

О ФОКУСИРОВКЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ТОРОИДАЛЬНОМ ПУЗЫРЬКОВОМ КЛАСТЕРЕ

*И.К. Гималтдинов, А.А. Насыров, А.А. Гималтдинова,
А.А. Гиззатуллина, М.Н. Галимзянов, Е.Ю. Кочанова*

450064, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Космонавтов, ФГБОУ ВО
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Исследована динамика волн в цилиндрическом канале, содержащем тороидальный пузырьковый кластер. Показано, что наличие кластера приводит к фокусировке волн в канале. Анализируется зависимость максимальной амплитуды волны давления, формирующейся в канале, от параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия.

Ключевые слова: *волна давления, пузырьковая завеса, амплитуда давления, фокусировка, цилиндрический канал.*

Задачи фокусировки энергии волны в жидкости связаны с проблемой создания гидроакустических аналогов лазерных систем, которые сначала могут поглощать внешнее воздействие, а потом переизлучать эту энергию с существенным увеличением амплитуды и возможной концентрацией энергии в заданном направлении [1,2]. Отметим работы, посвященные анализу фокусировки энергии волн пузырьковыми средами. В работе [3] изучена динамика распространения импульсных сигналов в жидкости, содержащей пузырьковую завесу конечных размеров. Показано, что в зависимости от временной протяженности первоначального импульса внутри завесы может происходить нарастание амплитуды давления больше, чем амплитуда исходного сигнала. Исследованию динамики волн давления в плоском канале с расположенной под углом границей пузырьковой и “чистой” жидкостей посвящена работа [4]. В этой работе показано, что при переходе границы

«водовоздушная смесь–вода» отражение для волн, падающих на эту границу со стороны водовоздушной смеси, аналогично отражению от жесткой стенки, что влечет за собой интерференцию волн. В [5] в рамках модели Иорданского, Когарко, Виингардена (ИКВ) выполнены численные исследования «накачки» сферического пузырькового кластера и формирования в кластере башнеобразного импульса давления. Показано, что за счет изменения величины объемной концентрации газовой фазы удастся регулировать координату пятна фокусировки волны. При этом амплитуда волны, излученная кластером в жидкость, может на 1-2 порядка превышать амплитуду волны, возбуждающей кластер. Результаты численного моделирования ударной волны с тороидальным пузырьковым кластером в жидкости и возникновение направленного излучения в жидкость приведено в [6].

В данной работе рассмотрена динамика волн в цилиндрическом канале, содержащем тороидальный пузырьковый кластер (рис.1). Анализируется зависимость максимальной амплитуды волны давления, формирующейся в канале, от параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия.

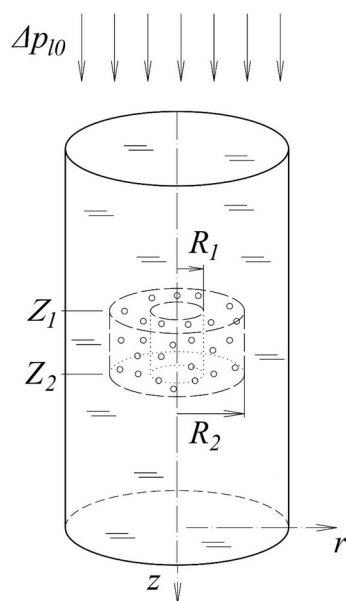


Рис.1. Схема задачи. L_z , R_c – длина и радиус канала, Z_1 и Z_2 – координаты кластера, R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы кластера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащем тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью (рис. 1). Волновое движения в канале инициируется мгновенным повышением давления на границе $z=0$ от равновесного p_0 до некоторого амплитудного значения Δp_0 и поддерживается все время расчета. Требуется определить динамику волнового процесса в канале при $t>0$.

Для описания волнового движения, принимая общие допущения для пузырьковых жидкостей, запишем систему макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии [7].

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{v_r}{r} + \rho_i \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0, (i=l, g),$$

$$\frac{dn}{dt} + n \frac{v_r}{r} + n \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\rho_l^0 \frac{dv_r}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial r} = 0, \quad \rho_l^0 \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial z} = 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = - \frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma-1)}{a} q,$$

$$w = \frac{da}{dt}, \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = 4/3\pi a^3, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l,$$

где a - радиус пузырьков, γ - показатель адиабаты для газа, p_i - давления фаз, ρ_i^0 - истинные плотности фаз, α_i - объемные содержания фаз, q - интенсивность теплообмена, n - число пузырьков в единице объема, w - радиальная скорость пузырьков, v_r и v_z - радиальная и осевая составляющие скорости. Нижними индексами $i=l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения будем полагать, что $w = w_A + w_R$, где w_R определяется из уравнения Релея – Ламба, w_A определяется из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a_l} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}},$$

где ν_l - вязкость жидкости, C_l - скорость звука в «чистой» жидкости.

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ – калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 B T_g,$$

где B - газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем индекс 0 внизу относится к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q_g задается приближенным конечным соотношением [8]

$$q_g = \text{Nu}_g \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu}_g = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_g}, & \text{Pe}_g \geq 100 \\ 10, & \text{Pe}_g < 100, \end{cases} \quad \text{Pe}_g = 12(J_g - 1) \frac{T_g}{|T_g - T_0|} \frac{a |w|}{\kappa_g}, \quad k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g}.$$

Здесь $T_0 = \text{const}$ - температура жидкости, Nu и Pe - числа Нуссельта и Пекле, κ_g - коэффициент температуропроводности газа, c_g и λ_g - теплоемкость и теплопроводность газа.

2. Методика численного расчета

Для численного анализа задачи об эволюции волн давления в цилиндрическом канале, содержащем тороидальный коаксиальный пузырьковый кластер, удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной в разд.1, записанной в лагранжевых координатах. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах первоначальные

границы неоднородностей остаются неподвижными [8]. Из уравнений, приведенных в разд.1, после некоторых преобразований можно получить следующую систему в лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{r}{r_0} \frac{1}{J\rho} \left(\frac{\partial p_l}{\partial r_0} \frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial p_l}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = - \frac{r}{r_0} \frac{1}{J\rho} \left(\frac{\partial p_l}{\partial r_0} \frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial p_l}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} \right), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v_r,$$

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = - \frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q,$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = w = w_R + w_A,$$

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} = \left(\frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4v_l \frac{w_R}{a} \right) \frac{1}{a}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}},$$

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = 3 \frac{\alpha_g w}{a} - \frac{\alpha_g}{J} \frac{\partial J}{\partial t},$$

$$\frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{C_l^2 \rho_l^0}{1 - \alpha_{g0}} \left(\frac{3\alpha_g w}{a} - \frac{\partial J}{\partial t} \left(\frac{\rho_{l0}}{\rho_l^0 J^2} + \frac{\alpha_g}{J} \right) \right),$$

$$q_g = \text{Nu}_g \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu}_g = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}_g}, & \text{Pe}_g \geq 100 \\ 10, & \text{Pe}_g < 100, \end{cases} \quad \text{Pe}_g = 12(\gamma_g - 1) \frac{T_g}{|T_g - T_l|} \frac{a |w|}{\kappa_g}, \quad k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g},$$

$$p_l = p_0 + C_l^2 (\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 B T_g,$$

$$\left(J = \frac{r}{r_0} \left(\frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial r}{\partial z_0} \right), \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{v_r J}{r} + \frac{r}{r_0} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} + \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial v_r}{\partial r_0} - \frac{\partial v_z}{\partial r_0} \frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial v_r}{\partial z_0} \right) \right),$$

где z_0 и r_0 - лагранжевы переменные, в качестве которых берутся

начальные эйлеровы координаты, J - якобиан перехода от лагранжевых к эйлеровым переменным [8].

Приведенная выше система решалась численно по явной схеме. Приведенные уравнения, из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки пузырьков, являются системой с естественной диссипацией, поэтому не требуется вводить искусственную вязкость.

Приведем принцип построения разностной схемы, которая принята для решения данной задачи. Для аппроксимации дифференциальных уравнений используем равномерную шахматную сетку

$$(z_{0i}, r_{0j}, t_k), \quad (z_{0i+1/2}, r_{0j+1/2}, t_k),$$

$$z_{0i+1} = z_{0i} + h_{z0}, \quad z_{0i+1/2} = z_{0i} + 0.5h_{z0}, \quad i = 0, 1, \dots, M_1 - 1,$$

$$r_{0j+1} = r_{0j} + h_{r0}, \quad r_{0j+1/2} = r_{0j} + 0.5h_{r0}, \quad j = 0, 1, \dots, M_2 - 1,$$

$$z_{00} = 0, \quad z_{0M_1} = L_z,$$

$$r_{00} = 0, \quad r_{0M_2} = R_c,$$

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где h_{z0} , h_{r0} и τ - соответственно шаги по координатам z , r и времени. К

узлам сетки (z_{0i}, r_{0j}, t_k) будем относить сеточные функции скоростей $v_{z\,ij}^k$,

$v_{r\,ij}^k$ и эйлеровых переменных z_{ij}^k и r_{ij}^k , к “полуцелым” точкам $(z_{0i+1/2}, r_{0j+1/2}, t_k)$

- сеточные функции всех остальных параметров. Такая аппроксимация обеспечивает устойчивость решения волновых задач в однофазных системах (жидкостях и газах) конечно-разностным методом [8].

3. Начальные и граничные условия

Начальные условия ($t = 0$), соответствующие исходному состоянию в канале, запишутся в виде

$$p = p_0, v_r = v_z = 0, \rho = \rho_0 \text{ при } z > 0,$$

$$\begin{cases} Z_1 \leq z_0 \leq Z_2 \wedge R_1 \leq r_0 \leq R_2 : \alpha_g = \alpha_{g0}, \rho = \rho_{l0}^0 (1 - \alpha_{g0}), p_g = p_0, a = a_0, w = 0, \\ 0 \leq z_0 < Z_1 \wedge z_0 > Z_2 \wedge 0 < r_0 < R_1 \wedge r_0 > R_2 : \rho = \rho_{l0}^0 \end{cases}$$

Граничные условия: на оси симметрии ($r_0 = 0$) и стенке трубы ($r_0 = R_c$) – условие непротекания жидкости $v_r = 0$, на торцевой границе ($z_0 = 0$) задается граничное давление в виде ступеньки

$$z_0 = 0: \quad p_l(r_0, t) = p_0 + \Delta p_{l0} \quad 0 < r_0 < R_c.$$

Отметим, что случай задания давления на границе соответствует разрыву мембраны между камерой высокого давления, заполненной газом, и рабочей камерой, заполненной исследуемой системой.

На другой границе ($z_0 = L_z$) используется импедансное соотношение, связывающее амплитуды давления и скорости $\Delta p_l = \Delta v_z \rho_l^0 C_l$, для осуществления режима неотражения от этой границы.

4. Результаты расчетов

Под воздействием граничного давления $\Delta p(0, r) = p_0 + \Delta p_{l0}$ в канале формируется волна давления, которая распространяется вдоль положительного направления оси z и воздействует на тороидальный пузырьковый кластер. Акустическая жесткость пузырькового кластера меньше, чем акустическая жесткость окружающей воды, поэтому первоначальная волна от границ кластера будет отражаться как от свободной границы [9] (рис.2, фрагмент а). С течением времени из-за двумерного волнового движения происходит фокусировка волны в область сильно

сжимаемой пузырьковой жидкости [3,4]. Фокусировка сопровождается башнеобразными всплесками волны (рис.2, фрагменты *b* и *c*). Амплитуда возникающих всплесков превышает амплитуду первоначальной волны в несколько раз, например, из эпюры для момента 40 мкс (фрагмент *c*) следует, что амплитуда достигает значения более 20 МПа. Образовавшиеся башнеобразные всплески давления сходятся к центру канала, увеличивая свою амплитуду из-за геометрии канала, и «сталкиваются» на оси канала (фрагмент *d*). В дальнейшем сформировавшийся пик распространяется вдоль оси канала, уменьшаясь по амплитуде (фрагменты *e* и *f*).

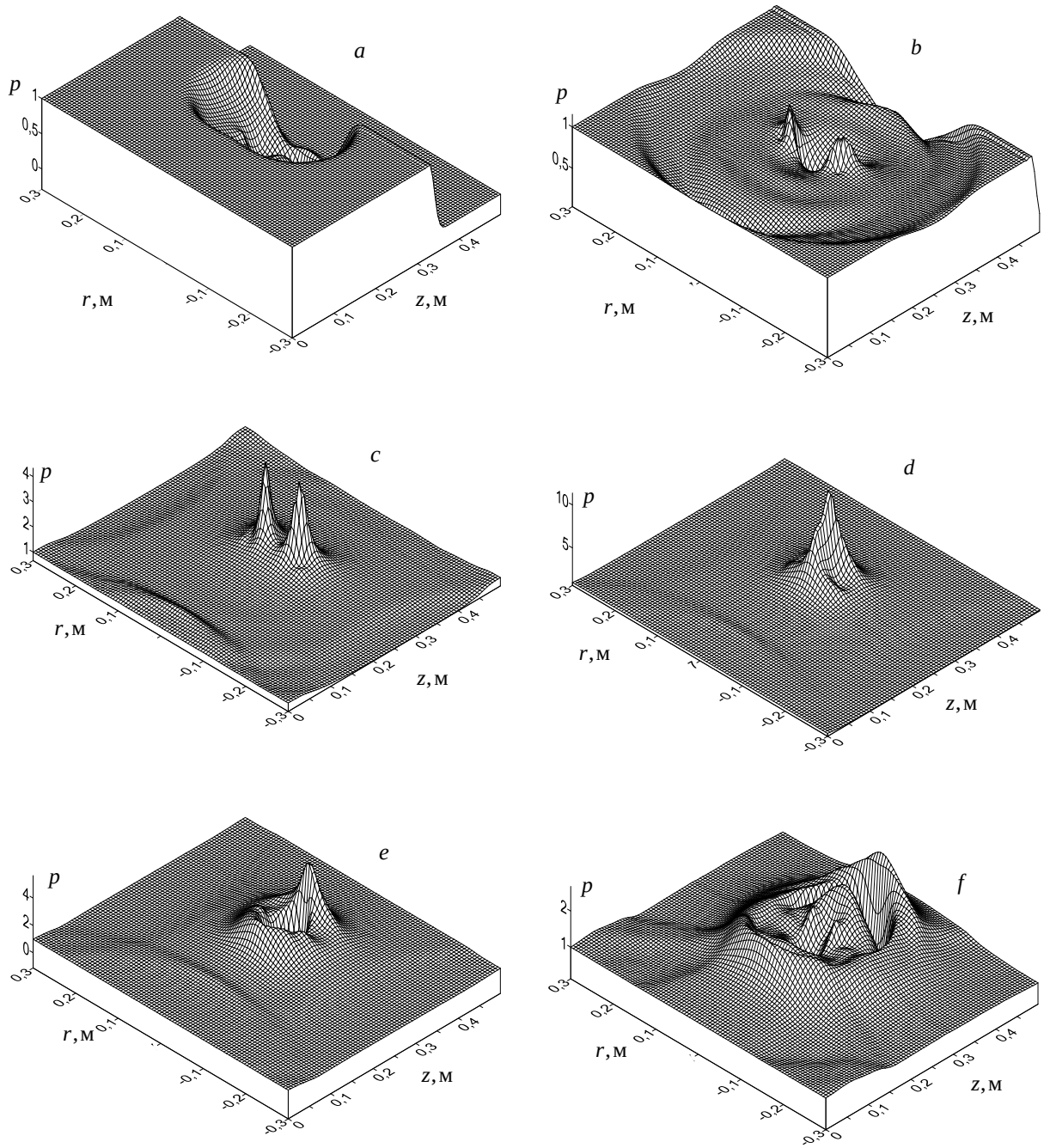


Рис. 2. Фокусировка волны в приосевой зоне при взаимодействии с тороидальным пузырьковым кластером ($p=(p_l-p_0)/\Delta p_{l0}$). Фрагменты *a, b, c, d, e, f* соответствуют моментам 25, 35, 40, 43, 45, 50 мкс. Параметры расчета (жидкость – вода, газ - воздух): $Z_1=0.25$ м, $Z_2=0.3$ м, $R_1=0.025$ м, $R_2=0.075$ м, $\Delta p_{l0}=0.5$ МПа, $\rho_{l0}^0=1000$ кг/м³, $\rho_{g0}^0=1.29$ кг/м³, $c_g=1006$ Дж/кг*К, $\lambda_g=0.026$ м*кг/К*с³, $\alpha_{g0}=0.01$, $a_0=10^{-3}$ м, $T_0=300$ К, $p_0=0,1$ МПа

Численные расчеты показали, что при определенных геометрических параметрах канала и пузырькового кластера, а также объемного содержания газа в пузырьковой смеси, максимальное значение амплитуды давления формируется в осевой зоне, окруженной пузырьковым кластером. Зависимость максимального значения амплитуды давления от объемного содержания газа при прочих одинаковых параметрах системы приведена на рис. 3. С увеличением объемного содержания газа в пузырьковой зоне с 0.0005 до 0.04 происходит увеличение амплитуды волны, сфокусированной в центре канала. При объемном содержании газа, равном 0.06, фокусировка волны в центре канала также происходит, но ее амплитуда меньше амплитуды башнеобразного всплеска в самом кластере, которая составляет 15,89 МПа.

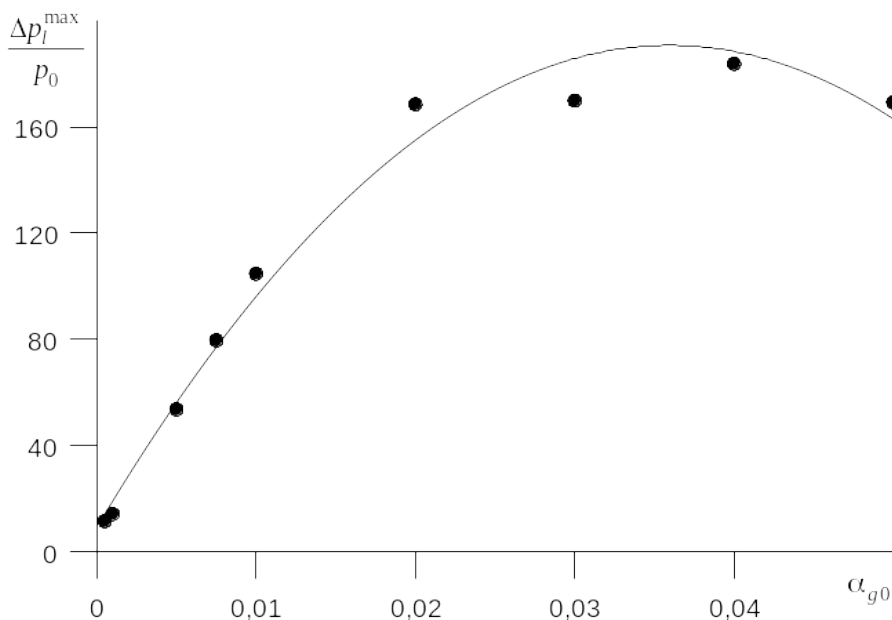


Рис. 3. Зависимость максимального давления на оси трубы ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0$) от объемного содержания газа α_{g0} . Остальные параметры системы такие же, как на рис. 2.

В диапазоне объемного содержания газа от 0.0005 до 0.05 зависимость максимальной амплитуды волны, сфокусированной на оси канала, может быть аппроксимирована следующим выражением

$$\frac{\Delta p_l^{\max}}{p_0} = 9.3 + 10095.5 * \alpha_{g0} - 140427.0 * \alpha_{g0}^2.$$

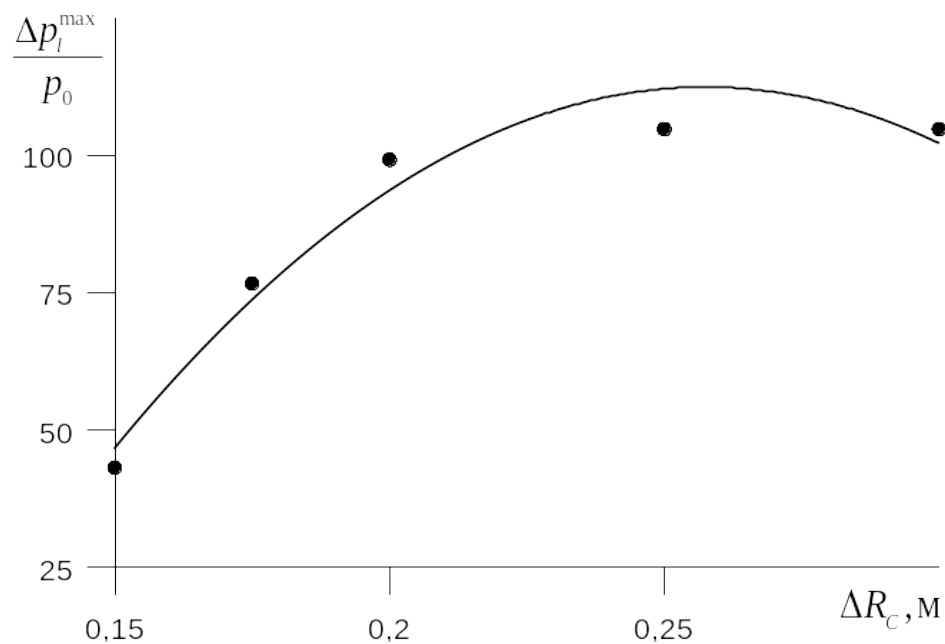


Рис. 4. Зависимость максимального давления на оси трубы ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0$) от ΔR_c ($\Delta R_c = R_c - R_2$). Остальные параметры системы такие же, как на рис. 2.

На рис. 4 представлена зависимость максимального значения амплитуды давления от ширины слоя «чистой» жидкости, окружающей пузырьковый кластер, при прочих одинаковых параметрах системы. С увеличением ширины слоя жидкости происходит увеличению максимальной амплитуды давления на оси трубы. Так, например, при $\Delta R_c = 0.15 \text{ m}$ значение

$\Delta p_l^{\max} / p_0 = 4.0$ МПа, а для $\Delta R_c = 0.25$ м аналогичное значение приблизительно равно 10.0 МПа. Зависимость максимальной амплитуды волны давления, формирующейся на оси канала, от ширины слоя ΔR_c в пределах от 0.15–0.3 м можно аппроксимировать следующей формулой

$$\frac{\Delta p_l^{\max}}{p_0} = -264.4 + 2926.4 * \Delta R_c - 5682.1 * \Delta R_c^2.$$

Численные эксперименты показали, что увеличение ширины слоя жидкости ΔR_c больше, чем на 0.3 м, не приводит к дальнейшему усилению максимальной амплитуды волны на оси канала.

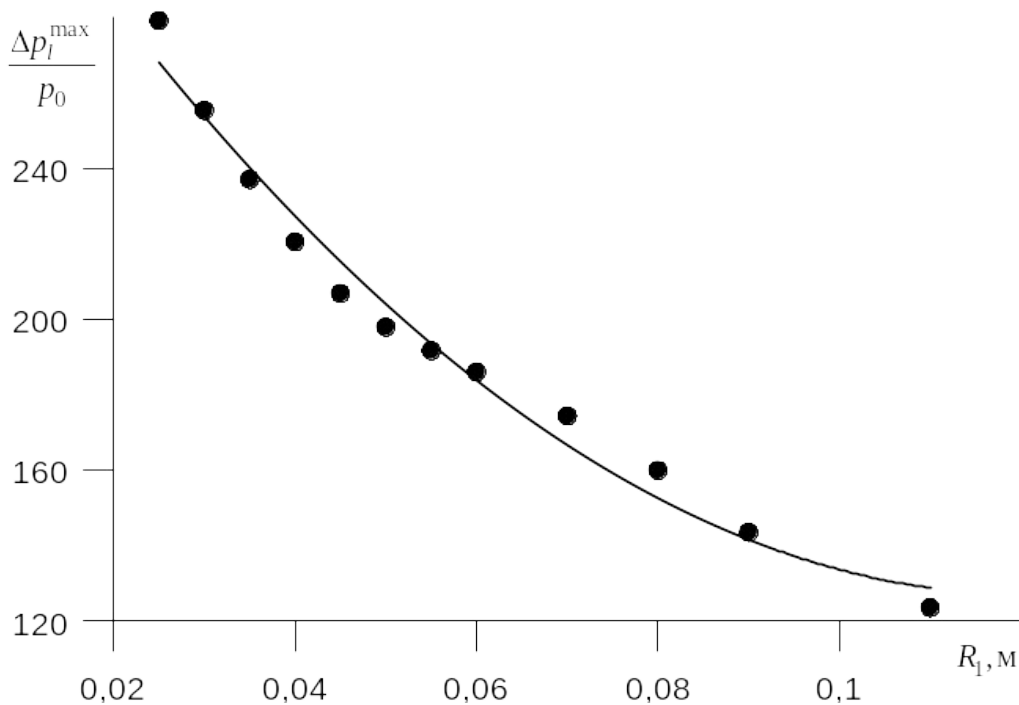


Рис. 5. Зависимость максимального давления волны на оси трубы ($\Delta p_l^{\max} = p_l^{\max} - p_0$) от R_1 , $\Delta R_c = 0.175$ м. Начальная амплитуда волны давления $\Delta p_{10} = 1.0$ МПа. Остальные параметры системы такие же, как на рис. 2.

С увеличением внутреннего радиуса кластера R_1 максимальная амплитуда сфокусированной волны на оси канала уменьшается (рис.5). При изменении R_1 от 0.03 до 0.12 м значение максимальной амплитуды снижается от 26 до 12 МПа. Когда внутренний радиус кластера R_1 больше 0.13 м, максимальное значение давления локализовано в зоне пузырькового кластера, в этом случае на оси канала несмотря на сложение волн амплитуда результирующей волны оказывается меньше амплитуды башнеобразного всплеска внутри тороидального пузырькового кластера. В диапазоне R_1 от 0.03 до 0.12 м зависимость максимального давления на оси канала от R_1 можно аппроксимировать следующим выражением

$$\frac{\Delta p_l^{\max}}{p_0} = 351.2 - 3713.9 * R_1 + 15378.2 * R_1^2.$$

Зависимость максимального значения давления на оси трубы от первоначальной амплитуды давления представлена на рис. 6. На этом же рисунке приведена аналогичная зависимость для случая, когда пузырьковый кластер имеет форму сплошного цилиндра.

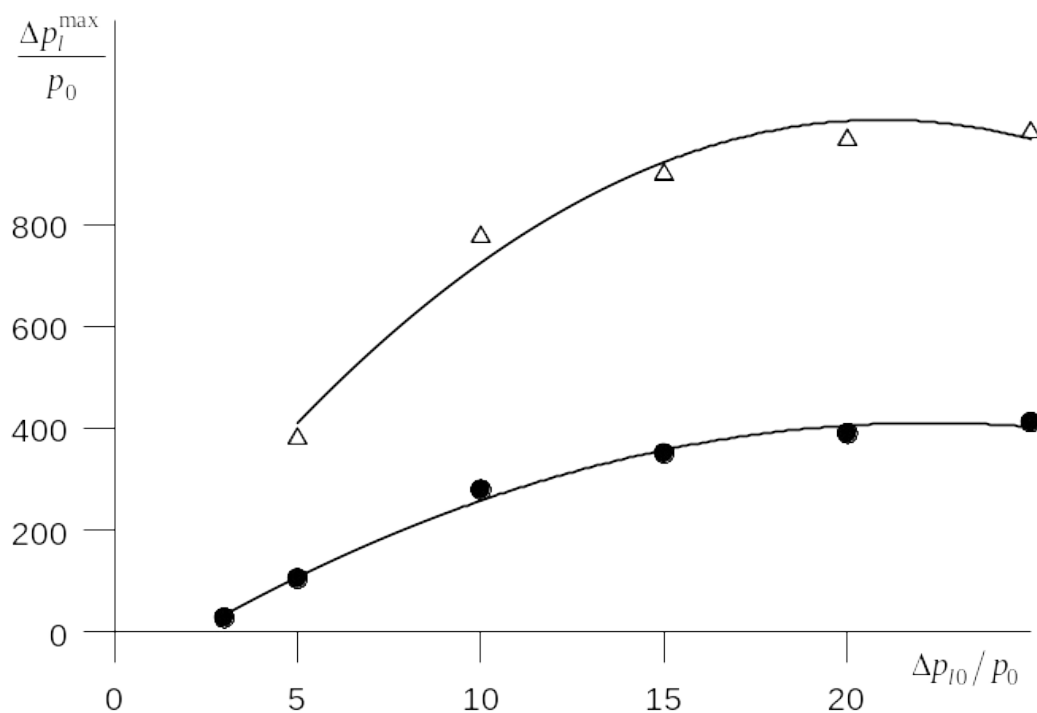


Рис. 6. Зависимость максимального давления на оси трубы от амплитуды начального давления Δp_{l0} . Символы \bullet соответствуют тороидальному пузырьковому кластеру, Δ – сплошному цилиндру, заполненному пузырьковой смесью. Параметры системы такие же, как для рис. 2.

Отметим, когда амплитуда первоначальной волны типа «ступенька» меньше 0.2 МПа, не происходит фокусировки волны на оси канала. С увеличением амплитуды первоначальной волны от 0.3 до 1.5 МПа происходит увеличение амплитуды результирующей волны от 27 до 35 МПа. Дальнейший рост амплитуды первоначальной волны практически не влияет на результирующую. Это связано с переносом образовавшегося внутри кластера башнеобразного распределения давления по направлению координаты z . В этом случае фокусировка на оси канала происходит позже и сформировавшиеся в кластере башнеобразные всплески амплитуды успевают рассеяться при движении к оси канала. Зависимость максимальной амплитуды волны давления, формирующейся на оси канала, от амплитуды граничной волны типа «ступенька» в пределах от 0.3–2.5 МПа можно аппроксимировать следующей формулой

$$\Delta p_l^{\max} = -93.8 * p_0 + 45.4 * \Delta p_{l0} - \frac{\Delta p_{l0}^2}{p_0}.$$

На этом же рисунке представлена аналогичная зависимость для пузырькового кластера, имеющего форму цилиндра, внешние геометрические размеры которого совпадают с размерами тороидального кластера. Из рис. 6 видно, что амплитуда волны, фокусирующейся в пузырьковом кластере, имеющем форму цилиндра, в диапазоне начальной амплитуды Δp_{l0} от 0.3 до 3 МПа более чем в два раза превышает амплитуду волны, сфокусированной тороидальным пузырьковым кластером. В случае пузырькового цилиндра зависимость максимальной амплитуды волны

давления от амплитуды первоначальной волны можно аппроксимировать следующим выражением

$$\Delta p_l^{\max} = -21.0 * p_0 + 97.9 * \Delta p_{l0} - 2.3 * \frac{\Delta p_{l0}^2}{p_0}.$$

На рис. 7 представлены зависимости координаты z^{\max} , при которой реализуется максимальное давление на оси канала, от амплитуды начального давления для двух типов кластеров: тороидального кластера (символы \bullet) и цилиндра (символы Δ). Из рис. 7 видно, что для обоих типов кластеров координата z точки фокусировки (точки, в которой амплитуда давления максимальна) увеличивается с ростом амплитуды первоначальной волны. В случае тороидального пузырькового кластера координата точки фокусировки смещается больше, чем в случае цилиндра.

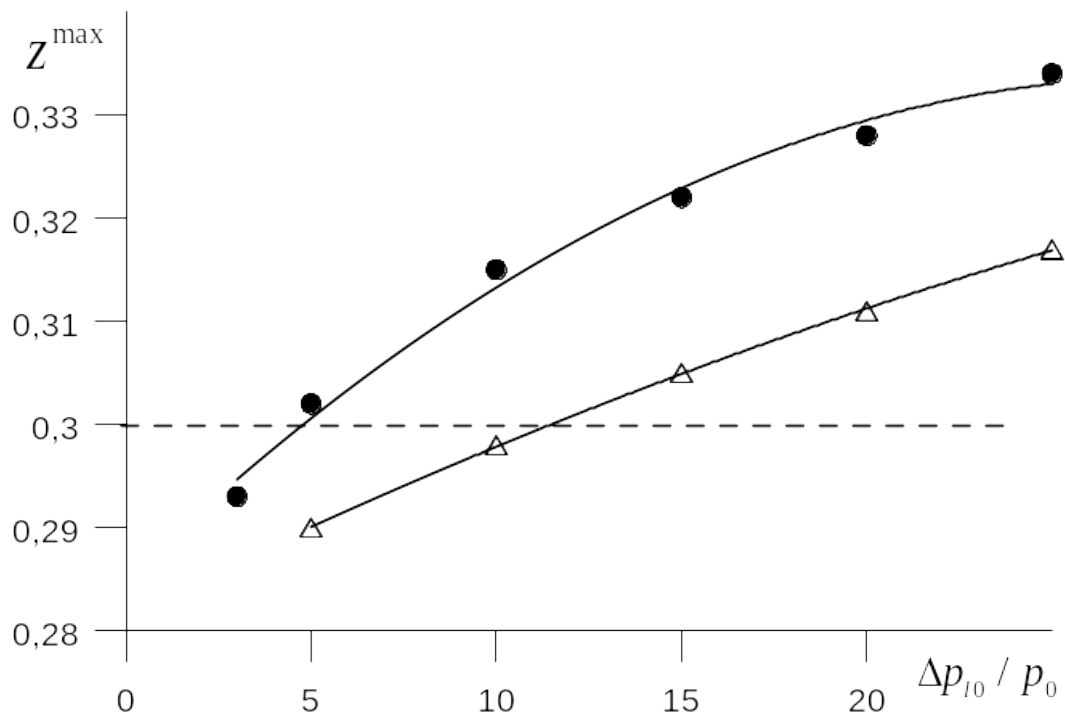


Рис. 6. Зависимость координаты z^{\max} , при которой возникает максимальное давление на оси канала, от амплитуды начальной волны Δp_{l0} . Штриховой линией обозначена координата $Z_2=0.3$ м. Остальные параметры такие же, как для рис. 2.

Заключение. Исследована динамика волн в канале, заполненном водой, содержащем соосный пузырьковый кластер в виде тороида. На основе численных расчетов установлены следующие закономерности:

- при определенных параметрах (геометрические размеры и объемное содержание пузырьков) кластера происходит фокусировка волны давления на оси цилиндрического канала.
- увеличение амплитуды первоначальной волны до некоторого значения приводит к увеличению амплитуды результирующей волны, сфокусированной на оси канала, более чем в 10 раз, дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны приводит к насыщению амплитуды результирующей волны.
- с увеличением внутреннего радиуса кластера амплитуда результирующей волны на оси уменьшается. Существует критическое значение внутреннего радиуса кластера, зависящее от параметров системы (геометрических размеров кластера и канала, объемного содержания пузырьков в кластере), при котором амплитуда результирующей волны на оси канала меньше амплитуды башнеобразного всплеска внутри пузырькового кластера.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности, номер для публикаций FEUR - 2020 - 0004 «Решение актуальных задач и исследование процессов в нефтехимических производствах, сопровождающихся течениями многофазных сред».

Литература

1. Островский Л.А., Руденко О.В. О проблемах нелинейной акустики, представляющихся сегодня наиболее важными и интересными // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 6. С. 698-705.
2. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. Галимзянов М. Н., Гималтдинов И. К., Шагапов В. Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия РАН. Механика жидкости и газа, № 2, 2002. С. 139-147.
4. Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. [Условия фокусировки волны давления в пузырьковом клине](#) // [Акустический журнал](#). 2020. Т. 66. [№ 4](#). С. 351-356
5. Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вшивков В.А. и др. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Докл. РАН. 2001. Т.381, №6. С. 773-776.
6. Кедринский В.К., Вшивков В.А., Лазарева Г.Г. и др. Фокусировка осциллирующей ударной волны, излученной тороидальным облаком пузырьков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2004. Т. 125, вып. 6. С. 1302–1310.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
9. Исакович М.А. Общая акустика. Наука. Москва. 1973, 496 с.