УДК 517.53, 517.54

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КШИЖА ПРИ $n = 3$.

Ступин Д. Л.

В данной работе, на основе решения проблемы коэффициентов для класса ограниченных в единичном круге функций ω с нормировкой $\omega(0) = 0$, проводится оценка модулей первых трёх тейлоровских коэффициентов на упомянутом классе. Из полученных оценок выводится оценка модуля третьего тейлоровского коэффициента для класса ограниченных не обращающихся в нуль функций.

In this paper, basing on the solution of the coefficient problem for the class of functions, bounded in the unit disk with normalization $\omega(0) = 0$, we estimate modulus of the first three Taylor coefficients on the mentioned class. From these estimates, we derive an estimate of the modulus of a third Taylor coefficient for the class of bounded nonvanishing functions.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, тело коэффициентов, ограниченные функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов.
Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, the body of coefficients, bounded functions, Taylor coefficient modulus estimates.

1. Введение

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Класс B состоит из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж предположил [1, 2], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leqslant 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако, в настоящее время, она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [3]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное семейство функций.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leqslant 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр

$t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [4], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0, \tag{1}$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что

$$|\omega(z)| \leqslant 1, \quad \omega(0) = 0, \qquad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t \geqslant 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лаггера, Фабера, а также с проблеммой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [4] и с теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n-3$ действительных переменных. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, изложенные ниже результаты имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс B посредством класса Ω_0, связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

2. Тела коэффициентов класса Ω_0

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из n комплексных чисел $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n)$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0, будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n-ым телом коэффициентов класса Ω_0.

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_1 z^2 + \ldots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0.

Таким образом, задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе Ω_0 есть частный случай проблемы коэффициентов.

В 1917 году И. Шур исследовал класс Ω ограниченных в Δ функций [5]. В частности, он дал алгоритм определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω. Шур показал, что каждая функция класса Ω может быть параметризована некоторой последовательностью комплексных чисел, известных как параметры Шура. Они определяют представление данной функции класса Ω в виде непрерывной дроби.

Работа Шура [5] была опубликована через 10 лет после первой работы К. Каратеодори [6], посвящённой проблеме коэффициентов для класса C функций с положительной вещественной частью. Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе C считается статья Каратеодори [7]. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов, для двух упомянутых здесь классов, имеется в работе [9]. В упомянутой работе также есть краткий исторический обзор.

3. Третье тело коэффициентов класса Ω_0

Имеет место точное неравенство [12]

$$\left|\{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1}\{\omega\}_2^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}\right| \leqslant \frac{(1-|\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}. \tag{2}$$

Третье тело коэффициентов на Ω_0 полностью характеризуется неравенством (2). Заметим, что из неравенства (2) сразу следует неравенство Пика [11]

$$|\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2, \tag{3}$$

определяющее второе тело коэффициентов, а из неравенства (3) сразу следует неравенство Шварца [11]

$$|\{\omega\}_1| \leqslant 1, \tag{4}$$

определяющее первое тело коэффициентов. Чтобы убедиться в этом достаточно преобразовать неравенства $r_3 \geqslant 0$ и $r_2 \geqslant 0$, где r_3 и r_2 — правые части неравенств (2) и (3) соответственно.

Один из методов получения бесконечной последовательности коэффициентных неравенств типа (2), характеризующих класс Ω_0, описан в работе [12]. Здесь вся проблема состоит в том, что из n-го неравенства можно очень легко получить $(n-1)$-е, но с ростом n всё сложнее получить $(n+1)$-е неравенство.

Неравенство (4) описывает круг с центром c_1, находящимся в начале координат и радиусом $r_1 := 1$, неравенство (3), при фиксированном $\{\omega\}_1$, описывает круг с центром c_2, находящимся в начале координат и радиусом $r_2(\{\omega\}_1) := 1 - |\{\omega\}_1|^2$, а неравенство (2), при фиксированных $\{\omega\}_1$ и $\{\omega\}_2$, описывает круг с центром в

$$c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := -\frac{\overline{\{\omega\}_1}\{\omega\}_2^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}$$

и радиусом

$$r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := \frac{(1-|\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}.$$

Учитывая тот факт, что разность модулей не превосходит модуля разности, из формулы (2) получаем

Следствие 1. *Если $\omega \in \Omega_0$, то имеют место точные неравенства*

$$\frac{|\{\omega\}_2|^2}{1-|\{\omega\}_1|} - (1-|\{\omega\}_1|^2) \leqslant |\{\omega\}_3| \leqslant 1-|\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1+|\{\omega\}_1|}. \qquad (5)$$

Равенства в неравенствах (5) достигаются на границе $\partial\Omega_0^{(3)}$ 3-го тела коэффициентов $\Omega_0^{(3)}$: в первом неравенстве (с оговоркой $|c_3| \geqslant r_3$) при $\{\omega\}_3 = c_3 - r_3 e^{i\arg c_3}$, а во втором неравенстве при $\{\omega\}_3 = c_3 + r_3 e^{i\arg c_3}$.

Доказательство. Неравенство (2) влечёт $\big||\{\omega\}_3| - |c_3|\big| \leqslant r_3$, что эквивалентно двум неравенствам $-(|\{\omega\}_3| - |c_3|) \leqslant r_3$ и $|\{\omega\}_3| - |c_3| \leqslant r_3$, преобразовав которые мы получим требуемое. Случаи достижения равенства ясны из геометрических соображений о кругах на комплексной плоскости. □

Из неравенств (5) сразу следует, что при фиксированных $|\{\omega\}_1|$ и $|\{\omega\}_2|$ таких, что $|c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)| > r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$ коэффициент $\{\omega\}_3$ заметает кольцо с центром в начале координат и радиусами $|c_3| - r_3$ и $|c_3| + r_3$. Интересно, что происходит при $n = 4$ при фиксировании одних параметров и варьировании других?

Из неравенств (4), (3) и (5) немедленно следует, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, причём равенства здесь достигаются только на вращениях функций $\omega(z) = z^n$, $n = 1, 2, 3$. Пользуясь неравенством (2) мы доказали, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, $n = 1, 2, 3$. Возникает вопрос: возможно ли доказать, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, пользуясь исключительно неравенствами, описывающими тела коэффициентов при $n > 3$?

Итак, мы описали границу третьего тела коэффициентов и и пришли к закономерному выводу о том, что своего максимума $|\{\omega\}_3|$ достигает где-то на $\partial\Omega_0^{(3)}$.

Множество A называется абсолютно выпуклым, если оно выпуклое и сбалансированное, то есть $aA \subset A$, $|a| \leqslant 1$.

Отметим, что класс Ω_0 есть абсолютно выпуклое множество. Кроме того, все тела $\Omega_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, есть абсолютно выпуклые компакты.

4. О визуализации тел коэффициентов класса Ω_0

Первое тело коэффициентов это просто единичный круг на комплексной плоскости или отрезок $[-1, 1]$ оси x, если ограничиться функциями с действительными коэффициентами.

Второе тело коэффициентов уже лежит в 4-х мерном действительном пространстве, однако его можно изобразить на плоскости xy, если ограничиться функциями с действительными коэффициентами. Второе тело коэффициентов определяется неравенством (3) и, в случае действительных коэффициентов, является абсолютно выпуклым компактом, заключённый между параболами $y = -1 + x^2$ и $1 - x^2$ (рис. 1 слева). Проекция второго тела на ось x есть первое тело.

Третье тело коэффициентов определяется неравенством (2) и, в общем случае лежит в $\mathbb{C}^3$ или в $\mathbb{R}^6$ и так далее.

Утверждение 1. *В случае действительных коэффициентов, третье тело есть абсолютно выпуклый компакт (рис. 1 справа), заключённый между двумя поверхностями*

$$z = \frac{y^2}{1+x} - (1-x^2) \quad \text{и} \quad z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1-x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \ -(1-x^2) \leqslant y \leqslant 1 - x^2.$$

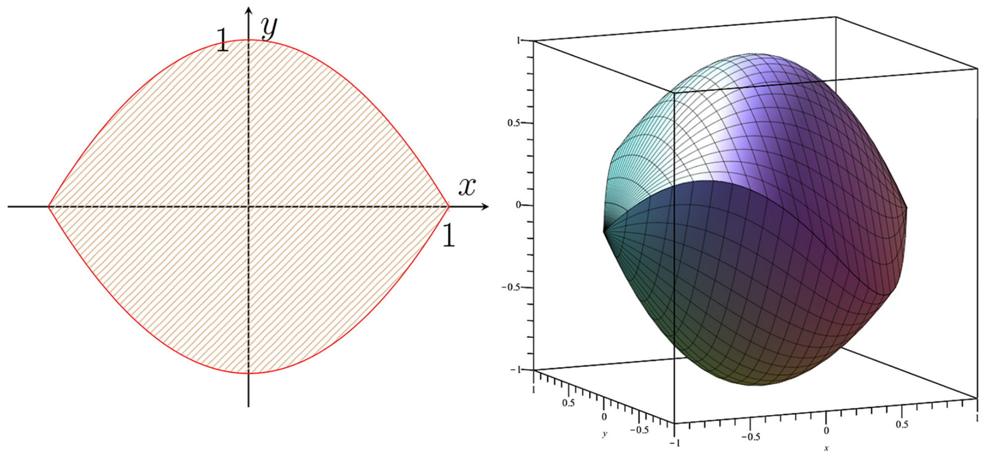

Рис. 1: Второе и третье тела коэффициентов

Проекция третьего тела на плоскость xy есть второе тело (рис. 1 слева).

Доказательство. Обозначим $x := \{\omega\}_1$, $y := \{\omega\}_2$, $z := \{\omega\}_3$. Неравенство (2) упростим, избавившись от лишних, в данном случае, сопряжений и модулей. Раскрыв последний оставшийся модуль, в левой части упрощённого неравенства, получим 2 неравенства $-(z - c_3(x, y)) \leqslant r_3(x, y)$ и $z - c_3(x, y) \leqslant r_3(x, y)$. $\square$

Проецирование обсуждалось при получении неравенств (3) и (4) из неравенства (2). Абсолютная выпуклость наследуется телами коэффициентов от Ω_0.

5. Оценка $|\{f\}_3|$ на классах $f \in B_t$, $t \geqslant 0$

5.1. Предварительный анализ задачи

Пользуясь связью (1), из неравенства (2) можно получить неравенство, связывающее $\{f\}_1$, $\{f\}_2$, $\{f\}_3$ и характеризующее 3-е тело коэффициентов на классе B_t. В этом случае, задача сводится к оценке простого функционала $|\{f\}_3|$ на сложно устроенном множестве $B_t^{(3)}$.

Второй вариант — выразить $\{f\}_3$ через $\{\omega\}_1$, $\{\omega\}_2$, $\{\omega\}_3$, используя связь (1) и оценивать более сложный функционал, но на достаточно простом множестве.

Здесь мы будем использовать второй подход. Имеем

$$F(z, t) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \ldots = \frac{1}{e^t} + \frac{2t}{e^t}\left(z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \ldots\right),$$

где $\alpha := (t - 1)$, $\beta := \dfrac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3)$. Легко показать, что

$$\{f\}_3 = \{F\}_1\{\omega\}_3 + \{F\}_2 2\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \{F\}_3\{\omega\}_1^3 = \\ = 2te^{-t}\left(\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right).$$

5.2. Сведение задачи к максимизации функции 3-х действительных аргументов

Задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения. Здесь будет показан один из способов сведения задачи на экстремум функционала к задаче на экстремум действительнозначной функции 3-х действительных переменных.

Из второго из неравенств (5) следует, что

$$\frac{|\{f\}_3|}{2te^{-t}} = \left|\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right| \leqslant \\ \leqslant |\{\omega\}_3| + \left|2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right| \leqslant \\ \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1+|\{\omega\}_1|} + \left|2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3\right|. \quad (6)$$

Без потери общности можно считать, что $\{\omega\}_1 > 0$. Принимая во внимание неравенства (4) и (3), введём обозначения $x := \{\omega\}_1$, $y := |\{\omega\}_2|$, $\varphi := \arg\{\omega\}_2$. Итак, наша задача свелась к поиску условного максимума функции 3-х действительных аргументов

$$h(x,y,\varphi) := 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+x} + x|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2|,$$

при ограничениях $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

5.3. Исследование $h(x,y,\varphi)$ на максимум по φ

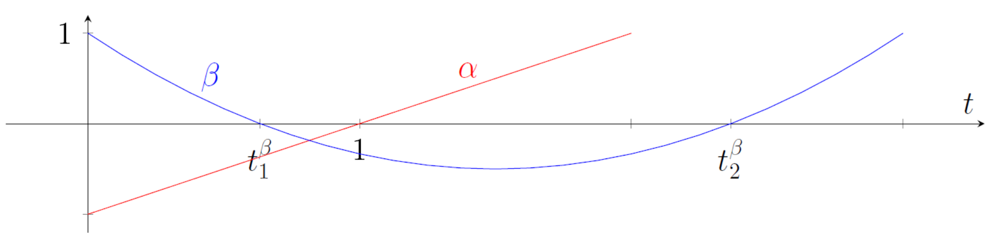

Рис. 2: Графики функций $\alpha = \alpha(t)$ и $\beta = \beta(t)$

Исследуем $h(x,y,\varphi)$ на максимум по φ. Так как неравенство (3) никак не ограничивает φ, то $|2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2|$ принимает максимальное значение при $e^{i\varphi} = \pm 1$, в зависимости от того совпадают знаки α и β или нет (см. рис. 2). Окончательно,

$$\max_{\varphi} |2\alpha y e^{i\varphi} + \beta x^2| = \begin{cases} -2\alpha y + \beta x^2, & t \in [0, t_1^\beta), \\ -2\alpha y - \beta x^2, & t \in [t_1^\beta, 1), \\ 2\alpha y - \beta x^2, & t \in [1, t_2^\beta), \\ 2\alpha y + \beta x^2, & t \geqslant t_2^\beta, \end{cases} = 2|\alpha| y + |\beta| x^2.$$

и

$$h(x,y) := \max_{\varphi} h(x,y,\varphi) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1+x} + 2|\alpha| xy + |\beta| x^3, \quad (7)$$

где $t_1^\beta := (3-\sqrt{3})/2 \approx 0.63$ и $t_2^\beta := (3+\sqrt{3})/2 \approx 2.37$ — корни уравнения $\beta(t) = 0$.

5.4. Исследование $h(x,y)$ на максимум по y и по x

Исследуем $h(x,y)$ на максимум по y. Имеем

$$\begin{aligned}\big(h(x,y)\big)'_y &= 2\left(-\frac{y}{1+x} + |\alpha| x\right),\\ \big(h(x,y)\big)''_{yy} &= -\frac{2}{1+x} < 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y = y_1 := |\alpha| x(1+x)$$

есть точка максимума. Точка $y = y_1$ всегда находится в области определения, так как $y_1 \leqslant 1 - x^2 =: y_4$ равносильно $x \leqslant (1+|\alpha|)^{-1} =: x_1$, причём $x_1 \in (0,1]$, при $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.5. Исследование $h(x,0)$ на максимум по x

Рассмотрим граничную точку $y = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}h(x,0) &= 1 - x^2 + |\beta| x^3,\\ \big(h(x,0)\big)'_x &= -2x + 3|\beta| x^2,\\ \big(h(x,0)\big)''_{xx} &= -2 + 6|\beta| x.\end{aligned}$$

Стационарная точка $x = 0$, очевидно, есть точка максимума и

$$h(0,0) = 1, \qquad t \geqslant 0.$$

Стационарная же точка $x = x_2 := 2/(3|\beta|)$ является точкой минимума, так как $\big(h(x,0)\big)''_{xx}\big|_{x=x_2} = 2$. В граничной точке $x = 1$ имеем

$$h(1,0) = |\beta|, \qquad t \geqslant 0.$$

5.6. Исследование $h(x,y_1)$ на максимум по x

Далее, рассмотрим точку максимума $y = y_1$. Имеем

$$\begin{aligned}h(x,y_1) &= 1 - (1-\alpha^2)x^2 + (\alpha^2 + |\beta|)x^3,\\ \big(h(x,y_1)\big)'_x &= -2(1-\alpha^2)x + 3(\alpha^2 + |\beta|)x^2,\\ \big(h(x,y_1)\big)''_{xx} &= -2(1-\alpha^2) + 6(\alpha^2 + |\beta|)x.\end{aligned}$$

Стационарная точка $x = 0$ является точкой максимума при $t \in (0,2)$ и точкой минимума при $t > 2$, так как $\big(h(x,y_1)\big)''_{xx}\big|_{x=0} = -2(1-\alpha^2) = 2t(t-2)$. Значение в точке максимума

$$h(0, y_1(0)) = 1, \quad t \in (0,2).$$

Наоборот, стационарная точка

$$x = x_3 := \frac{2}{3}\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+|\beta|}$$

является точкой минимума при $t \in (0,2)$ и точкой максимума при $t > 2$, так как $\big(h(x,y_1)\big)''_{xx}\big|_{x=x_3} = -\big(h(x,y_1)\big)''_{xx}\big|_{x=0}$. Однако, $x_3 < 0$, при $t > 2$, поэтому исключаем эту точку из рассмотрения. В граничной точке $x = 1$ имеем, что $h(1, y_1(1)) = 2\alpha^2 + |\beta| = |\beta|$. Действительно, $y_1 \leqslant y_4$ равносильно $x \leqslant x_1$, но $x_1 = 1$ только при $t = 1$, когда $\alpha = 0$.

5.7. Исследование $h(x, y_4)$ на максимум по x

Наконец, рассмотрим граничную точку $y = y_4$. Имеем

$$\begin{aligned} h(x,y_4) &= (2|\alpha|+1)x - (2|\alpha|+1-|\beta|)x^3, \\ \big(h(x,y_4)\big)'_x &= (2|\alpha|+1) - 3(2|\alpha|+1-|\beta|)x^2, \\ \big(h(x,y_4)\big)''_{xx} &= -6(2|\alpha|+1-|\beta|)x. \end{aligned}$$

В граничной точке $x = 0$ имеем $h(0, y_4(0)) = 0$.

Стационарная точка

$$x = x_4 := \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{2|\alpha|+1}{2|\alpha|+1-|\beta|}}$$

является точкой максимума при $t \in [0, 3+\sqrt{6})$, так как

$$\big(h(x,y_4)\big)''_{xx}\big|_{x=x_4} = -2\sqrt{3}\sqrt{2|\alpha|+1-|\beta|}\sqrt{2|\alpha|+1} < 0,$$

а $2|\alpha|+1-|\beta| < 0$ при $t > 3+\sqrt{6} \approx 5.45$. При этом $0 \leqslant x_4 \leqslant 1$ только при $t \in [0, t_3]$, где $t_3 := (5+\sqrt{15})/2 \approx 4.44$ (см. рис. 3). Значение в точке максимума

$$h(x_4, y_4(x_4)) = 2\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{\frac{(2|\alpha|+1)^3}{2|\alpha|+1-|\beta|}}, \qquad t \in [0, t_3].$$

В граничной точке $x = 1$ имеем $h(1, y_4(1)) = |\beta|$, $t \geqslant 0$.

5.8. Анализ результатов

Итак, при каждом $t \geqslant 0$ нам нужно найти максимум среди $h(0,0)$, $h(1,0)$ и $h(x_4, y_4(x_4))$. Обозначим $M(t) := \max\{h_t(0,0), h_t(1,0), h_t(x_4, y_4(x_4))\}$. Уравнение $h(x_4, y_4(x_4)) = h(0,0)$ имеет 2 решения $t_1 := (33-3\sqrt{57})/32 \approx 0.32$ и

$$t_2 := \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\sqrt[3]{26\sqrt{2}+8\sqrt{21}}}{4} + \frac{1}{2\sqrt[3]{26\sqrt{2}+8\sqrt{21}}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) \approx 1.65.$$

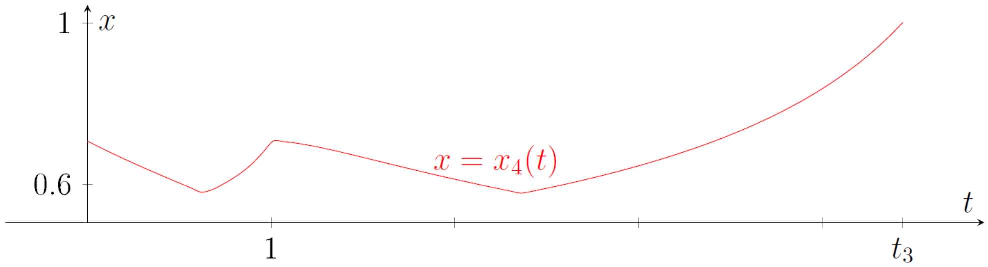

Рис. 3: График функции $x = x_4(t)$

Уравнение $h(x_4, y_4(x_4)) = h(1, 0)$ имеет 1 решение — число $t = t_3 \approx 4.44$, уже встречавшееся нам чуть выше. Выше, мы ввели число $t_2^\beta := (3 + \sqrt{3})/2 \approx 2.37$ — наибольший корень уравнения $\beta(t) = 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если $f \in B_t$, то имеет место оценка*

$$|\{f\}_3| \leqslant 2te^{-t}M(t) = 2te^{-t}\begin{cases} g(t), & t \in [0, t_1), \\ 1, & t \in [t_1, t_2), \\ g(t), & t \in [t_2, t_3), \\ \beta(t), & t \geqslant t_3, \end{cases}$$

где $g(t) := 2\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{\frac{(2|t-1|+1)^3}{2|t-1|+1-|2t^2-6t+3|/3}}$, *точная при* $t \notin (0, t_1) \cup (t_2^\beta, t_3)$.

Ясно, что при некоторых t первое из неравенств (6) может быть строгим, вследствии чего полученная оценка будет грубой. К сожалению, в нашем случае, это так при $t \in (0, t_1)$ и при $t \in (t_2^\beta, t_3)$ (см. рис. 4). Тем не менее, и этого результата достаточно для доказательства гипотезы Кшижа при $n = 3$, так как

$$\max_{t \geqslant 0}\left(\frac{2t}{e^t}M(t)\right) = \frac{2}{e} \quad \text{и} \quad \frac{2t}{e^t}M(t) = \frac{2}{e} \iff t = 1.$$

Для доказательства нужно решить неравенство $2t/e^t M(t) < 2/e$ при $t \geqslant 0$ (см. рис. 4).

Следствие 2. *Гипотеза Кшижа справедлива при $n = 3$. То есть, если $f \in B$, то $|\{f\}_3| \leqslant 2/e$, причём равенство достигается только на вращениях функции $F(z^3, t)$ в плоскостях переменных z и w.*

Сравним только что полученную оценку и оценку, точную для всех $t \geqslant 0$, полученную Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем в работе [13]:

Теорема 2. (Прохоров, Шиналь) *Если $f \in B_t$, то*

$$\Psi(t) := \sup_{f \in B_t} |\{f\}_3|(t) = \begin{cases} 2te^{-t}, & t \in [0,\ 1.65\ldots), \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sqrt{(2t-1)^3}, & t \in [1.65\ldots,\ 3.22\ldots), \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}(2t^2 - 6t + 3)\sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, & t \in [3.22\ldots,\ 3.47\ldots), \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}te^{-t}\sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2+6t-6}}, & t \in [3.47\ldots,\ 3.82\ldots), \\ \frac{2}{3}te^{-t}(2t^2 - 6t + 3), & t \geqslant 3.82\ldots \end{cases}$$

На рис. 4 изображены графики функций $2te^{-t}M(t)$ и $\Psi(t)$. Эти графики совпадают при $t \in [t_1, t_2^\beta]$ и при $t \geqslant t_3$. В остальных точках первый график лежит над вторым.

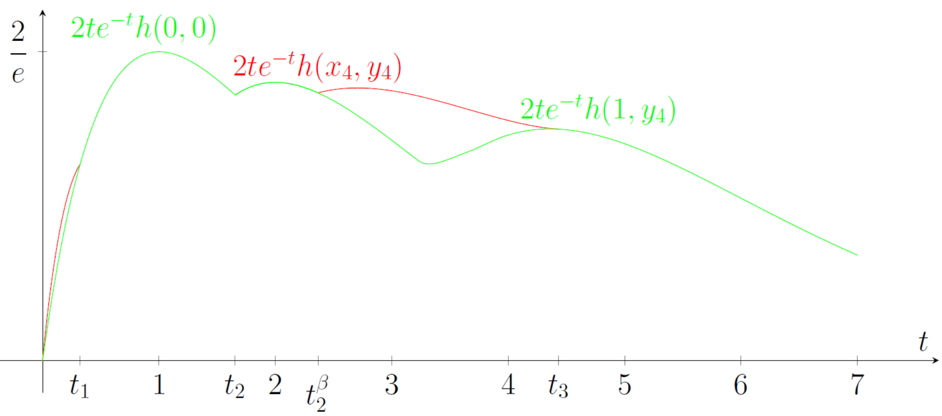

Рис. 4: Графики функций $2te^{-t}M(t)$ и $\Psi(t)$.

6. Краткий исторический обзор по начальным коэффициентам

По геометрическим соображениям очевидно, что $|\{f\}_0| \leqslant 1$.

Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [15].

Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [4]. В статье [16] оценки $|\{f\}_1| \leqslant 2/e$ и $|\{f\}_2| \leqslant 2/e$ были найдены сразу несколькими способами, а именно методом структурных формул, параметрическим методом и методом, основанным на принципе подчинения.

Я. Кшиж, располагая точными оценками $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$, высказал свою гипотезу в 1968 году [2].

Затем, в 1977 году, появилась большая работа Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [16]. В их статье, при помощи вариационного метода, перенесённого с класса Каратеодори, была получена формула (7) и на её основе впервые найдена оценка $|\{f\}_3| \leqslant 2/e$. Точная оценка $|\{f\}_3|$ дана этими авторами не для всех $t > 0$, однако ими доказано, что глобальный максимум $|\{f\}_3|$ достигается при $t = 1$. Стоит отметить, что в [16] функция $M(t)$ состоит из пяти разных формул, а у нас только из трёх, но это только за счёт упрощений, связанных с раскрытием модулей в $g(t)$.

Спустя 10 лет, Дж. Браун в [12] написал, что получил точно такой же результат как и в [16], но другим методом. Точнее, в [12] приведена формула (7). Исследование на максимум в [12] отсутствует.

Оценка, полученная автором этой работы, совпадает с [16], но получена другим методом. Возможно, Дж. Браун [12] неявно располагал вторым из неравенств (5), так как в его работе присутствует формула (7), но в тексте его работы нет вывода формулы (7) и нет неравенства (5).

Точная оценка $|\{f\}_3|$, при каждом t, была получена позднее Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем [13] при помощи неравенств Каратеодори-Тёплица.

Кроме того, стоит отметить результат Р. Переца [21], который доказал оценку $|\{f\}_3| \leqslant 2/e$ используя то, что отрезок ряда Тейлора $\{f\}_0 + \ldots + \{f\}_3 z^3$ любой функции из B можно продолжить до функции класса Каратеодори. Доказательство Р. Эрмерс [19] имеет алгебраическую форму, а сама оценка состоит всего из трёх формул.

Доказательство того, что $|\{f\}_4| \leqslant 2/e$ в 1983 году появилось у Д. Тана в работе [17], но его рассуждения, основанные на принципе подчинения и лемме Шварца-Пика, не были полными [14]. В том же году появилось доказательство П. Н. Пронина [18], основанное на том же самом вариационном методе, который использовался в [16] при получении оценки $|\{f\}_3|$. Позже, в 1987 году, Дж. Браун [12] опубликовал свой вариант подхода к доказательствам оценок $|\{f\}_n| \leqslant 2/e$ для $n = \overline{1,4}$. Р. Ермерс [19] предоставил более обстоятельное доказательство, проведённое при помощи алгебраического метода, восходящего к И. Шуру. Как отмечается в [14], наиболее убедительным стало доказательство В. Шапеля [20], использовавшего теорию меры для оценки коэффициентов.

Остановимся на статье Дж. Брауна [12] подробнее. О. Тёплицу в 1911 году удалось найти [8] простое и очень красивое описание тел коэффициентов на классе C в детерминантной форме, посредством которого все результаты Каратеодори были приведены к алгебраической форме. После чего математики незаслуженно забыли о подходе Шура. Дошло до того, что неравенства для класса Ω_0 стали получать из неравенств Каратеодори-Тёплица при помощи связи между классами C и Ω_0. При помощи метода, основанного на алгоритме, аналогичном алгоритму И. Шура для класса Ω, Браун получил известные до него неравенства (4), (3), (2), описывающие первые три тела коэффициентов класса Ω_0, а также новое неравенство, характеризующее четвёртое тело. Далее, при помощи формулы (1) он рассмотрел $|\{f\}_n|$ как нелинейные функционалы на классе Ω_0, после чего каким-то образом свёл исходную задачу к задаче о нахождении условного максимума действительнозначной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств. Однако, само исследование на максимум в его работе отсутствует, что порождает вполне справедливые сомнения математического сообщества в представленных результатах [14]. Правда, по поводу исследования на максимум, в случае $n = 3$, Браун ссылается на [16], а при $n = 4$ на [17].

Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [3].

Автор данной статьи в работе [10] при помощи метода Шапеля получил оценки $|\{f\}_n| \leqslant 2/e$, $n = \overline{1,5}$, а также оценку $|\{f\}_6| \leqslant 2/e + 0.001163$. Интересно, что при $n = 2$ оценка получилась точной при всех t, а при $n = 3$ оценка, полученная автором этой статьи совпала с оценкой Р. Эрмерс [19]. В. Шапель в [20] задал вопрос: до какого номера n применим его метод? Похоже, что ответ таков: $n = 6$.

Исследования по проблеме Кшижа не ограничиваются оценками модулей начальных тейлоровских коэффициентов. Обзор по тематике коэффициентов голоморфных функций, в частности по гипотезе Кшижа, имеется в статье [14].

7. Заключение

В настоящей статье решается задача получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов $\{\omega\}_1$, $\{\omega\}_2$, $\{\omega\}_3$ на классе Ω_0. Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0. Побочным результатом этих оценок является визуализация тел коэффициентов класса Ω_0.

Далее решается задача получения верхней оценки функционала $|\{f\}_3|$ на классе B, путём перехода к функционалу над классом Ω_0. На основе упомянутых оценок на классе Ω_0, удалось получить функционал, мажорирующий исходный. После чего задача сведена к задаче о поиске условного максимума функции трёх действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что позволило применить стандартные методы дифференциального исчисления для получения основного результата — теоремы 1.

Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t добыта в работе [13]. Эта оценка получена, в основном, при помощи описанного выше метода, разумеется, без использования огрубления. При этом, по понятным причинам (точность и использование двух параметров α и β вместо одного t), доказательство существенно больше приведённого здесь.

Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе B, а также на других классах голоморфных функций. Более того, задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Список литературы

[1] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.

[2] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

[3] Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.

[4] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.

[5] Schur I. Über potenzreihen, die in Innern des Einheitskrises Beschränkt Sind. // J. Reine Angew. Math., 1917. V. 147. P. 205–232. English translation in: Schur I. Methods in Operator Theory and Signal Processing, I. Gohberg, ed., Birkhauser. 1986. P. 31–89.

[6] Carathéodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. // Mathematische Annalen. 1907, V. 64. P. 95–115.

[7] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.

[8] Töplitz O. Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 191–192.

[9] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.

[10] Ступин Д. Л. Теория меры и оценка модулей первых шести коэффициентов в проблеме Кшижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2015. С. 36–49.

[11] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[12] Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. // Compl. Var. 1987. V. 9. P. 143–152.

[13] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. N. 5-6. P. 223–230.

[14] Прохоров Д. В. Коэффициенты голоморфных функций. // Комплексный анализ и теория представлений. Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Москва. ВИНИТИ. 2000. Т. 71.

[15] Levin V. I., Fenchel W., Reissner E. Lösing der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80-83.

[16] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathematique 1977. V 31. P. 169–190.

[17] Tan Delin. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Chinese Ann. Math. 1983. V. A4. P. 97–104.

[18] Пронин П. Н. Достаточные условия однолистности различных операторов и экстремальные задачи на классе ограниченных функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов: Саратовский гос. ун-т. 1983. 105 с.

[19] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.

[20] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.

[21] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.