

**ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРЕВЫШЕНИЯ НОРМАТИВОВ ПО ОБЩЕЙ
ЖЕСТКОСТИ, ЦВЕТНОСТИ И ОКИСЛЯЕМОСТИ РЕЧНОЙ ВОДЫ***

Ялалетдинова А.В., Малкова М.А., Кантор Е.А.

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический
университет», г. Уфа
e-mail: hawk22.89@mail.ru

Природная вода содержит различные примеси и является многофазной средой [1-5]. Поэтому в периоды, характеризующиеся ухудшением некоторых показателей необходимо контролировать качество воды.

Оценка вероятности появления неблагоприятных событий, связанных с ухудшением некоторых показателей, например, общей жесткости, цветности и окисляемости воды, поможет выработать решения для управления качеством воды и оптимизировать возможности водопроводных станций [3-5].

Ранее нами проводилось изучение сезонного характера распределения окисляемости и общей жесткости воды в створе поверхностного водозабора [3, 4]. Для учета сезонных особенностей изучаемого процесса, статистическая обработка проводилась для каждого месяца отдельно. Полученные эмпирические функции распределения показателей удовлетворительно описывались полиномами третьей и четвертой степени $F(x)$, по которым характеризовались распределения показателей и определялись вероятности того, что показатели примут то или иное значение x [3, 4].

Поскольку теоретическая функция распределения должна обладать всеми свойствами функции распределения (быть непрерывной и монотонно

возрастающей на отрезке $[0;1]$), область определения вычисленных полиномов была ограничена отрезками $x \in [x_1; x_2] \subset [x_{\min}; x_{\max}]$, здесь x_{\min} , x_{\max} - минимальное и максимальное значение в выборке; x_1 , x_2 - значения аргумента x , при которых функция $F(x)$ непрерывна и имеет область значений от 0 до 1 [6].

Полиномы, вычисленные стандартными методами *Excel*, не всегда удовлетворяют этому, поэтому нами проведена оптимизация выбранной теоретической функции распределения $F(x)$, в результате которой определяются подходящие коэффициенты для полиномов, при которых новая оптимизированная функция $F_o(x)$ будет иметь все свойства функции распределения [5].

По принципу Метода наименьших квадратов минимизируется сумма квадратов разностей

$$S = \sum_{i=1}^m (F_n(x_i) - F(x_i))^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

- $F(0) = P(X < 0) = 0$, т.к. значения показателей не могут быть отрицательными

$$F(0) = 0 \quad (2)$$

- область значений функции распределения ограничена отрезком $[0;1]$

$$F(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 > 0 \quad (3)$$

$$F(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 < 1 \quad (4)$$

- значение первой производной должно быть положительно, чтобы функция была монотонно возрастающей

$$F'(x_i) = a_1 + 2a_2 x_i + 3a_3 x_i^2 > 0 \quad (5)$$

Гипотеза о соответствии теоретического распределения эмпирическому проверяется при помощи критерия согласия Колмогорова [6]. Для этого вычисляется мера расхождения между теоретическим и эмпирическим распределениями и величина λ

$$D = \max |F_n(x) - \hat{F}(x)| \quad (6)$$

$$\lambda = D\sqrt{n} \quad (7)$$

где n - объем выборки.

Для выбранного уровня значимости α (0,05) определяется табличное значение λ_α [6]. Если $\lambda \leq \lambda_\alpha$, то гипотеза не противоречит опытным данным.

Согласно (1-5) определены подходящие коэффициенты, при которых полиномы общей жесткости, цветности и окисляемости имеют все свойства функции распределения (табл. 1).

Таблица 1 - Коэффициенты оптимизированных полиномов, при которых теоретические распределения общей жесткости, цветности и окисляемости воды имеют все свойства функции распределения

Месяц		Коэффициенты полиномов вида $F(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$				
		a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
Общая жесткость	Январь	0	-0,0035	0,0813	-0,2632	0
	Февраль	0	-0,0211	0,3110	-1,0137	0
	Март	0	-0,0137	0,2175	-0,7291	0
	Апрель	0	-0,0056	0,0773	-0,1320	0
	Май	0	-0,0139	0,0984	0,0554	0
	Июнь	0	-0,0389	0,3455	-0,5541	0
	Июль	0	-0,0158	0,1963	-0,4150	0
	Август	0	-0,0305	0,3626	-0,9095	0
	Сентябрь	0	-0,0381	0,4632	-1,2426	0
	Октябрь	0	-0,1401	2,1015	-9,8756	0
	Ноябрь	0	-0,0037	0,0846	-0,2326	0
	Декабрь	0	-0,0145	0,1963	-0,5186	0
Цветность	Январь	0	0	-0,0005	0,0442	0
	Февраль	$5,6 \cdot 10^{-7}$	$-3,5 \cdot 10^{-5}$	-0,0005	0,0639	0
	Март	0	$3,9 \cdot 10^{-5}$	-0,0034	0,0982	0
	Апрель	0	$1,3 \cdot 10^{-6}$	-0,0004	0,0325	0
	Май	0	$-7,4 \cdot 10^{-6}$	0,0011	-0,0256	0
	Июнь	0	$9,4 \cdot 10^{-6}$	-0,0012	0,0496	0
	Июль	0	$-1,6 \cdot 10^{-5}$	0,0012	0,0025	0
	Август	0	$-7,8 \cdot 10^{-5}$	0,0041	-0,0199	0
	Сентябрь	0	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	0,0067	-0,0366	0
	Октябрь	0	$-1,9 \cdot 10^{-6}$	-0,0003	0,0417	0
	Ноябрь	0	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	0,0003	0,0335	0
	Декабрь	0	$2,0 \cdot 10^{-6}$	-0,0005	0,0425	0
Окисляемость	Январь	0	-0,0210	0,1194	0,1084	0
	Февраль	0	-0,1284	0,5556	-0,1918	0
	Март	0,0962	-0,6938	1,5082	-0,5443	0
	Апрель	$-4,2 \cdot 10^{-5}$	0,0007	-0,0128	0,1979	0
	Май	0	-0,0036	0,0611	-0,1509	0
	Июнь	0	-0,0097	0,1221	-0,2346	0
	Июль	-0,0026	0,0078	0,0971	-0,1544	0

Август	0	-0,0330	0,2556	-0,2592	0
Сентябрь	0,0178	-0,2230	0,8746	-0,8279	0
Октябрь	0	-0,0108	0,0709	0,1157	0
Ноябрь	0	-0,0005	-0,0193	0,3009	0
Декабрь	0	-0,0219	0,1538	-0,0257	0

Полученные полиномы позволили рассчитать значения оптимизированной теоретической функции распределения $F_o(x)$, в качестве примера в таблице приведены распределения показателей для января, апреля, июля и августа (табл. 2).

Таблица 2 - Характеристики теоретического распределения общей жесткости, цветности и окисляемости воды (после оптимизации): № - номер интервала, s_1 - нижняя граница интервала, s^* - середина интервала, s_2 - верхняя граница интервала, n_i - частоты, w_i - частоты, $F_n(s_2)$ - накопленная частота, $F_o(s_2)$ - значения оптимизированной функции распределения, $F_o'(s_2)$ – первая производная (плотность)

№	s_1	s^*	s_2	$F_n(s_2)$	$F_o(s_2)$	$F_o'(s_2)$
Общая жесткость						
Январь						
1	3,6	3,75	3,9	0,005	0,000	0,197
2	3,9	4,05	4,2	0,018	0,066	0,221
3	4,2	4,35	4,5	0,056	0,139	0,243
4	4,5	4,65	4,8	0,139	0,218	0,264
5	4,8	4,95	5,1	0,315	0,303	0,282
6	5,1	5,25	5,4	0,429	0,392	0,298
7	5,4	5,55	5,7	0,517	0,486	0,313
8	5,7	5,85	6,0	0,580	0,584	0,325
9	6,0	6,15	6,3	0,680	0,684	0,336
10	6,3	6,45	6,6	0,799	0,788	0,345
11	6,6	6,75	6,9	0,964	0,893	0,351
12	6,9	7,05	7,2	1,000	1,000	0,356
Апрель						
1	0,0	1,0	2,0	0,060	0,000	0,006
2	2,0	3,0	4,0	0,328	0,347	0,179
3	4,0	5,0	6,0	0,784	0,771	0,217
4	6,0	7,0	8,0	1,000	1,000	0,120
8	3,9	4,05	4,2	0,920	0,886	0,331
9	4,2	4,35	4,5	0,982	0,959	0,244
10	4,5	4,65	4,8	1,000	1,000	0,136
Июль						
1	2,4	2,55	2,7	0,002	0,000	0,278
2	2,7	2,85	3,0	0,011	0,096	0,320
3	3,0	3,15	3,3	0,057	0,201	0,352
4	3,3	3,45	3,6	0,151	0,314	0,376
5	3,6	3,75	3,9	0,307	0,432	0,392
6	3,9	4,05	4,2	0,571	0,551	0,399
7	4,2	4,35	4,5	0,831	0,670	0,398

№	s_1	s^*	s_2	$F_n(s_2)$	$F_o(s_2)$	$F_o'(s_2)$
8	4,5	4,65	4,8	0,941	0,787	0,388
9	4,8	4,95	5,1	0,994	0,897	0,369
10	5,1	5,25	5,4	1,000	1,000	0,342
Август						
1	3,2	3,4	3,6	0,011	0,000	0,497
2	3,6	3,8	4,0	0,081	0,209	0,523
3	4,0	4,2	4,4	0,273	0,416	0,520

Продолжение Таблицы 2

№	s_1	s^*	s_2	$F_n(s_2)$	$F_o(s_2)$	$F_o'(s_2)$
4	4,4	4,6	4,8	0,610	0,611	0,488
5	4,8	5,0	5,2	0,910	0,781	0,426
6	5,2	5,4	5,6	0,996	0,915	0,335
7	5,6	5,8	6,0	1,000	1,000	0,215
Цветность						
Январь						
1	0,0	3,5	7,0	0,233	0,286	0,041
2	7,0	10,5	14,0	0,535	0,524	0,034
3	14,0	17,5	21,0	0,756	0,714	0,027
4	21,0	24,5	28,0	0,881	0,857	0,020
5	28,0	31,5	35,0	0,957	0,952	0,014
6	35,0	38,5	42,0	0,996	1,000	0,007
7	42,0	45,5	49,0	1,000	1,000	0,000
Апрель						
1	0,0	4,5	9,0	0,144	0,264	0,029
2	9,0	13,5	18,0	0,417	0,476	0,023
3	18,0	22,5	27,0	0,625	0,640	0,018
4	27,0	31,5	36,0	0,752	0,764	0,014
5	36,0	40,5	45,0	0,861	0,852	0,010
6	45,0	49,5	54,0	0,897	0,911	0,007
7	54,0	58,5	63,0	0,934	0,946	0,004
8	63,0	67,5	72,0	0,983	0,964	0,002
9	72,0	76,5	81,0	0,992	0,970	0,001
10	81,0	85,5	90,0	0,996	0,970	0,000
11	90,0	94,5	99,0	1,000	0,971	0,000
Июль						
1	0,0	5,5	11,0	0,021	0,147	0,014
2	11,0	16,5	22,0	0,524	0,448	0,028
3	22,0	27,5	33,0	0,878	0,775	0,030
4	33,0	38,5	44,0	0,950	1,000	0,021
5	44,0	49,5	55,0	1,000	0,995	0,000
Август						
1	5,0	7,5	10,0	0,088	0,135	0,029
2	10,0	12,5	15,0	0,394	0,365	0,046
3	15,0	17,5	20,0	0,650	0,625	0,052
4	20,0	22,5	25,0	0,881	0,856	0,047
5	25,0	27,5	30,0	0,989	1,000	0,029
6	30,0	32,5	35,0	1,000	0,998	0,000
Окисляемость						
Январь						

№	s_1	s^*	s_2	$F_n(s_2)$	$F_o(s_2)$	$F_o'(s_2)$
1	0,4	0,6	0,8	0,034	0,152	0,229
2	0,8	1,0	1,2	0,250	0,266	0,284
3	1,2	1,4	1,6	0,423	0,393	0,319
4	1,6	1,8	2,0	0,539	0,526	0,334
5	2,0	2,2	2,4	0,675	0,658	0,329
6	2,4	2,6	2,8	0,857	0,779	0,303
7	2,8	3,0	3,2	0,955	0,881	0,258
8	3,2	3,4	3,6	0,982	0,958	0,192

Продолжение Таблицы 2

№	s_1	s^*	s_2	$F_n(s_2)$	$F_o(s_2)$	$F_o'(s_2)$
9	3,6	3,8	4,0	0,998	1,000	0,106
10	4,0	4,2	4,4	1,000	1,000	0,000
Апрель						
1	0,0	0,75	1,5	0,257	0,270	0,180
2	1,5	2,25	3,0	0,505	0,495	0,150
3	3,0	3,75	4,5	0,702	0,681	0,124
4	4,5	5,25	6,0	0,831	0,830	0,100
5	6,0	6,75	7,5	0,916	0,939	0,073
6	7,5	8,25	9,0	0,989	1,000	0,041
7	9,0	9,75	10,5	1,000	0,999	0,000
Июль						
1	1,0	1,25	1,5	0,004	0,000	0,105
2	1,5	1,75	2,0	0,017	0,100	0,201
3	2,0	2,25	2,5	0,092	0,241	0,282
4	2,5	2,75	3,0	0,390	0,410	0,340
5	3,0	3,25	3,5	0,681	0,592	0,366
6	3,5	3,75	4,0	0,889	0,767	0,353
7	4,0	4,25	4,5	0,965	0,913	0,293
8	4,5	4,75	5,0	0,994	1,000	0,178
9	5,0	5,25	5,5	1,000	0,999	0,000
Август						
1	0,8	1,0	1,2	0,005	0,000	0,153
2	1,2	1,4	1,6	0,024	0,105	0,263
3	1,6	1,8	2,0	0,205	0,240	0,341
4	2,0	2,2	2,4	0,410	0,394	0,387
5	2,4	2,6	2,8	0,618	0,554	0,401
6	2,8	3,0	3,2	0,764	0,708	0,384
7	3,2	3,4	3,6	0,898	0,841	0,336
8	3,6	3,8	4,0	0,956	0,943	0,255
9	4,0	4,2	4,4	0,987	1,000	0,144
10	4,4	4,6	4,8	1,000	0,999	0,000

По критерию согласия Колмогорова [6] проверены гипотезы о выбранных законах распределения общей жесткости, цветности и окисляемости воды (табл. 3).

Таблица 3 – Результаты проверки гипотез о соответствии теоретической и

эмпирической функций распределения общей жесткости, цветности и окисляемости воды по критерию Колмогорова, $\lambda_{0.05} = 1,36$

Месяц	D	λ	Вывод
Общая жесткость			
Январь	0,083	1,96	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Февраль	0,043	0,96	Так как $\lambda \leq \lambda_{\alpha}$, гипотеза принимается.
Март	0,101	2,36	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Апрель	0,060	1,38	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Май	0,202	4,76	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.

Продолжение Таблицы 3

Месяц	D	λ	Вывод
Июнь	0,112	2,52	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Июль	0,163	3,72	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Август	0,144	3,35	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Сентябрь	0,151	3,49	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Октябрь	0,034	0,78	Так как $\lambda \leq \lambda_{\alpha}$, гипотеза принимается.
Ноябрь	0,172	3,98	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Декабрь	0,108	2,52	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Цветность			
Январь	0,052	1,23	Так как $\lambda \leq \lambda_{\alpha}$, гипотеза принимается.
Февраль	0,167	3,74	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Март	0,378	8,83	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Апрель	0,120	2,76	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Май	0,125	2,90	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Июнь	0,517	11,56	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Июль	0,126	2,78	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Август	0,047	1,10	Так как $\lambda \leq \lambda_{\alpha}$, гипотеза принимается.
Сентябрь	0,043	1,00	Так как $\lambda \leq \lambda_{\alpha}$, гипотеза принимается.
Октябрь	0,206	4,70	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.
Ноябрь	0,144	3,26	Так как $\lambda > \lambda_{\alpha}$, гипотеза отклоняется.

			отклоняется.
Декабрь	0,047	1,10	Так как $\lambda \leq \lambda_\alpha$, гипотеза принимается.
Окисляемость			
Январь	0,118	2,78	Так как $\lambda \leq \lambda_\alpha$, гипотеза принимается.
Февраль	0,075	1,68	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Март	0,128	3,00	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Апрель	0,024	0,54	Так как $\lambda \leq \lambda_\alpha$, гипотеза принимается.
Май	0,106	2,49	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Июнь	0,104	2,34	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Июль	0,149	3,40	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Август	0,081	1,89	Так как $\lambda \leq \lambda_\alpha$, гипотеза принимается.
Сентябрь	0,072	1,66	Так как $\lambda \leq \lambda_\alpha$, гипотеза принимается.
Октябрь	0,213	4,86	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Ноябрь	0,293	6,79	Так как $\lambda > \lambda_\alpha$, гипотеза отклоняется.
Декабрь	0,101	2,37	Так как $\lambda \leq \lambda_\alpha$, гипотеза принимается.

Полученные оптимизированные полиномы по критерию Колмогорова не во всех случаях соответствуют эмпирическому распределению общей жесткости, цветности и окисляемости. Однако, при некоторых значениях показателя эмпирическая функция распределения показателей $F_n(x)$ каждого месяца, с достаточной точностью описывается оптимизированными полиномами $F_o(x)$ (рис. 1- рис. 3).

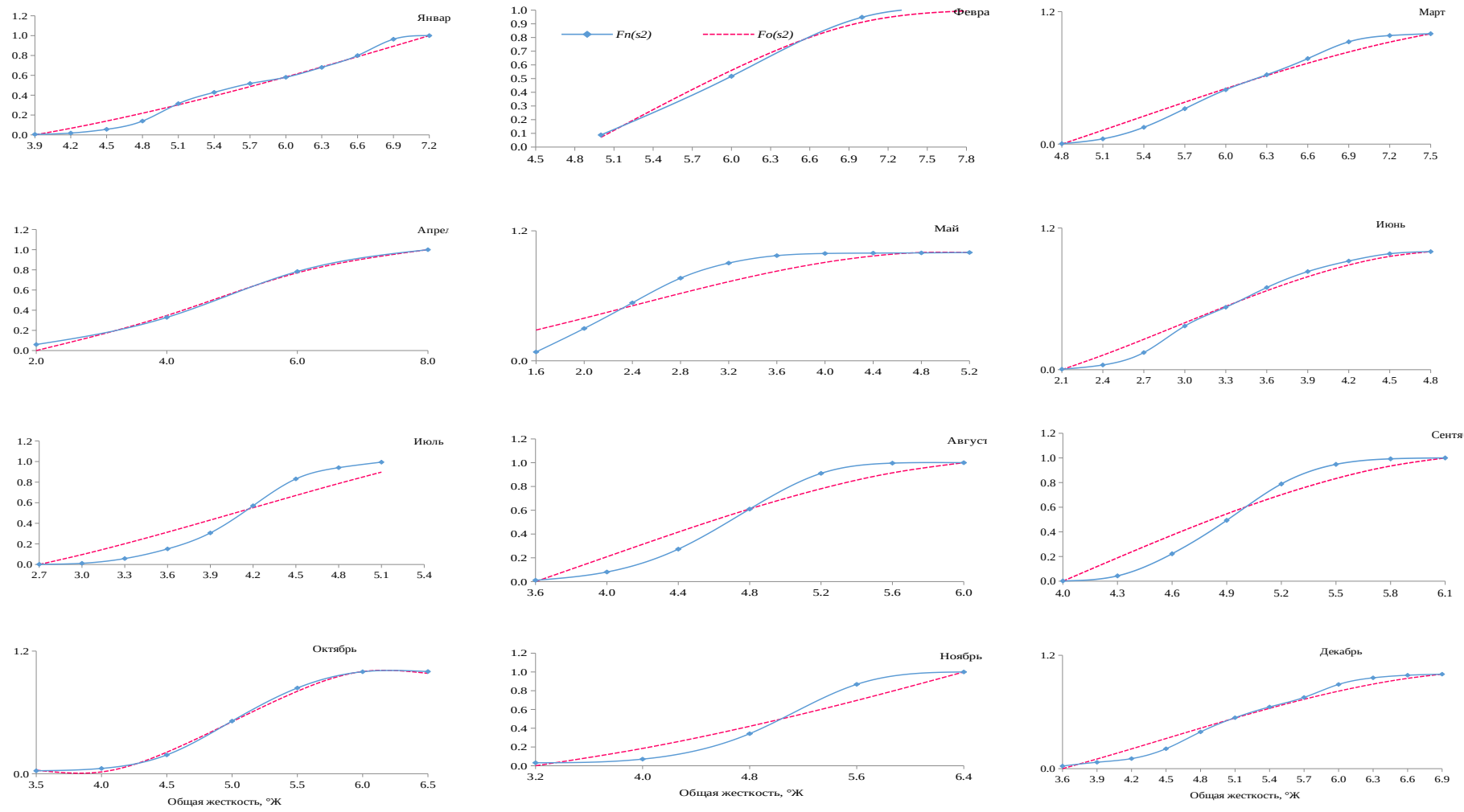


Рисунок 1 - Графики эмпирической $F_n(x)$ и теоретической (оптимизированной) $F_o(x)$ функции распределения общей жесткости

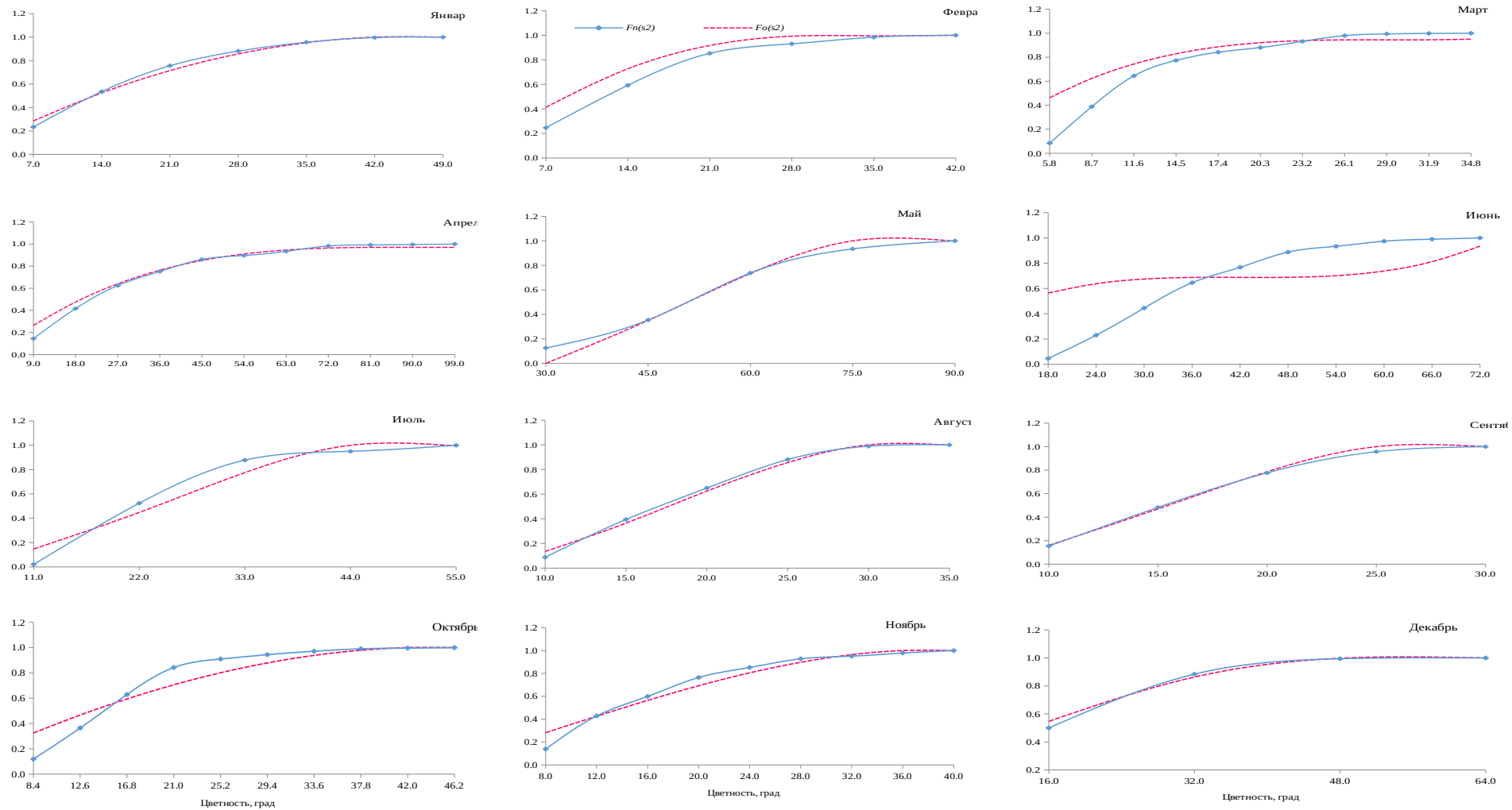


Рисунок 2 - Графики эмпирической $F_n(x)$ и теоретической (оптимизированной) $F_o(x)$ функции распределения ЦВЕТНОСТИ

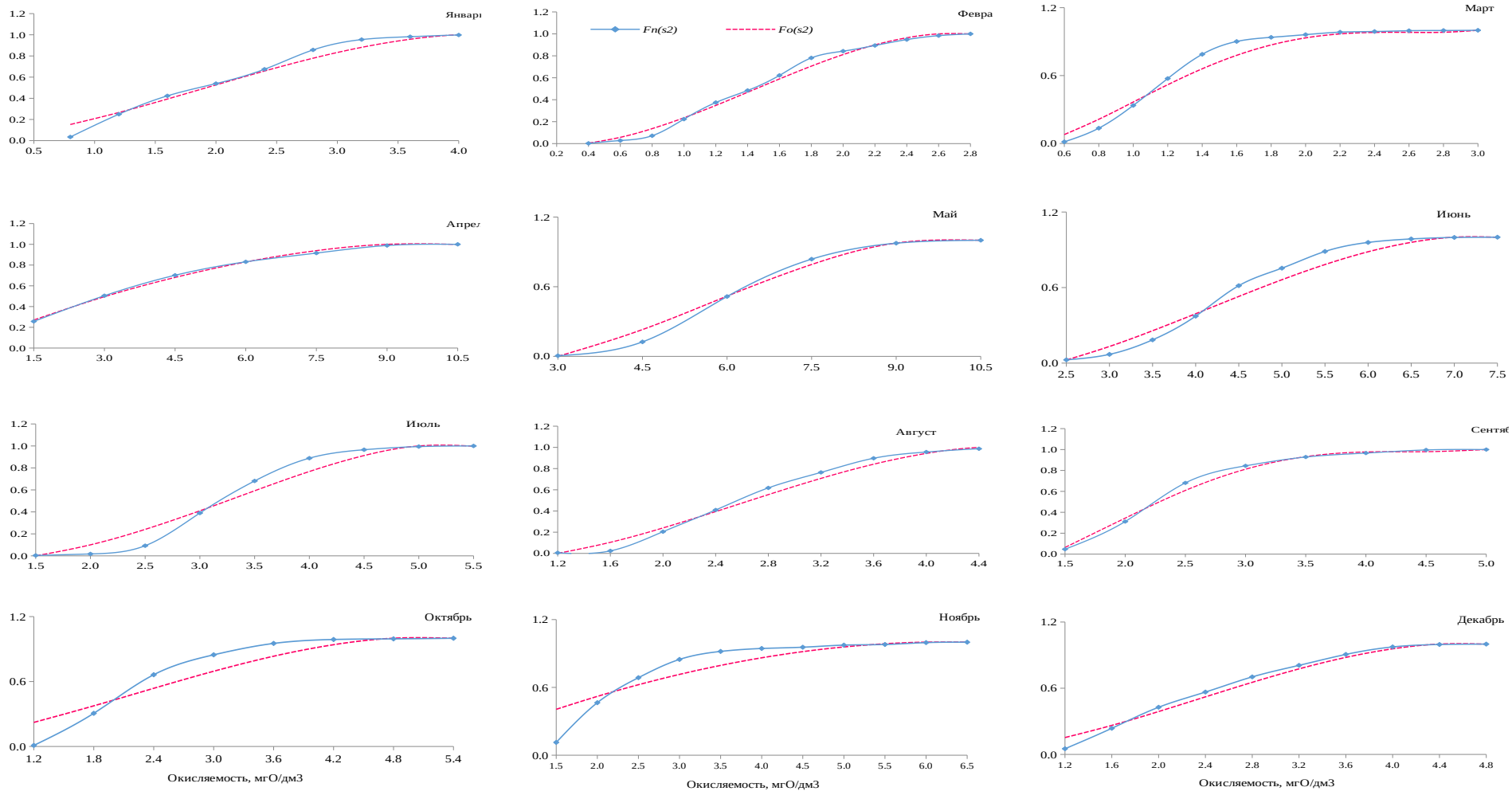


Рисунок 3 - Графики эмпирической $F_n(x)$ и теоретической (оптимизированной) $F_o(x)$ функции распределения окисляемости

При вычислении критерия Колмогорова учитывается максимальное расхождение между эмпирическими и теоретическими распределениями показателей. Для общей жесткости, цветности и окисляемости они приходится на малые значения показателей, тогда как при больших значениях, полученные полиномы практически не отличаются от эмпирического распределения, и расхождения между ними либо отсутствуют, либо минимальны. К тому же оптимизированные теоретические распределения (полиномы) достаточно точно описывают распределения показателей, построенное на основе экспериментальных данных (рис. 1- рис. 3). Так как наибольший интерес представляют именно большие значения показателей, превышающие ПДК и нормативы, полученные оптимизированные полиномы могут быть использованы для оценки вероятности наступления того или иного события.

На основе полученных функций распределения общей жесткости, цветности и окисляемости воды оценены вероятности наступления любых значимых для практики событий, с учетом сезонных особенностей изучаемого процесса (Таблица).

Таблица 4 - Оценка вероятности превышения ПДК и нормативов¹ общей жесткости, цветности и окисляемости полученная с помощью оптимизированных полиномов

Месяцы	Вероятность того, что общая жесткость не превысит половины ПДК	Вероятность того, что ПДК не будет превышен	Вероятность превышения ПДК не более, чем в 2 раза
	Интервал значений общей жесткости, °Ж		
	до 3,5	до 7	от 7 до 14
Январь	-	0,929	-
Февраль	-	0,912	-
Март	-	0,866	-
Апрель	0,243	0,927	-
Май	0,805	0,456	-
Июнь	0,626	-	-
Июль	0,276	-	-
Август	-	0,926	-
Сентябрь	-	0,919	-
Октябрь	0,035	0,650	-
Ноябрь	0,063	-	-
Декабрь	-	-	-

Продолжение Таблицы 4

Месяцы	Вероятность того, что цветность не превысит половины норматива	Вероятность того, что норматив не будет превышен	Вероятность превышения норматива не более, чем в 2 раза	Вероятность превышения норматива в 3 и более раз
	Интервал значений цветности, град			
	до 10	до 20	от 20 до 40	от 60 и более
Январь	0,394	0,690	0,301	-
Февраль	0,562	0,897	0,096	-
Март	0,682	0,918	0,075	-
Апрель	0,290	0,516	0,291	0,063
Май	-	-	0,364	0,266
Июнь	-	0,593	0,095	0,262
Июль	0,125	0,388	0,550	-
Август	0,135	0,625	0,165	-
Сентябрь	0,160	0,787	-	-
Октябрь	0,381	0,681	0,312	-
Ноябрь	0,354	0,692	0,307	-
Декабрь	0,372	0,646	0,304	-
Месяцы	Вероятность того, что окисляемость не превысит половины ПДК	Вероятность того, что ПДК не будет превышен	Вероятность превышения ПДК не более, чем в 2 раза	Вероятность превышения ПДК в 3 и более раз
	Интервал значений окисляемости, мгО/дм ³			
	до 2,5	до 5	от 5 до 10	от 15 и более
Январь	0,689	0,902	-	-
Февраль	0,986	-	-	-
Март	0,983	-	-	-
Апрель	0,425	0,735	0,273	-
Май	-	0,324	0,690	-
Июнь	0,024	0,662	-	-
Июль	0,241	1,000	-	-
Август	0,434	0,974	-	-
Сентябрь	0,609	1,000	-	-
Октябрь	0,564	1,000	-	-
Ноябрь	0,623	0,958	-	-
Декабрь	0,555	0,981	-	-
ПДК общей жесткости воды составляет 7 °Ж; Норматив цветности воды составляет 20 град; ПДК окисляемости воды составляет 5 мгО/дм ³ .				

Проведенная оптимизация теоретической функции распределения показателей качества воды, позволила определить подходящие коэффициенты, при которых аппроксимирующая кривая удовлетворяет важным условиям: является монотонно возрастающей функцией и имеет область значений от 0 до 1.

Полученные оптимизированные полиномы количественно оценивают риски превышения заданных значений общей жесткости, цветности и окисляемости, однако, применимы не для всех месяцев, так как проверка по Критерию Колмогорова показала несоответствие эмпирического и теоретического распределений. В результате есть необходимость использования других математических методов, что не совсем удобно для моделирования и прогноза.

** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности, номер для публикации
FEUR - 2020 - 0004 «Решение актуальных задач и исследование процессов в нефтехимических производствах, сопровождающихся течениями многофазных сред»*

Список литературы:

1. Харабрин А.В., Харабрин С.В., Кантор Л.И., Кантор Е.А. Клявлин М.С. Об изменении мутности, цветности, перманганатной окисляемости и рН воды реки Уфы // Башкирский химический журнал. – 2003. – Т.10, №3. – С. 80-81.
2. Харабрин А.В., Харабрин С.В., Кантор Л.И., Кантор Е.А. Клявлин М.С. Сопоставление показателей качества воды реки Уфа по мутности, цветности, окисляемости и рН в створах городских водозаборов // Башкирский химический журнал. – 2003. – Т.10, № 3. – С. 82-83.
3. Yalaletdinova A.V., Kantor E.A., Beloliptsev I.I., Galimova Y.O. Probabilistic assessment of water quality in terms of oxidability // 2021 IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 677, 042108.
4. Yalaletdinova A.V., Malkova M.A., Enikeeva L.V., Kantor E.A. Probabilistic assessment of water quality by total hardness using gamma distribution // 2022 Journal of Physics Conference Series. 2388, 012162.
5. Yalaletdinova A.V., Kantor E.A., Galimova Y.O. Probability assessment of water turbidity in rivers based on optimizing the distribution function // 2021 IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 677, 042109.
6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. –

М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. – 551 с.