УДК 517.53, 517.54

ПРОБЛЕМА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ступин Д. Л.
г. Тверь

В данной работе излагается подход к решению проблемы коэффициентов на классах, связанных с классом Ω_0 ограниченных в единичном круге функций ω с нормировкой $\omega(0) = 0$, не основанный на неравенствах с определителями. Приведены первые шесть неравенств, описывающих тела коэффициентов класса Ω_0. Найдены соотношения, связывающие эти неравенства между собой. Также изложен метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов на классах, связанных с классом Ω_0.

In this paper we present an approach to solving the problem of coefficients on classes related to the class Ω_0 bounded in unit circle functions ω with normalization $\omega(0) = 0$ not based on inequalities with determinants. The first six inequalities describing the coefficient bodies of the class Ω_0 are given. The relations linking these inequalities with each other are found. Also, a method for estimating the moduli of Taylor coefficients on classes related to the class Ω_0 is outlined.

Ключевые слова: ограниченные функции, тела коэффициентов, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов, гипотеза Кшижа.
Keywords: bounded functions, the bodies of coefficients, sharp Taylor coefficient moduli estimates, the Krzyz conjecture.

1. Введение

Пусть Ω_0 — класс голоморфных в единичном круге Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$. Обозначим через Ω класс голоморфных в Δ функций $w = \omega(z)$ таких, что $|\omega(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

Очевидно, имеет место следующее

Утверждение 1. *Формула $\omega_0(z) = z\omega(z)$, $\omega_0(z) \in \Omega_0$, $\omega(z) \in \Omega$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω_0 и Ω.*

Тейлоровские коэффициенты функции $\omega(z)$ будем обозначать $\{\omega\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из n комплексных чисел $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n)$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0, будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n-ым телом коэффициентов класса Ω_0.

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$

для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \ldots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0.

Таким образом, задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе Ω_0 есть частный случай проблемы коэффициентов.

В 1917 году И. Шур исследовал класс Ω [3]. В частности, он дал алгоритм определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω и показал, что каждая функция класса Ω может быть параметризована некоторой последовательностью комплексных чисел, известных как параметры Шура. Они определяют представление данной функции класса Ω в виде непрерывной дроби.

Работа Шура [3] была опубликована через 10 лет после первой работы К. Каратеодори [4], посвящённой проблеме коэффициентов для класса C функций с положительной вещественной частью. Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе C считается статья Каратеодори [5]. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов для двух упомянутых здесь классов, имеется в работе [8]. В упомянутой работе также есть краткий исторический обзор.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема коэффициентов имеет непосредственную связь с теорией подчинённых функций [2] и, в частности, с гипотезой Кшижа [1]. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n-3$ действительных переменных. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, изложенные ниже результаты имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс Ω_0 тесно связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для Ω_0 связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между проблемой коэффициентов и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

2. Обзор результатов по проблеме коэффициентов на классе Ω_0

Как упоминалось выше, Шур решил проблему коэффициентов на классе Ω. Здесь мы будем опираться исключительно на его подкласс Ω_0. Утверждение 1 позволяет легко перенести все результаты с класса Ω на класс Ω_0, чем мы и займёмся в этом пункте. Некоторые утверждения будут приведены без доказательств, которые можно найти в работе [8].

Под ε-окрестностью точки $\omega^{(n)}$, $\varepsilon > 0$, будем понимать множество всех точек $\omega^{(n),*} := (\{\omega\}_1^*, \ldots, \{\omega\}_n^*)$, удовлетворяющих условиям $|\{\omega\}_k^* - \{\omega\}_k| < \varepsilon$, для всех $k = 1, \ldots, n$. Будем называть это множество шаром с центром $\omega^{(n)}$ и радиусом ε.

Исходя из понятия окрестности, можно определить предельные, внутренние и граничные точки множества, открытые и замкнутые множества. Введённую таким образом в $\mathbb{C}^n$ топологию обозначим τ_n.

Всюду далее во всех рассуждениях в $\mathbb{C}^n$, даже если это не оговорено явно, будем использовать топологию τ_n, а при рассуждениях о функциях всегда будем использовать топологию локально-равномерной сходимости.

Утверждение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество $\Omega_0^{(n)}$ есть абсолютно выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{C}^n$, содержащийся в шаре с центром $c^{(n)} := (0, \ldots, 0)$, радиусом 1 и имеющий $c^{(n)}$ своей внутренней точкой.*

Доказательство. Так как $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$ влечёт $\alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 \in \Omega_0$, $0 < \alpha < 1$, то Ω_0 и $\Omega_0^{(n)}$ — выпуклые множества. Поскольку вместе с ω в класс Ω_0 входит и функция $\zeta\omega$, $|\zeta| = 1$, то Ω_0 и $\Omega_0^{(n)}$ — абсолютно выпуклые множества.

Для функций из Ω_0 имеет место принцип компактности [10] и предельные функции вновь принадлежат Ω_0, следовательно $\Omega_0^{(n)}$ — замкнутое множество. Множество $\Omega_0^{(n)}$ содержится в шаре радиуса 1, так как $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$ (см. [10]).

Из геометрических соображений видно, что все полиномы $\{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n$ с достаточно малыми коэффициентами $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$, лежат в классе Ω_0. Стало быть точка $(0, \ldots, 0)$ — внутренняя точка множества $\Omega_0^{(n)}$. ■

Утверждение 3. *Класс Ω_0 целиком состоит из граничных точек в топологии локально равномерной сходимости.*

Доказательство. Если ω — произвольная функция класса Ω_0, то её можно аппроксимировать произведениями Бляшке [8]. Обозначим эти аппроксимации через $\omega_n(z)$ и рассмотрим последовательность $\{\omega_n(z) + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как $\omega_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, отображают единичную окружность на себя, то функции $\omega_n(z) + 1/n$, очевидно, лежат вне класса Ω_0. С другой стороны, $\omega_n \in \Omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, и эта последовательность сходится локально равномерно к функции $\omega \in \Omega_0$ на Δ. Таким образом ω — граничная точка класса Ω_0. ■

Существует тонкое различие между границей множества Ω_0 и границей множества $\Omega_0^{(n)}$. Например, функция $\omega(z) = z/2$ согласно утверждению 3 является граничной точкой класса Ω_0, но набор её коэффициентов $(1/2, 0, \ldots, 0)$ не является граничной точкой множества $\Omega_0^{(n)}$.

Чтобы решить проблему коэффициентов на классе Ω, Шур использовал специальные последовательности функций. Следующее утверждение — это по сути несколько видоизменённая форма второй теоремы Абеля.

Утверждение 4. *Пусть $\omega(z) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \{\omega\}_k z^k \in \Omega_0$ и $\omega_n(z) := \sum\limits_{k=1}^{n} \{\omega\}_k z^k + o(z^n)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда последовательность $\{\omega_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к $\omega(z)$ на Δ.*

Доказательство. Действительно, $\omega(z) - \omega_n(z) = O(z^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Далее, легко показать, что последовательность $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к тождественному нулю на Δ, откуда сразу следует, что последовательность $\{\omega_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к $\omega(z)$ на Δ. ■

Выше уже упоминалось, что в 1917 году в работе [3] появился алгоритм, состоящий в общем случае из счётного количества шагов, предназначенный для определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω. Шур показал, что каждой функции ω класса Ω соответствует одна и только одна последовательность комплексных чисел, q_j, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для определения этих параметров Шур дал следующую процедуру:

$$\omega_k(z) := \frac{1}{z}\,\frac{\omega_{k-1}(z) - q_{k-1}}{1 - \overline{q}_{k-1}\omega_{k-1}(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\omega_0(z) := \omega(z)$, $q_{k-1} := \omega_{k-1}(0)$. Числа q_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots$, и называются параметрами Шура.

Отметим ещё, что выполнять эту процедуру можно до тех пор, пока $|q_{k-1}| < 1$, иначе получим деление на ноль ($q_{k-1} := \omega_{k-1}(0) \equiv \omega_{k-1}(z) \equiv e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Формула (1) допускает обращение

$$r_{k-1}(z) = \frac{q_{k-1} + z r_k(z)}{1 + \overline{q}_{k-1} z r_k(z)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{2}$$

Если положить $r_{n-1}(z) = \omega_{n-1}(z)$ в формуле (2), тогда мы вернёмся туда, откуда начали, то есть к исходной функции $\omega(z)$. Если же положить $r_{n-1}(z) \equiv q_{n-1}$ (при условии, что $\omega_{n-1}(z) \not\equiv q_{n-1}$), то ясно, что $r_k(z) \neq \omega_k(z)$. Более того, используя формулу (2) можно доказать по индукции, что каждая функция r_k, окажется рациональной дробью общего вида, голоморфной в круге Δ:

$$r_k(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-k-1} z^{n-k-1}}{\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{n-k-1} z^{n-k-1}},$$

где $k = 0, \ldots, n-1$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{n-k-1} \in \mathbb{C}$.

Приведём аналогичные формулы для класса Ω_0. Прямая формула [11]:

$$\omega_{k+1}(z) := \frac{\omega_k(z) - q_k z}{z - \overline{q}_k \omega_k(z)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

где $\omega_0(z) := \omega(z)$, $q_k := \{\omega_k\}_1$. Обратная к (3) формула:

$$r_{k-1}(z) = z\frac{q_{k-1} + r_k(z)}{1 + \overline{q}_{k-1} r_k(z)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{4}$$

Заметим, что все ω_k и r_k лежат в классе Ω или Ω_0 в зависимости от того применяем мы формулы (1) и (2) или формулы (3) и (4). Дело в том, что имеет место утверждение 1 и класс Ω инвариантен относительно дробнолинейного автоморфизма круга Δ (см. [10]).

Более того, справедливо

Утверждение 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n + o(z^n) \in \Omega_0$. Тогда существует $m \in \{1, \ldots, n\}$ и рациональная дробь общего вида*

$$Q_m(z, \omega^{(m)}) := z\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1}}{\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{m-1} z^{m-1}}, \qquad Q_m(z, \omega^{(m)}) \in \Omega_0,$$

имеющая в своём тейлоровском разложении около $z = 0$ n первых коэффициентов, соответственно равных $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$.

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Рациональная дробь*

$$R_n(z) := z\frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2}z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1}z^{n-1}}, \tag{5}$$

не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$. Более того, $|R_n(z)| = 1$, $|z| = 1$. Голоморфность $R_n(z)$ в Δ и выполнение условия $R_n(0) = \overline{\alpha}_{n-1}/\alpha_0 \in \overline{\Delta}$ эквивалентно тому, что $R_n \in \Omega_0$.

Легко показать, что каждому нулю z_k, числителя рациональной дроби $R_n(z)$ отвечает нуль её знаменателя $1/\overline{z}_k$, симметричный нулю числителя относительно единичной окружности, то есть

$$R_n(z) = \varepsilon z \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z},$$

где $|\varepsilon| = 1$, $|z_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Если отрезок последовательности параметров Шура не заканчивается числом по модулю равным 1, то к нему всегда можно приписать число с модулем 1, следовательно справедливо

Утверждение 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, и*

$$\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_{n-1} z^{n-1} + o(z^{n-1}) \quad \in \quad \Omega_0,$$

тогда существует дробь вида (5) регулярная в Δ и имеющая в своём тейлоровском разложении около точки $z = 0$ первые $n-1$ коэффициентов, соответственно равных $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_{n-1}$.

То есть множество голоморфных рациональных дробей вида (5) всюду плотно в классе Ω_0 в топологии локально равномерной сходимости.

Теорема 1 (Шур). *Функция $\omega \in \Omega_0$ если и только если выполнено одно из условий: либо $|q_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$, либо найдётся натуральное число n, такое что $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|q_n| = 1$ и $\omega_n(z) \equiv q_n$.*

Функция ω является рациональной дробью вида (5) тогда и только тогда, когда существует натуральное число n, такое что $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, а $|q_n| = 1$, то есть $\omega_n(z) \equiv q_n$.

Теорема 2 (Шур). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Точки $\omega^{(n)}$ границы $\Omega_0^{(n)}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с голоморфными в Δ дробями вида (5)*

$$R_m(z, \omega^{(m)}) = z\frac{\overline{\alpha}_{m-1} + \overline{\alpha}_{m-2}z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{m-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{m-1}z^{m-1}}, \quad \overline{\alpha}_{m-1}/\alpha_0 \in \overline{\Delta},\ m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Существует ещё один тип аппроксимации [6] при помощи рациональных дробей вида (5).

Теорема 3 (Каратеодори, Фейер). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каков бы ни был полином*

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0,$$

существует, и притом единственная, дробь вида

$$R_n(\lambda, z, \omega^{(n)}) := \lambda z \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \quad \lambda > 0.$$

регулярная в Δ и имеющая в своём тейлоровском разложении около $z = 0$ n первых коэффициентов, соответственно равных $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$.

Среди всех функций $\omega(z) = p(z) + o(z^n)$, регулярных в Δ, эта рациональная дробь и только она даёт наименьшее значение для величины $M_\omega := \max\limits_{z \in \Delta} |\omega(z)|$, причём $M_{R_n} = \lambda$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в соотношении

$$\lambda \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}} = \{\omega\}_0 + \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_{n-1} z^{n-1} + \ldots,$$

получаем систему из n уравнений для определения $2n$ неизвестных $\overline{\alpha}_0, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}$, $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$. Присоединяя к этим уравнениям уравнения, полученные из уже имеющихся уравнений заменой всех членов на сопряженные, будем иметь систему $2n$ линейных однородных уравнений, с $2n$ неизвестными $\overline{\alpha}_0, \ldots, \overline{\alpha}_{n-1}, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$.

Выпишем определитель этой системы:

$$D_n(\lambda, \omega^{(n)}) := \begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 & \cdots & \{\omega\}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \{\omega\}_1 & \cdots & \{\omega\}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \{\omega\}_1 \\ \overline{\{\omega\}}_1 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{\omega\}}_{n-1} & \cdots & \overline{\{\omega\}}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{\{\omega\}}_n & \cdots & \overline{\{\omega\}}_2 & \overline{\{\omega\}}_1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}; \qquad (6)$$

заметим, что в случае когда $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$ — действительные числа система и её определитель имеют другой вид:

$$d_n(\lambda, \omega^{(n)}) := \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & \{\omega\}_1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \{\omega\}_1 & \cdots & \{\omega\}_{n-2} - \lambda & \{\omega\}_{n-1} \\ \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 & \cdots & \{\omega\}_{n-1} & \{\omega\}_n - \lambda \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Теорема 4 (Каратеодори, Фейер)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$. В общем случае, $\lambda = \lambda(\omega^{(n)})$ является наибольшим положительным корнем уравнения $D_n(\lambda, \omega^{(n)}) = 0$ степени не выше $2n$. Если же все числа $\{\omega\}_0, \{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_{n-1}$ вещественны, то λ есть наибольший из абсолютных значений корней уравнения $d_n(\lambda, \omega^{(n)}) = 0$ степени не выше n.*

В заключение приведём примеры. Пусть $\omega(z) = z/2 + z^2/2$. Так как $\omega \in \Omega_0$, но при этом не является дробно-рациональной функцией вида (5), то по теореме 2 ω

не соответствует никакой граничной точке $\Omega_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, стало быть это внутренняя точка для каждого из упомянутых множеств. Если взять $n = 4$ и применить прямую формулу алгоритма Шура (3) то получим $q_0 = 1/2$, $q_1 = 2/3$, $q_2 = 2/5$, $q_3 = 2/7$. Применив обратную формулу (4) согласно утверждению 5 получим

$$r_0(z) = \frac{z}{2}\frac{53 + 96z + 76z^2 + 56z^3}{53 + 43z + 33z^2 + 14z^3} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^4).$$

Если теперь к последовательности добавить $q_4 = 1$ и выполнить те же действия (здесь $n = 5$), то согласно утверждению 6 получим

$$r_0(z) = z\frac{1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4}{2 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + z^4} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^5).$$

Наконец, согласно теореме 3 (здесь возьмём $n = 3$)

$$r_0(z) = \lambda z\frac{1 + 2\lambda z}{2\lambda + z} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3), \qquad \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0.809.$$

Коэффициент λ мы вычислили используя теорему 4, остальные коэффициенты рациональной дроби мы нашли решив систему $d_n(\lambda, \omega^{(n)}) = 0$.

Утверждение 5, утверждение 6 и теорема 3 дают три различных способа продолжения полинома $p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, до дробно-рационального отображения класса Ω_0. Эти три продолжения совпадают если и только если $\lambda = 1$. Таким образом, при $\lambda > 1$ продолжение невозможно, при $\lambda = 1$ продолжение единственно, а при $\lambda < 1$ продолжений бесконечно много, так как мы можем распоряжаться параметрами Шура q_k при $k \geqslant n$ произвольно.

Конструктивный характер теорем, сформулированных выше, даёт достаточно удобный способ проверки принадлежности системы n начальных коэффициентов некоторой голоморфной функции n-му телу коэффициентов класса Ω_0.

3. Неравенства, описывающие тела коэффициентов на классе Ω_0

Пусть $\omega_0(z) := \omega(z) = \{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \ldots + \{\omega\}_6 z^6 + \ldots$, тогда по формуле (3) $\omega_1(z) := \dfrac{\omega(z) - \{\omega\}_1 z}{z - \overline{\{\omega\}_1}\omega(z)} = \{\omega_1\}_1 z + \{\omega_1\}_2 z^2 + \{\omega_1\}_3 z^3 + \{\omega_1\}_4 z^4 + \{\omega_1\}_5 z^5 + \ldots$ Обозначив, для сокращения записи, $a_k := \{\omega\}_k$, $r_2 := 1 - |\{\omega\}_1|^2$ имеем:

$$\begin{aligned}
\{\omega_1\}_1 &= \frac{a_2}{r_2},\\
\{\omega_1\}_2 &= \frac{a_3}{r_2} + \frac{\bar{a}_1 a_2^2}{r_2^2},\\
\{\omega_1\}_3 &= \frac{a_4}{r_2} + 2\frac{\bar{a}_1 a_2 a_3}{r_2^2} + \frac{\bar{a}_1^2 a_2^3}{r_2^3},\\
\{\omega_1\}_4 &= \frac{a_5}{r_2} + 2\frac{\bar{a}_1 a_2 a_4}{r_2^2} + \frac{\bar{a}_1 a_3^2}{r_2^2} + 3\frac{\bar{a}_1^2 a_2^2 a_3}{r_2^3} + \frac{\bar{a}_1^3 a_2^4}{r_2^4},\\
\{\omega_1\}_5 &= \frac{a_6}{r_2} + 2\frac{\bar{a}_1 a_2 a_5}{r_2^2} + \frac{\bar{a}_1}{r_2^2}\left(3\frac{\bar{a}_1 a_2^2}{r_2} + 2a_3\right) a_4 + 3\frac{\bar{a}_1^2 a_2 a_3^2}{r_2^3} + 4\frac{\bar{a}_1^3 a_2^3 a_3}{r_2^4} + \frac{\bar{a}_1^4 a_2^5}{r_2^5}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Напомним, что ω_1 лежит в классе Ω_0 в силу того, что имеет место утверждение 1 и класс Ω инвариантен относительно дробнолинейного автоморфизма круга Δ (см. [10]).

Так как на классе Ω_0, в силу леммы Шварца [10], первое неравенство:

$$|m_1| \leqslant r_1, \qquad m_1 := \{\omega\}_1, \quad r_1 := 1, \tag{9}$$

справедливо и точно безо всяких условий, то $|\{\omega_1\}_1| \leqslant 1$ также верно и точно, так как $\omega_1 \in \Omega_0$. Из чего, с учётом формул (8) следует, что второе неравенство

$$|m_2| \leqslant r_2, \qquad m_2 := \{\omega\}_2, \quad r_2 := \frac{1}{r_1}(r_1^2 - |m_1|^2) \tag{10}$$

справедливо и точно на классе Ω_0 также безо всяких дополнительных условий.

Применяя второе неравенство (10) к коэффициентам функции $\omega_1(z)$ (см. (8)) получаем третье неравенство:

$$|m_3| \leqslant r_3, \qquad m_3 := \{\omega\}_3 + \frac{\overline{m}_1 m_2^2}{r_2}, \quad r_3 := \frac{1}{r_2}(r_2^2 - |m_2|^2), \tag{11}$$

справедливое и точное на классе Ω_0 также безо всяких дополнительных условий.

Из (11) следует, что

$$\{\omega\}_3 = m_3 - \frac{\overline{m}_1 m_2^2}{r_2}.$$

Записав третье неравенство для $\omega_1(z)$, получаем четвёртое неравенство:

$$|m_4| \leqslant r_4, \qquad m_4 := \{\omega\}_4 + 2\frac{\overline{m}_1 m_2 m_3}{r_2} + \frac{\overline{m}_2 m_3^2}{r_2 r_3} - \frac{\overline{m}_1^2 m_2^3}{r_2^2}, \quad r_4 := \frac{1}{r_3}(r_3^2 - |m_3|^2), \tag{12}$$

Четвёртое неравенство справедливо и точно на классе Ω_0 без всяких дополнительных условий.

Из (12) следует, что

$$\{\omega\}_4 = m_4 - 2\frac{\overline{m}_1 m_2 m_3}{r_2} - \frac{\overline{m}_2 m_3^2}{r_2 r_3} + \frac{\overline{m}_1^2 m_2^3}{r_2^2}.$$

Записав четвёртое неравенство для $\omega_1(z)$, получаем пятое неравенство:

$$\begin{gathered} |m_5| \leqslant r_5, \qquad r_5 := \frac{1}{r_4}(r_4^2 - |m_4|^2), \\ m_5 := \{\omega\}_5 + 2\left(\overline{m}_1 m_2 + \frac{\overline{m}_2 m_3}{r_3}\right)\frac{m_4}{r_2} + \frac{\overline{m}_3 m_4^2}{r_3 r_4} - \\ - 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2^2 m_3}{r_2^2} + \overline{m}_1\left(1 - 2\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3}\right)\frac{m_3^2}{r_2} - \frac{\overline{m}_2^2 m_3^3}{r_2^2 r_3^2} + \frac{\overline{m}_1^3 m_2^4}{r_2^3}. \end{gathered} \tag{13}$$

Пятое неравенство справедливо и точно на классе Ω_0 без всяких дополнительных условий.

Выразив $\{\omega\}_5$ из (13) получаем шестое неравенство:

$$\begin{aligned}
&|m_6| \leqslant r_6, \qquad r_6 := \frac{1}{r_5}(r_5^2 - |m_5|^2),\\
&m_6 := \{\omega\}_6 + 2\left(\frac{\overline{m}_1 m_2}{r_2} + \frac{\overline{m}_2 m_3}{r_2 r_3} + \frac{\overline{m}_3 m_4}{r_3 r_4}\right) m_5 + \frac{\overline{m}_4}{r_4 r_5} m_5^2 +\\
&\qquad + \left(2\overline{m}_1\left(1 - 2\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3}\right)\frac{m_3}{r_2} - 3\frac{\overline{m}_2^2 m_3^2}{r_2^2 r_3^2} - 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2^2}{r_2^2}\right) m_4 +\\
&\qquad + \left(\frac{\overline{m}_2}{r_2 r_3} - 2\frac{\overline{m}_1 m_2 \overline{m}_3}{r_2 r_3 r_4} - 2\frac{\overline{m}_2 |m_3|^2}{r_2 r_3^2 r_4}\right) m_4^2 - \frac{\overline{m}_3^2}{r_3^2 r_4^2} m_4^3 +\\
&\qquad + 4\frac{\overline{m}_1^3 m_2^3}{r_2^3} m_3 + 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2}{r_2^2}\left(\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3} - 1\right) m_3^2 + 2\frac{\overline{m}_1 m_2}{r_2^2 r_3}\left(\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3} - 1\right) m_3^3 +\\
&\qquad + \frac{\overline{m}_2^3}{r_2^3 r_3^3} m_3^4 - \frac{\overline{m}_1^4}{r_2^4} m_2^5.
\end{aligned} \tag{14}$$

Процесс получения неравенств можно продолжать бесконечно, но для наших целей шести неравенств вполне достаточно. Сделаем некоторые примечания.

Неравенства (13) и (14) получены впервые. Первые четыре неравенства известны (см. [11]). Неравенство (9) носит имя Шварца, неравенство (10) — имя Пика. Браун в [11] отмечает, что неравенство (11) было известно до него, а неравенство (12) принадлежит ему.

Получить эти неравенства можно также и другими способами. Во первых, можно не ограничиваться одной итерацией в алгоритме Шура. В этом случае нам всегда будет достаточно первого неравенства. Например шестое неравенство будет выглядеть так: $|\{\omega_5\}_1| \leqslant 1$. Браун в [11] использовал именно многократные итерации, но почему-то не первое, а второе неравенство. Во вторых, можно выделить полный квадрат в неравенствах $D_n(1, \omega^{(n)}) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ (см. формулы (6) и (7)), но этот способ требует весьма громоздких вычислений, поэтому мы его не используем. Подробнее о связи неравенств с определителями и неравентв, обсуждавшихся выше см. в пункте 5.

Аналогичные неравенства можно получить и в других, связанных с Ω_0 классах. Как пример можно взять класс Ω или класс C всех голоморфных в Δ функций с положительной действительной частью или класс B всех голоморфных в Δ функций ограниченных и не обращающихся в нуль. Дополнительными примерами могут служить классы однолистных функций, в частности класс выпуклых функций и класс звёздных функций. Браун в [11] предлагает для этого перенести алгоритм Шура на эти классы, используя формулы связи с Ω_0. Однако, вычисления при этом будут сложнее чем в Ω_0. Намного проще получить упомянутые неравенства, используя уже имеющиеся у нас неравенства на Ω_0, использовав формулы связи для того, чтобы выразить коэффициенты функции $h \in C$ или $f \in B$ через коэффициенты функции $\omega \in \Omega_0$.

4. Об общем виде неравенств, описывающих множества $\Omega_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$

Если записать все неравенства из предыдущего пункта в виде

$$|m_n| \leqslant r_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где m_n — подмодульное выражение в левой части n−го неравенства, а r_n — правая часть n−го неравенства, то получая из n-го неравенства (n+1)-е способом, описанным в пункте 3, мы увидим следующие закономерности:

$$m_n \mapsto \frac{m_{n+1}}{r_2}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad r_n \mapsto \frac{r_{n+1}}{r_2}, \quad n > 1, \tag{15}$$

где символ “$\mapsto$” обозначает “переходит в”.

Введём обозначение

$$x_n := \frac{|m_n|}{r_n}.$$

Ясно, что $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ и $x_n \mapsto x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Методом математической индукции можно показать что справедливо

Утверждение 7. *Если $\omega(z) \in \Omega_0$, то*

$$\begin{aligned} &r_1 := 1,\\ &r_{n+1} = \frac{r_n^2 - |m_n|^2}{r_n} = r_n(1 - x_n^2), \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Доказательство. В предыдущем пункте имеется база индукции для первого равенства при $n = \overline{1,6}$. Предположим, что

$$r_n = \frac{r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2}{r_{n-1}}, \text{ тогда (15) влечёт } r_{n+1}/r_2 = \frac{r_n^2/r_2^2 - |m_n|^2/r_2^2}{r_n/r_2},$$

что и требовалось. Второе равенство очевидно. ∎

Применяя утверждение 7 многократно, получаем

Следствие 1. *Если $\omega(z) \in \Omega_0$, то*

$$r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Из следствия 1 сразу получаем

Следствие 2. *Если $\omega(z) \in \Omega_0$, то $0 \leqslant r_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает. Более того, $r_n = 0$ равносильно существованию номера $k < n$ такого, что $x_k = 1$, а $r_n = 1$ равнозначно тому, что $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.*

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функции z^n и $z^n/2 + z^{n+1}/2$ являются примерами функций класса Ω_0 для которых $r_n = 1$.

Из следствия 1 получаем

Следствие 3. *Если $\omega(z) \in \Omega_0$, и $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|m_n| = r_n$, то*

$$\begin{aligned} &|m_n| = \frac{r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2}{r_{n-1}} = r_{n-1}(1 - x_{n-1}^2) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2),\\ &m_k = r_k = 0, \qquad k > n. \end{aligned}$$

Итак, мы вывели простую формулу (утверждение 7), позволяющую записать r_{n+1} по известным m_n и r_n. Записать m_{n+1} по известным m_n и r_n в виде простой закономерности можно в случае, описанном в следствии 3 и отвечающем принадлежности точки $\omega^{(n)}$ границе n-го тела коэффициентов класса Ω_0.

5. Итоговые результаты по проблеме коэффициентов

Применив $n-1$ раз утверждение 7 получим

Следствие 4. *При $n \geqslant 2$ из справедливости одного неравенства $|m_n| \leqslant r_n$, следует справедливость всех остальных неравенств $|m_k| \leqslant r_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Более того, $|m_n| < r_n$ влечёт $|m_k| < r_k$, $k = 1, \dots, n-1$, а существование наименьшего номера $s \leqslant n$ такого, что $|m_s| = r_s$ влечёт $r_s > 0$, и $|m_k| < r_k$, $k = 1, \dots, s-1$, причём $|m_k| = r_k$, $r_k = 0$, $k = s+1, \dots, n$.*

Доказательство. Действительно, пусть $n \geqslant 2$ и $|m_n| \leqslant r_n$. Неравенство $r_n \geqslant 0$ по утверждению 7 эквивалентно $r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2 \geqslant 0$. Откуда сразу следует, что $|m_{n-1}| \leqslant r_{n-1}$.

Пусть теперь $|m_n| < r_n$. Это значит $r_n > 0$. Из чего, согласно утверждению 7, по цепочке следует, что $|m_k| < r_k$ и $r_k > 0$ при $k < n$.

Пусть теперь s — наименьший из номеров, не превосходящих n таких, что $|m_s| = r_s$, тогда по утверждению 7 $r_s = \frac{r_{s-1}^2 - |m_{s-1}|^2}{r_{s-1}}$ и $r_s > 0$ в силу определения номера s. Далее, как и в предыдущем абзаце, из утверждения 7, последовательно выводим, что $|m_k| < r_k$ и $r_k > 0$ при $k < s$, а из следствия 2, что $r_k = 0$ при $k > m$. ■

Таким образом, для описания множества $\Omega_0^{(n)}$ достаточно всего лишь одного неравенства $|m_n| \leqslant r_n$. Переход от неравенства $|m_n| \leqslant r_n$ к предыдущему неравенству $|m_{n-1}| \leqslant r_{n-1}$ есть проецирование $\Omega_0^{(n)}$ из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, так как результатом этого действия будет $\Omega_0^{(n-1)}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_0$. В общем случае, согласно пункту 4, $|m_n| \leqslant r_n$. Заметим, что это неравенство можно переписать в виде $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, где $c_n := \{\omega\}_n - m_n$. Из геометрических соображений видим, что $\omega^{(n)}$ — внутренняя точка n-го тела коэффициентов $\Omega_0^{(n)}$, тогда и только тогда, когда $|m_n| < r_n$.

Таким образом, суммируя всё вышеизложенное, решение проблемы коэффициентов на Ω_0 можно сформулировать так

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество значений системы коэффициентов $\omega^{(n)}$ на классе Ω_0 есть абсолютно выпуклый компакт $\Omega_0^{(n)}$, состоящий из точек пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих либо строгому неравенству $|\{\omega\}_n - c_n| < r_n$, либо равенству $|\{\omega\}_s - c_s| = r_s$, $s \leqslant n$, причём $r_s > 0$, $r_k = 0$, $\{\omega\}_k = c_k$, $s < k \leqslant n$. Первый случай отвечает внутренним точкам $\Omega_0^{(n)}$, второй случай — граничным точкам $\Omega_0^{(n)}$. Каждой граничной точке отвечает одна и только одна функция класса Ω_0, имеющая вид голоморфной в Δ рациональной дроби $R_s(1, z, \omega^{(s)})$.*

Заметим, что теорема 5 есть критерий продолжаемости полинома

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0$$

до функции $\omega(z) = p(z) + o(z^n) \in \Omega_0$. Теорема 5 есть также критерий принадлежности голоморфной в Δ функции ω с тейлоровскими коэффициентами разложения относительно точки $z = 0$, $\{\omega\}_k$, $k \in \mathbb{N}$, классу Ω_0.

Обобщим теорему 5. Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n,$$

откуда $\{F\}_1\{\omega\}_n = \{f\}_n - (\{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n)$. Подставив $\{\omega\}_n$ в неравенство $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$ получаем похожее неравенство $|\{f\}_n - c_n^*| \leqslant r_n^*$, где $c_n^* := \{F\}_1 c_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n$, а $r_n^* := |\{F\}_1| r_n$.

Теорема 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество значений системы коэффициентов $f^{(n)}$ на классе M_F есть компакт $M_F^{(n)}$ (не выпуклый, выпуклый или абсолютно выпуклый если множество $M_F(\Delta)$ не выпуклое, выпуклое или абсолютно выпуклое), состоящий из точек пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих либо строгому неравенству $|\{f\}_n - c_n^*| < r_n^*$, либо равенству $|\{f\}_s - c_s^*| = r_s^*$, $s \leqslant n$, причём $r_s^* > 0$, $r_k^* = 0$, $\{f\}_k = c_k^*$, $s < k \leqslant n$. Первый случай отвечает внутренним точкам $M_F^{(n)}$, второй случай — граничным точкам $M_F^{(n)}$. Каждой граничной точке отвечает одна и только одна функция класса M_F, имеющая вид $F(R_s(1, z, \omega^{(s)}))$.*

Отметим, что теорема 6 есть критерий продолжаемости полинома

$$p(z) = \{f\}_0 + \{f\}_1 z + \ldots + \{f\}_n z^n \not\equiv 0$$

до функции $f(z) = p(z) + o(z^n) \in M_F$. Теорема 6 есть также критерий принадлежности голоморфной в Δ функции f с тейлоровскими коэффициентами разложения относительно точки $z = 0$, $\{f\}_k$, $k \in \mathbb{N}$, классу M_F.

Заметим, что теорему 5 можно сформулировать используя вместо неравенства с модулем неравенство с определителем (см. формулы (6) и (7)). Действительно, пусть $\omega \in \Omega_0$. Выделив в неравенствах $D_1(1, \omega^{(1)}) \geqslant 0$ и $D_2(1, \omega^{(2)}) \geqslant 0$ полный квадрат получим неравенства $|\{\omega\}_1| \leqslant 1$ и $|\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2$, то есть неравенства (9) и (10). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как $\{\omega\}_n$ и $\overline{\{\omega\}}_n$ входит в определитель D_n только по одному разу, то исходя из определения определителя можно заключить, что он зависит от некоторых степеней $\{\omega\}_k$, $\overline{\{\omega\}}_k$, $k = 1, \ldots, n-1$ и от первой степени $\{\omega\}_n$, $\overline{\{\omega\}}_n$ и $|\{\omega\}_n|^2$. Выделяя полный квадрат получаем n-е неравенство.

Здесь мы не используем неравенств с определителями, однако у них есть одно неоспоримое преимущество — мы знаем вид этих неравенств для любого $n \in \mathbb{N}$. Это легко позволяет делать компьютерные вычисления. Например таким образом можно проверить, что мы не допустили ошибок при получении первых шести неравенств. Классические формулировки с определителями можно найти в работе [8]).

Упомянем ещё раз о том, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\Omega_0^{(n)}$ полностью определяется одним неравенством $|m_n| \leqslant r_n$. В этом и состоит основное отличие формулировок, приводимых здесь от формулировок классических. Приведем например такую формулировку из монографии [10]: "Для того чтобы $\omega^{(n)}$ была внутренней точкой $\Omega^{(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $D_n(1, \omega^{(n)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$". Здесь конечно нет ошибки, но создаётся впечатление, что для описания множества $\Omega_0^{(n)}$ необходимо n неравенств, а не одно.

Эти соображения позволяют нам переформулировать следствие 4 в терминах определителей

Следствие 5. *При $n \geqslant 2$ из справедливости одного неравенства $D_n(1, \omega^{(n)}) \geqslant 0$, следует справедливость всех неравенств $D_k(1, \omega^{(k)}) \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Более того, $D_n(1, \omega^{(n)}) > 0$ влечёт $D_k(1, \omega^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, а существование наименьшего номера $s \leqslant n$ такого, что $D_s(1, \omega^{(s)}) = 0$ влечёт $D_k(1, \omega^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, s-1$, причём $D_k(1, \omega^{(k)}) = 0$, $k = s+1, \ldots, n$.*

6. Приложения

Этот пункт посвятим применению результатов по проблеме коэффициентов для оценок модулей тейлоровских коэффициентов на классе Ω_0 и связанных классах.

При выводе коэффициентных оценок на классах функций, связанных с классом Ω_0, весьма полезно иметь в виду следующий очевидный, в свете изложенного в пункте 3, факт:

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $\omega \in \Omega_0$. Если тейлоровские коэффициенты $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$, фиксированы, то $\{\omega\}_n = c_n + e^{i\varphi} \rho\, r_n$, $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. То есть $\{\omega\}_n$ есть некоторое число из замкнутого круга $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$ с радиусом r_n и центром c_n, зависящими от $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$.*

Обобщим эту лемму, используя обозначения из пункта 5.

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $f \in M_F$. Если тейлоровские коэффициенты $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$, фиксированы, то $\{f\}_n = c_n^* + e^{i\varphi} \rho\, r_n^*$, $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. То есть $\{f\}_n$ есть некоторое число из замкнутого круга $|\{f\}_n - c_n^*| \leqslant r_n^*$ с радиусом r_n^* и центром c_n^*, зависящими от $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$.*

Заметим, что c_n^* и r_n^* можно выразить через $\{f\}_k$, $k = \overline{0, n-1}$, и соответствующим образом отредактировать формулировку теорем 6 и 3, а также других утверждений на M_F, но обычно эти выражения получаются более громоздкими.

Из леммы 2 вытекает

Утверждение 8. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega(z) \in \Omega_0$. Справедливы точные неравенства*

$$|c_n| - r_n \leqslant |\{\omega\}_n| \leqslant |c_n| + r_n. \tag{16}$$

Равенства в неравенствах (16) достигаются на границе $\Omega_0^{(n)}$: в первом неравенстве (с оговоркой $|c_n| \geqslant r_n$) при $\{\omega\}_n = c_n - r_n e^{i \arg c_n}$, во втором неравенстве при $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i \arg c_n}$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Имеем: $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, следовательно, так как $|c_n| - |\{\omega\}_n| \leqslant |\{\omega\}_n - c_n|$ и $|\{\omega\}_n| - |c_n| \leqslant |\{\omega\}_n - c_n|$, то $|c_n| - r_n \leqslant |\{\omega\}_n| \leqslant r_n + |c_n|$. Что и требовалось. ∎

Аналогично, из леммы 3 вытекает

Утверждение 9. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in M_F$. *Справедливы точные неравенства*

$$|c_n^*| - r_n^* \leqslant |\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^*, \quad c_n^* := \{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n, \ r_n^* := |\{F\}_1| r_n. \tag{17}$$

Равенства в неравенствах (17) *достигаются на границе* $\Omega_0^{(n)}$*: в первом неравенстве (с оговоркой* $|c_n^*| \geqslant r_n^*$*) при* $\{f\}_n = c_n^* - r_n^* e^{i \arg c_n^*}$, *во втором неравенстве при* $\{f\}_n = c_n^* + r_n^* e^{i \arg c_n^*}$.

Утверждение 9 говорит о том, что нам достаточно исследовать целевой функционал $|\{f\}_n|$ на максимум только на границе тела коэффициентов $\Omega_0^{(n)}$, которая полностью определяется уравнением $|\{\omega\}_n - c_n| = r_n$.

7. Проблема коэффициентов и оценка коэффициентов на классе Ω_0

В этом пункте обсуждается возможность вывода оценок модулей коэффициентов на классе Ω_0 без использования каких бы-то ни было свойств класса Ω_0 таких, например как выпуклость. Можно пользоваться только неравенствами. Возможно, что если это удастся на Ω_0, то это можно будет повторить для класса M_F, по крайней мере для некоторых функций F.

Утверждение 10. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $|c_n| + r_n \leqslant 1$. *Равенство достигается если и только если* $c_n = 0$, $r_n = 1$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Из леммы 2 следует, что $\{\omega\}_n = c_n + e^{i\varphi}\rho\, r_n$. Так как $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то $r_n + |c_n| \leqslant 1$. Далее, $|\{\omega\}_n| = 1$, как известно, равнозначно $\omega(z) = \eta z^n$, $|\eta| = 1$. ■

Заметим, что r_n^* пропорционален r_n, но c_n^* выражается через c_n сложнее, что и влечёт, в общем случае, отсутствие простой оценки $|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* \leqslant |\{F_1\}|$ в отличие от утверждения 10. Однако легко показать, что если $F(\Delta)$ — выпуклое множество, то $|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* \leqslant |\{F_1\}|$.

Из утверждения 10 и следствия 1 сразу следует

Утверждение 11. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, *тогда*

$$|c_n| \leqslant 1 - r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k}.$$

Равенство достигается если и только если $c_n = 0$, $r_n = 1$.

Если бы мы получили этот факт не используя того, что $|\{\omega_n\}| \leqslant 1$, то могли бы доказать, что из $|\{\omega_n\} - c_n| \leqslant r_n$ следует, что $|\{\omega_n\}| \leqslant 1$.

У нас даже есть база индукции. При $n = 1, 2$ утверждение 11 очевидно справедливо, так как $c_1 = c_2 = 0$. Далее, неравенство $c_3 \leqslant \frac{|m_1|^2}{r_1} + \frac{|m_2|^2}{r_2}$ эквивалентно неравенству $|m_1||m_2|^2 \leqslant r_2|m_1|^2 + |m_2|^2$, которое справедливо в силу того, что $|m_1||m_2|^2 \leqslant |m_2|^2$. Однако, как сделать шаг индукции в настоящее время не ясно.

В работе [9] приведены оценки

$$|\{\omega_1\}| \leqslant 1, \quad |\{\omega_2\}| \leqslant 1-|m_1|^2, \quad |\{\omega_3\}| \leqslant 1-|m_1|^2-\frac{|m_2|^2}{1+|m_1|},$$

из которых сразу видно, что $|\{\omega_k\}| \leqslant 1$, $k=1,2,3$.

Фиксируем $\{\omega_k\}$, $k=\overline{1,n-1}$. Пусть $n>3$. Следствие 2 говорит о том, что $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает. Следовательно и $\{\max|m_k|\}_{k=n}^{\infty}$ не возрастает. Скорее всего, $\{\max|c_k|\}_{k=n}^{\infty}$ также не возрастает. Если это так, то $\{\max|\{\omega_k\}|\}_{k=n}^{\infty}$ не возрастает, а значит $|\{\omega_k\}|$ никак не может быть больше 1.

8. От функционала к функции

Покажем два способа перехода от функционала к функции.

8.1. Первый способ

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Согласно утверждению 9 для любой функции $f \in M_F$ справедлива точная оценка

$$|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* = |\{F\}_1| r_n + \left| \{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n \right| =: J_n.$$

Так как наша задача состоит в получении точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов на классе M_F, то имеет смысл рассматривать функционал J_n в качестве целевого.

Очевидно, что точки максимума функционала J_n и функционала

$$L_n := r_n + \left| c_n + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \{\omega^k\}_n \right|, \qquad \alpha_k = \frac{\{F\}_k}{|\{F\}_1|}, \quad k=2,\ldots,n,$$

совпадают. Это соображение можно применить, если оно приведёт к некоторым упрощениям в расчётах.

Без уменьшения общности можно считать, что $\{\omega\}_1 \geqslant 0$, так как класс Ω_0 инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z. Области значений $\{\omega\}_k$ и $\{\omega\}_{k+1}$, $k=1,\ldots,n-2$ отличаются, что затрудняет решение задачи. Исправим это. Формулы (9)–(14) позволяют выразить $\{\omega\}_k$ через m_k и r_k, $k=1,\ldots 6$. Введём обозначения $z_k = m_k/r_k$, $k=1,\ldots,n-1$. Согласно пункту 4 $x_k=|z_k|$. Обозначим ещё $\varphi_k := \arg z_k$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционалов J_n и L_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим её через h_n) от $2n-3$ действительных аргументов x_k и φ_k на максимум при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $k=1,\ldots,n-1$, $\varphi_k \in [0,2\pi)$, $k=2,\ldots,n-1$.

8.2. Второй способ

Без уменьшения общности заменим функционал J_n на функционал

$$I_n := \{F\}_1 r_n + \operatorname{Re}\left(\{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n\right),$$

воспользовавшись тем, что класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z.

Как и в пункте 8.1 обозначим $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k := \arg z_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим её h_n) от $2(n-1)$ действительных аргументов x_k и φ_k на экстремумы при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$. Так как мы избавились от модуля, то теперь мы должны исследовать h_n не только на максимум, но и на минимум.

8.3. Замечания

В пункте 8.2 мы выполнили некоторые действия для того, чтобы избавиться от модуля в выражении, определяющем функцию h_n, так как возможность использовать методы дифференциального исчисления очень полезна при исследовании функций на экстремумы. Более того, h_n есть функция бесконечно гладкая по всем аргументам.

Теоретически, для решения поставленной в пункте 8.2 задачи достаточно найти значения h_n во всех стационарных точках, удовлетворяющих указанным ограничениям, а также значения h_n в граничных точках и выбрать среди этих значений, число с наибольшей абсолютной величиной. На практике задача поиска стационарных точек в аналитической форме может быть неразрешимой при $n > 2$. Дело в том, что в общем случае необходимо решать уравнения, содержащие косинусы разных аргументов, так как мы имеем дело с действительной частью функционала. Однако, если ограничиться случаем функций с действительными коэффициентами, то косинусы исчезнут и можно будет получить решения при бо́льших n.

С другой стороны, в пункте 8.1 размерность задачи на 1 ниже, что может быть полезно если использовать численные методы, не требующие дифференцируемости целевой функции. Однако, вычисление действительной части проще, чем вычисление модуля.

Заметим, что всё сказанное здесь применимо к любым коэффициентным функционалам над Ω_0, например к c_n, r_n или каким-то ещё.

9. Заключение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. В настоящей статье приводится обзор решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0. Затем выводятся первые шесть неравенств описывающие соответственно первые шесть тел коэффициентов на классе Ω_0. Далее даётся метод получения аналогичных неравенств для связанных с классом Ω_0

классов M_F, что по сути распространяет решение проблемы коэффициентов на эти классы. Затем анализируются свойства упомянутых неравенств, а также связи между ними. Кроме того показано, что для описания n-го тела коэффициентов на классе Ω_0, а следовательно и M_F достаточно только одного n-го неравенства. Обсуждается задача вывода оценок модулей тейлоровских коэффициентов из полученных неравенств.

В итоге, задача получения точных оценок модуля тейлоровского коэффициента с номером n, то есть функционала $|\{f\}_n|$, на классе M_F сначала сведена к задаче об оценке функционала над классом Ω_0, которая в свою очередь сведена к задаче о поиске максимального по модулю условного экстремума действительнозначной функции $2(n-1)$ действительных аргументов с ограничениями типа неравенств $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi$, что позволяет применить стандартные методы дифференциального исчисления для исследования на экстремумы, так как целевая функция бесконечно гладкая по всем своим аргументам. Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0.

Заметим, что в пункте 8 речь идёт об оценке модуля каждого начального коэффициента по отдельности, тогда как в пункте 7 речь идёт — об оценке всех коэффициентов сразу, причём требуется сделать это используя только неравенства и не используя каких-либо известных свойств исследуемого класса, таких как выпуклость.

Таким образом, применение разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций, а также на других классах голоморфных функций. Более того, задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Список литературы

[1] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[2] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[3] Schur I. Über potenzreihen, die in Innern des Einheitskrises Beschränkt Sind. // J. Reine Angew. Math., 1917. V. 147. P. 205–232. English translation in: Schur I. Methods in Operator Theory and Signal Processing, I. Gohberg, ed., Birkhauser. 1986. P. 31–89.

[4] Carathéodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. // Mathematische Annalen. 1907, V. 64. P. 95–115.

[5] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[6] C. Carathéodory and L. Fejer. Über den Zusammenhang der extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Landau'schen Satz // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 218–239.

[7] Töplitz O. Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 191–192.

[8] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.

[9] Ступин Д. Л. Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. n1–n2.

[10] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[11] Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. // Compl. Var. 1987. V. 9. P. 143–152.