность векторного поля состоит из:

а) деформации – $e^i \bullet e^i \mathcal{D}_i A_j$

б) вращения – $e^i \wedge e^i \mathcal{D}_i A_j$

Также в [2] был выведен общий вид единого уравнения электромагнитного поля:

$$\nabla B = \nabla(\nabla A) \quad (5)$$

и замена

$$\nabla B = \mu T \bullet A \quad (6).$$

И, наконец, было введено математическое обозначение 4-х мерного тока:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{A}) \quad (7)$$

В результате мы получили [2] единое уравнение электромагнетизма, которое объединяет две независимые системы Максвелла:

$$\mu T \bullet A = \nabla(\nabla \bullet A) + \nabla \bullet (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge \nabla \wedge \mathrm{A} \quad (6)$$

где

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Результаты

Сохранение 4-х тока.

Чтобы получить уравнение непрерывности и сохранение вихревого 4-х тока, берем градиент из уравнения (6). С учетом (7), запишем результат:

$$\nabla(\mu T \bullet A) = \nabla J + \nabla(\nabla \bullet F) \quad (8)$$

Согласно произведению Клиффорда, разделяя уравнение (8) на симметричную (внутреннее произведение) и антисимметричную (внешнее произведение) части, получим:

$$\nabla \bullet (\mu T \bullet A) = \nabla \bullet J + \nabla \bullet (\nabla \bullet F) \quad (9)$$

$$\nabla \wedge (\mu T \bullet A) = \nabla \wedge J + \nabla \wedge (\nabla \bullet F) \quad (10)$$

1) уравнение непрерывности для 4-х тока.

В уравнении (9) имеет место равенство:

$$\nabla \bullet (\nabla \bullet F) = 0 \quad (11)$$

Доказательство (11) приведено в **приложении 1**.

Тогда из остатков уравнения (9) получим:

$$\nabla \bullet (C - J) = 0 \quad (12)$$

где $C = \mu T \bullet A$.

Примечание:

Если $C = const$ (в частности, $C = 0$ или $\nabla \bullet C$ очень малая величина), то мы получим классическое выражение уравнения непрерывности (2).

Предположим, что $C \neq const$. Преобразуем уравнение (12).

Очевидно, что

$$\nabla \bullet C = \nabla \bullet (\mu T \bullet A) = \mu g^{nk} \mathcal{D}_n \left(g^{ij} T_{ki} A_j \right) = \mu g^{nk} g^{ij} T_{ki;n} A_j + \mu g^{nk} g^{ij} T_{ki} A_{j;n} =$$

$$= 0 + \mu g^{nk} g^{ij} T_{ki} A_{j;n} = \mu T^{jn} A_{j;n}$$

Так как $g^{nk} g^{ij} T_{ki;n} = T^{jn}_{;n} = 0$, то из уравнения (12) получим:

$$\boldsymbol{\mu T^k_n A^n_{;k} = J^k_{;k}} \tag{13}$$

Уравнение (13) – в общем случае дифференциальная форма закона сохранения энергии – импульса в элементарном объёме.

Увеличение 4-х тока ($J^k_{;k} > 0$ или уменьшение ($J^k_{;k} < 0$) из-за внешнего воздействия приводит к увеличению или уменьшению деформации 4-х потенциала $\mu T^k_n A^n_{;k}$ [3].

Преобразуем (13):

$$\mu T^k_n A^n_{;k} = 0.5\mu \left(g^{nk} g^{ij} T_{ki} A_{j;n} + g^{ij} g^{kn} T_{ik} A_{n;j} \right) = 0.5\mu g^{nk} g^{ij} T_{ki} \left(A_{j;n} + A_{n;j} \right) =$$

$$= 0.5\mu g^{nk} g^{ij} T_{ki} \varepsilon_{jn} = 0.5\mu T^{ik} \varepsilon_{ik}$$

где $\varepsilon_{jn} = \frac{A_{j;n} + A_{n;j}}{2}$ – 4-х мерный тензор деформации поля A.

Теперь уравнение непрерывности (13) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\mu T^{ik} \varepsilon_{ik} = J^k_{;k}} \tag{14}$$

Мы получили закон сохранения 4-х тока в общем случае (при наличии деформации поля) в рамках нового формализма. При этом закон сохранения электрического заряда не нарушается, так как суммарный заряд состоит из «истоков» (положительных) и «стоков» (отрицательных) зарядов [2]:

$$J^k_{;k} = J^{+k}_{;k} + J^{-k}_{;k}$$

2) сохранение вихревого 4-х тока.

Теперь рассмотрим уравнение (10). Так как в обозначении 4-х тока (7) произведение $\nabla \bullet A$ – есть скалярная величина, то имеет место равенство:

$$\boldsymbol{\nabla \wedge J = 0} \tag{15}$$

Действительно

$$\nabla \wedge J = (e^n \wedge e^k) \mathcal{D}_n \mathcal{D}_k \left(\mathcal{D}_i A^i \right) = 0.5 (e^n \wedge e^k) \left(\mathcal{D}_n \mathcal{D}_k \left(\mathcal{D}_i A^i \right) - \mathcal{D}_k \mathcal{D}_n \left(\mathcal{D}_i A^i \right) \right) = 0$$

Уравнение (15) – есть закон сохранения вихревого 4-х тока.

Уравнение (15) запишем в «привычном» 3-х мерном виде:

$$e^n \wedge e^k \mathcal{D}_n J_k = e^\alpha \wedge e^0 \mathcal{D}_\alpha J_0 + \mathcal{D}_0 (e^0 \wedge e^\alpha J_\alpha) + e^\beta \wedge e^\mu (\mathcal{D}_\beta J_\mu - \mathcal{D}_\mu J_\beta)$$

где α, β, μ=1,2,3,также $\beta < \mu$.

Согласно уравнению (11) в [2]

$$e^\beta \wedge e^\mu \left(\mathcal{D}_\beta J_\mu - \mathcal{D}_\mu J_\beta \right) = i E^{\beta\mu\lambda 0} e_\lambda \wedge e_0 \left(\mathcal{D}_\beta J_\mu - \mathcal{D}_\mu J_\beta \right) = -rot\boldsymbol{J}$$

и обозначая $e^0 \wedge e^\alpha J_\alpha = -\boldsymbol{J}$; $J_0 = \rho$; $e^\alpha \wedge e^0 \mathcal{D}_\alpha = \boldsymbol{\nabla}$, запишем уравнение (15) в виде:

$$-\boldsymbol{\nabla}\rho + \mathcal{D}_t \boldsymbol{J} + rot\boldsymbol{J} = 0 \tag{16}$$

где ρ – плотность заряда, $\boldsymbol{J}$ – 3-х мерный ток, $\boldsymbol{\nabla}$- трехмерный набла оператор.

Теперь этот закон покажем наглядно на Рисунке 1. Предположим, что носителями тока являются положительные заряды.

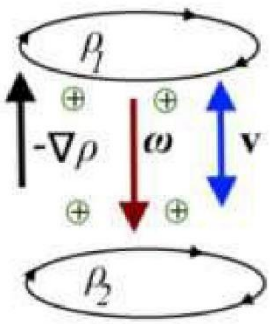

Рис 1.

Для простоты считаем: $\rho_1 < \rho_2$ и $rot\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathcal{D}_t \boldsymbol{J} = \boldsymbol{v}$.

На рисунке 1 показано: 1) направление потока зарядов ($-\boldsymbol{\nabla}\rho$), которое противоположно направлению градиента; 2) направления ротора ($rot\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\omega}$); 3) изменения по времени вектора 3-х тока ($\mathcal{D}_t \boldsymbol{J} = \boldsymbol{v}$); 4) направление вращения ротора тока (сплошная линия с направлением по кругу).

Если $-\boldsymbol{\nabla}\rho + \boldsymbol{v} > 0$, т.е. если суммарный вектор направлен вверх, то ротор будет направлен вниз. Если $-\boldsymbol{\nabla}\rho + \boldsymbol{v} < 0$, то ротор будет направлен вверх.

Таким образом, изменение суммарного вектора $-\nabla\rho + v$ компенсируется вектором ротора (Правило Ленца).

Рассмотрим оставшуюся часть уравнения (10) (без $\nabla \wedge J = 0$):

$$\nabla \wedge (\mu T \bullet A) = \nabla \wedge (\nabla \bullet F) \tag{17}$$

Уравнение (17) дает уравнение Эйнштейна. Действительно,

$$\nabla \wedge (\nabla \bullet F) = \nabla \wedge \big(\nabla \bullet (\nabla \wedge \mathrm{A})\big) = e^n \mathcal{D}_n \wedge (e^k \bullet (e^i \wedge e^j) \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i A_j)$$

Согласно формуле cross - произведения векторов Клиффорда $x \bullet (y \wedge z) = (x \bullet y)z - (x \bullet z)y \Longrightarrow$

$$e^k \bullet \left(e^i \wedge e^j\right) = \left(e^k \bullet e^i\right) e^j - \left(e^k \bullet e^j\right) e^i = g^{ki} e^j - g^{kj} e^i$$

из предыдущего уравнения получим:

$$e^n \mathcal{D}_n \wedge \left(e^k \bullet \left(e^i \wedge e^j\right) \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i A_j\right) = e^n \mathcal{D}_n \wedge \left(g^{ki} e^j \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i A_j - g^{kj} e^i \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i A_j\right) =$$

$$= e^n \wedge e^j g^{ki} \mathcal{D}_n \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i A_j - e^n \wedge e^i g^{kj} \mathcal{D}_n \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i A_j = e^n \wedge e^j \mathcal{D}_n (\mathcal{D}_k \mathcal{D}^k A_j) - e^n \wedge e^i \mathcal{D}_n (\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i A^j)$$

Подставляя эту замену в уравнение (17), мы получим:

$$\nabla \wedge (\mu T \bullet A) = e^n \wedge e^j \mathcal{D}_n (\mathcal{D}_k \mathcal{D}^k A_j) - e^n \wedge e^i \mathcal{D}_n (\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i A^j) \tag{18}$$

Произведем замену:

$$\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i A^j = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j A^j - A^p R^j_{pij} = \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j A^j - A^p R_{pi},$$

так как $\mathcal{D}_j \mathcal{D}_i A^j - \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j A^j = -A^p R_{pi}$; R^j_{pij} – тензор Римана, R_{pi} – тензор Риччи.

Также произведем ещё замену:

$$\mathcal{D}_k \mathcal{D}^k A_j = \Delta A_j = (\Lambda + \frac{1}{2} R) \delta^m_j A_m$$

где Λ – собственные числа оператора Δ; $K = \frac{R}{2}$ – гауссова кривизна, которая равна половине скалярной (римановой) кривизны [4]. Λ никак не зависит от метрики пространства, но K самый простой внутренний инвариант гиперповерхности (Theorema Egregium), который зависит от метрики пространства [5]. Проще говоря, $\varLambda$ является собственными числами собственного вектора оператора Δ, то K является числами присоединенного вектора, соответствующего значениям $\varLambda$.

Подставляем эти замены в (18). Тогда уравнение (18) принимает вид:

$$\mu e^n \wedge e^j \mathcal{D}_n\left(T_{ji}A^i\right) = e^n \wedge e^j \mathcal{D}_n((\varLambda + \tfrac{1}{2}R)\delta_j^m A_m) - e^n \wedge e^i \mathcal{D}_n(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j A^j - A^p R_{pi})$$

Так как $e^n \wedge e^i \mathcal{D}_n\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j A^j\right) = 0$, т.е. выполняется уравнение (15), то получим

$$e^n \wedge e^j \mathcal{D}_n\left(A^i R_{ij} + (\varLambda + 0.5R)\delta_j^i A_i - \mu T_{ji}A^i\right) = 0$$

Это уравнение выполняется только в том случае, если выражение в скобке (под производной) равно нулю. Упрощая, получим:

$$\boldsymbol{R_j^i + (\varLambda + 0.5R)\delta_j^i = \mu T_j^i} \tag{19}$$

(19) – это уравнение Эйнштейна.

Обсуждения и выводы

1. Уравнение непрерывности (14) означает, что изменение деформации поля порождает изменение 4-х тока. Например, фотон (электрически нейтральный) деформирует поле ядра и порождает пары частица-античастица. При этом закон сохранения суммарного заряда не нарушается, так как общий заряд состоит из суммы положительных и отрицательных зарядов – $\mathcal{D}_0(J_0^+ + J_0^-) = 0$.
2. Кроме уравнения непрерывности (14) сохраняется и «4-х мерный» ротор 4- тока $\nabla \wedge J = 0$ – уравнение (15). В частности, из (16) («привычный» вид (15)) видно, что если градиент равен нулю ($\boldsymbol{\nabla}\rho = 0$, то изменение тока компенсируется направлением вихря тока (ротором $rot\boldsymbol{J}$): $rot\boldsymbol{J} + \partial_t\boldsymbol{J} = 0$. Если ток увеличивается $\partial_t\boldsymbol{J} > 0$, то вихревой ток уменьшается $rot\boldsymbol{J} < 0$ и наоборот, т.е. изменение тока и вихревой ток всегда направлены противоположно.
Если градиент не равен нулю ($\nabla\rho \neq 0$), то направление вращения вихря тока зависит от разности векторов $\boldsymbol{\nabla}\rho - \partial_t\boldsymbol{J}$.
3. Возможно, этот закон (14) имеет место не только для электромагнитных явлений, но также и для механических движений и термодинамических процессов, например, при сильной деформации среды механическими волнами (ультразвуком) – в сонолюминесценции [6]. Также закон сохранения вихревого тока (16) может иметь место в движениях жидкости (водовороты), атмосферных явлениях (смерч, торнадо и т.д.).
4. Несколько неожиданным является то, что уравнения Эйнштейна можно получить из неоднородной системы уравнений Максвелла. Это указывает на единую природу гравитации и электромагнетизма.

Приложение 1

Доказательство формулы (11).

$$\nabla \bullet (\nabla \bullet F) = e^n \bullet \mathcal{D}_n\left(e^i \bullet e^j e^k \mathcal{D}_i F_{jk}\right) = e^n \bullet e^k \mathcal{D}_n\left(g^{ij}\mathcal{D}_i F_{jk}\right) = g^{nk}g^{ij}\mathcal{D}_n\mathcal{D}_i F_{jk}$$

Разложим F_{jk} и поменяем местами индексы k и j, также i и n в первом слагаемом (так как идет суммирование):

$$g^{nk}g^{ij}(\mathcal{D}_n\mathcal{D}_i\mathcal{D}_jA_k - \mathcal{D}_n\mathcal{D}_i\mathcal{D}_kA_j) = g^{ij}g^{nk}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_n\mathcal{D}_kA_j - g^{nk}g^{ij}\mathcal{D}_n\mathcal{D}_i\mathcal{D}_kA_j =$$

Учитывая дважды ковариантное дифференцирование тензора $\mathcal{D}_kA_j$, имеем:

$$= g^{ij}g^{nk}(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_n\mathcal{D}_kA_j - \mathcal{D}_n\mathcal{D}_i\mathcal{D}_kA_j) = g^{ij}g^{nk}(\mathcal{D}_pA_jR^p_{kin} + \mathcal{D}_kA_pR^p_{jin}) =$$

$$= g^{ij}g^{nk}\mathcal{D}_pA_jR^p_{kin} + g^{ij}g^{nk}\mathcal{D}_kA_pR^p_{jin} = g^{ij}\mathcal{D}_pA_jR^p_i - g^{nk}\mathcal{D}_kA_pR^p_n = g^{nk}\mathcal{D}_pA_kR^p_n - g^{nk}\mathcal{D}_kA_pR^p_n =$$

$$= \mathcal{D}_pA_kR^{pk} - \mathcal{D}_kA_pR^{kp} = 0$$

так как $R^{pk} = R^{kp}$.

Утверждение (11) доказано.

Библиографический список:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, том 2. Москва, ФИЗМАТЛИТ, стр. 331-332.

2. Бабаев А. Х. Альтернативный формализм на основе алгебры Клиффорда. SCI-ARTICLE.RU. № 40 (декабрь) 2016, стр. 34.

3. Алфутов Н.А., Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М., «Машиностроение», 1978. стр. 39 – 77.

4. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия (6-е издание). М. Наука, 1974.

Более лаконичная форма изложения здесь:
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0

5. Carlo Friedrico Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*

Более лаконичная форма изложения здесь: https://ru.wikipedia.org/wiki/Theorema_Egregium

6. T. J. Matula, R. A. Roy, P. D. Mourad, W. B. McNamara, K. S. Suslick. Comparison of Multibubble and Single-Bubble Sonoluminescence Spectra (англ.) // Phys. Rev. Lett.. — 25 сентября 1995. — Vol. 75, no. 13. — P. 2602—2605. — ISSN 0031-9007

Заметка. Данная статья является математически более строгой версией статьи автора, ранее опубликованной в рецензируемом журнале sci-article.ru №42 (февраль), 2017.: https://sci-article.ru/stat.php?i=1485057429