

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КШИЖА ПРИ  $n = 3$ .

Ступин Д. Л.

В данной работе, на основе решения проблемы коэффициентов для класса ограниченных в единичном круге функций  $\omega$  с нормировкой  $\omega(0) = 0$ , проводится оценка модулей первых трёх тейлоровских коэффициентов на упомянутом классе. Из полученных оценок выводится оценка модуля третьего тейлоровского коэффициента для класса ограниченных не обращающихся в нуль функций.

In this paper, basing on the solution of the coefficient problem for the class of functions, bounded in the unit disk with normalization  $\omega(0) = 0$ , we estimate modulus of the first three Taylor coefficients on the mentioned class. From these estimates, we derive an estimate of the modulus of a third Taylor coefficient for the class of bounded nonvanishing functions.

**Ключевые слова:** гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, тело коэффициентов, ограниченные функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов.

**Keywords:** the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, the body of coefficients, bounded functions, Taylor coefficient modulus estimates.

## 1. Введение

Тейлоровские коэффициенты функции  $f(z)$  будем обозначать  $\{f\}_n$ ,  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Класс  $B$  состоит из голоморфных в единичном круге  $\Delta$  функций  $f$ , таких, что  $0 < |f(z)| \leq 1$ ,  $z \in \Delta$ .

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж предположил [1, 2], что если  $f \in B$ , то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида  $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$ , где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако, в настоящее время, она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [3]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу  $B$  функции  $f(z) \equiv 0$  получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Поскольку класс  $B$  инвариантен относительно вращений в плоскости переменной  $w$  ( $w = f(z)$ ), то можно ограничиться изучением функций для которых  $f(0) > 0$ . Так как  $0 < \{f\}_0 \leq 1$ , то можно положить  $\{f\}_0 = e^{-t}$ , где параметр

$t \in [0, +\infty)$ . Эти подклассы обозначим через  $B_t$ . Как известно из теории подчинённых функций [4], каждую функцию класса  $B_t$  можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \quad (1)$$

где  $\Omega_0$  — класс, состоящий из голоморфных в  $\Delta$  функций  $\omega$ , таких, что

$$|\omega(z)| \leq 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом  $t \geq 0$  эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами  $\Omega_0$  и  $B_t$ .

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лаггера, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [4] и с теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером  $n$  есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнзначной функции  $2n - 3$  действительных переменных. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, изложенные ниже результаты имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс  $B$  посредством класса  $\Omega_0$ , связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для  $B$  связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибераха).

## 2. Тела коэффициентов класса $\Omega_0$

Рассмотрим пространство  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , точками которого являются наборы из  $n$  комплексных чисел  $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n)$ .

Множество, состоящее из точек  $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$  таких, что числа  $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$  являются первыми  $n$  коэффициентами некоторой функции класса  $\Omega_0$ , будем обозначать через  $\Omega_0^{(n)}$  и называть  $n$ -ым телом коэффициентов класса  $\Omega_0$ .

Проблема коэффициентов на классе  $\Omega_0$  ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа  $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$  для того, чтобы ряд  $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_1 z^2 + \dots$  был рядом Тейлора некоторой функции класса  $\Omega_0$ .

Таким образом, задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе  $\Omega_0$  есть частный случай проблемы коэффициентов.

В 1917 году И. Шур исследовал класс  $\Omega$  ограниченных в  $\Delta$  функций [5]. В частности, он дал алгоритм определения факта принадлежности голоморфной

функции классу  $\Omega$ . Шур показал, что каждая функция класса  $\Omega$  может быть параметризована некоторой последовательностью комплексных чисел, известных как параметры Шура. Они определяют представление данной функции класса  $\Omega$  в виде непрерывной дроби.

Работа Шура [5] была опубликована через 10 лет после первой работы К. Каратеодори [6], посвящённой проблеме коэффициентов для класса  $S$  функций с положительной вещественной частью. Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе  $S$  считается статья Каратеодори [7]. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов, для двух упомянутых здесь классов, имеется в работе [9]. В упомянутой работе также есть краткий исторический обзор.

### 3. Третье тело коэффициентов класса $\Omega_0$

Имеет место точное неравенство [12]

$$\left| \{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1} \{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2} \right| \leq \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}. \quad (2)$$

Третье тело коэффициентов на  $\Omega_0$  полностью характеризуется неравенством (2). Заметим, что из неравенства (2) сразу следует неравенство Пика [11]

$$|\{\omega\}_2| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2, \quad (3)$$

определяющее второе тело коэффициентов, а из неравенства (3) сразу следует неравенство Шварца [11]

$$|\{\omega\}_1| \leq 1, \quad (4)$$

определяющее первое тело коэффициентов. Чтобы убедиться в этом достаточно преобразовать неравенства  $r_3 \geq 0$  и  $r_2 \geq 0$ , где  $r_3$  и  $r_2$  — правые части неравенств (2) и (3) соответственно.

Один из методов получения бесконечной последовательности коэффициентных неравенств типа (2), характеризующих класс  $\Omega_0$ , описан в работе [12]. Здесь вся проблема состоит в том, что из  $n$ -го неравенства можно очень легко получить  $(n-1)$ -е, но с ростом  $n$  всё сложнее получить  $(n+1)$ -е неравенство.

Неравенство (4) описывает круг с центром  $c_1$ , находящимся в начале координат и радиусом  $r_1 := 1$ , неравенство (3), при фиксированном  $\{\omega\}_1$ , описывает круг с центром  $c_2$ , находящимся в начале координат и радиусом  $r_2(\{\omega\}_1) := 1 - |\{\omega\}_1|^2$ , а неравенство (2), при фиксированных  $\{\omega\}_1$  и  $\{\omega\}_2$ , описывает круг с центром в

$$c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := -\frac{\overline{\{\omega\}_1} \{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}$$

и радиусом

$$r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2) := \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}.$$

Учитывая тот факт, что разность модулей не превосходит модуля разности, из формулы (2) получаем

**Следствие 1.** Если  $\omega \in \Omega_0$ , то имеют место точные неравенства

$$\frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|} - (1 - |\{\omega\}_1|^2) \leq |\{\omega\}_3| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 + |\{\omega\}_1|}. \quad (5)$$

Равенства в неравенствах (5) достигаются на границе  $\partial\Omega_0^{(3)}$  3-го тела коэффициентов  $\Omega_0^{(3)}$ : в первом неравенстве (с оговоркой  $|c_3| \geq r_3$ ) при  $\{\omega\}_3 = c_3 - r_3 e^{i \arg c_3}$ , а во втором неравенстве при  $\{\omega\}_3 = c_3 + r_3 e^{i \arg c_3}$ .

*Доказательство.* Неравенство (2) влечёт  $||\{\omega\}_3| - |c_3|| \leq r_3$ , что эквивалентно двум неравенствам  $-(|\{\omega\}_3| - |c_3|) \leq r_3$  и  $|\{\omega\}_3| - |c_3| \leq r_3$ , преобразовав которые мы получим требуемое. Случаи достижения равенства ясны из геометрических соображений о кругах на комплексной плоскости.  $\square$

Из неравенств (5) сразу следует, что при фиксированных  $|\{\omega\}_1|$  и  $|\{\omega\}_2|$  таких, что  $|c_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)| > r_3(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$  коэффициент  $\{\omega\}_3$  замечает кольцо с центром в начале координат и радиусами  $|c_3| - r_3$  и  $|c_3| + r_3$ . Интересно, что происходит при  $n = 4$  при фиксировании одних параметров и варьировании других?

Из неравенств (4), (3) и (5) немедленно следует, что  $|\{\omega\}_n| \leq 1$ , причём равенства здесь достигаются только на вращениях функций  $\omega(z) = z^n$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Пользуясь неравенством (2) мы доказали, что  $|\{\omega\}_n| \leq 1$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Возникает вопрос: возможно ли доказать, что  $|\{\omega\}_n| \leq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , пользуясь исключительно неравенствами, описывающими тела коэффициентов при  $n > 3$ ?

Итак, мы описали границу третьего тела коэффициентов и и пришли к закономерному выводу о том, что своего максимума  $|\{\omega\}_3|$  достигает где-то на  $\partial\Omega_0^{(3)}$ .

Множество  $A$  называется абсолютно выпуклым, если оно выпуклое и сбалансированное, то есть  $aA \subset A$ ,  $|a| \leq 1$ .

Отметим, что класс  $\Omega_0$  есть абсолютно выпуклое множество. Кроме того, все тела  $\Omega_0^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , есть абсолютно выпуклые компакты.

#### 4. О визуализации тел коэффициентов класса $\Omega_0$

Первое тело коэффициентов это просто единичный круг на комплексной плоскости или отрезок  $[-1, 1]$  оси  $x$ , если коэффициенты действительные.

Второе тело коэффициентов уже лежит в 4-х мерном действительном пространстве, однако его можно изобразить на плоскости  $xu$ , если ограничиться функциями с действительными коэффициентами. Второе тело коэффициентов определяется неравенством (3) и, в случае действительных коэффициентов, является абсолютно выпуклым компактом, заключённый между параболами  $y = -1 + x^2$  и  $1 - x^2$  (рис. 1 слева). Проекция второго тела на ось  $x$  есть первое тело.

Третье тело коэффициентов определяется неравенством (2) и, в общем случае лежит в  $\mathbb{C}^3$  или в  $\mathbb{R}^6$  и так далее.

**Утверждение 1.** В случае действительных коэффициентов, третье тело есть абсолютно выпуклый компакт (рис. 1 справа), ограниченный поверхностями

$$z = \frac{y^2}{1+x} - (1-x^2) \quad \text{и} \quad z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1-x}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -(1-x^2) \leq y \leq 1-x^2.$$

Проекция третьего тела на плоскость  $xu$  есть второе тело (рис. 1 слева).

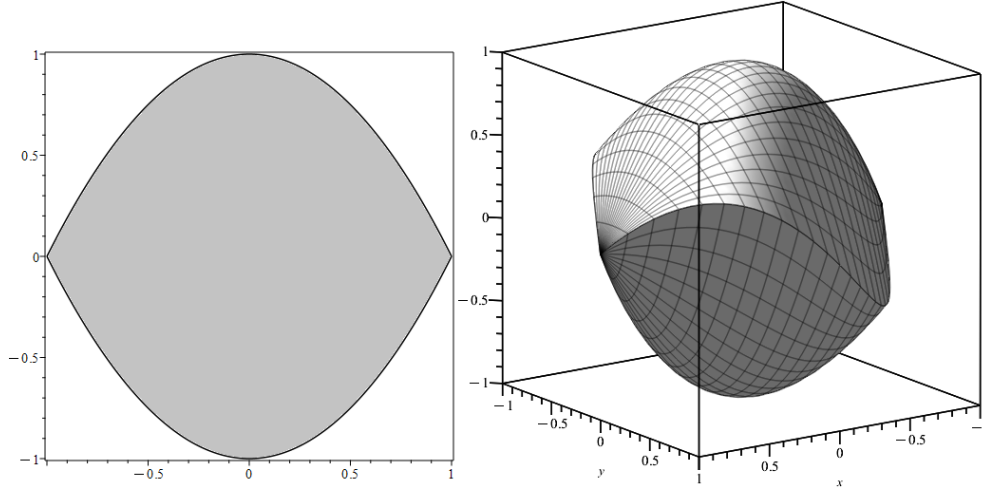


Рис. 1: Второе и третье тела коэффициентов

*Доказательство.* Обозначим  $x := \{\omega\}_1$ ,  $y := \{\omega\}_2$ ,  $z := \{\omega\}_3$ . Неравенство (2) упростим, избавившись от лишних, в данном случае, сопряжений и модулей. Раскрыв последний оставшийся модуль, в левой части упрощённого неравенства, получим 2 неравенства  $-(z - c_3(x, y)) \leq r_3(x, y)$  и  $z - c_3(x, y) \leq r_3(x, y)$ .  $\square$

Проецирование обсуждалось при получении неравенств (3) и (4) из неравенства (2). Абсолютная выпуклость наследуется телами коэффициентов от  $\Omega_0$ .

## 5. Оценка $|\{f\}_3|$ на классах $f \in B_t$ , $t \geq 0$

### 5.1. Предварительный анализ задачи

Пользуясь связью (1), из неравенства (2) можно получить неравенство, связывающее  $\{f\}_1$ ,  $\{f\}_2$ ,  $\{f\}_3$  и характеризующее 3-е тело коэффициентов на классе  $B_t$ . В этом случае, задача сводится к оценке простого функционала  $|\{f\}_3|$  на сложно устроенном множестве  $B_t^{(3)}$ .

Второй вариант — выразить  $\{f\}_3$  через  $\{\omega\}_1$ ,  $\{\omega\}_2$ ,  $\{\omega\}_3$ , используя связь (1) и оценивать более сложный функционал, но на достаточно простом множестве.

Здесь мы будем использовать второй подход. Имеем

$$F(z, t) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \dots = \frac{1}{e^t} + \frac{2t}{e^t} (z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \dots),$$

где  $\alpha := (t - 1)$ ,  $\beta := \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3)$ . Легко показать, что

$$\begin{aligned} \{f\}_3 &= \{F\}_1 \{\omega\}_3 + \{F\}_2 2\{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \{F\}_3 \{\omega\}_1^3 = \\ &= 2te^{-t} (\{\omega\}_3 + 2\alpha \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \beta \{\omega\}_1^3). \end{aligned}$$

### 5.2. Сведение задачи к максимизации функции 3-х действительных аргументов

Задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения. Здесь будет показан один из способов сведения задачи на экстремум функционала к задаче на экстремум действительнзначной функции 3-х действительных переменных.

Из второго из неравенств (5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{|\{f\}_3|}{2te^{-t}} &= |\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3| \leq \\ &\leq |\{\omega\}_3| + |2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3| \leq \\ &\leq 1 - |\{\omega\}_1|^2 - \frac{|\{\omega\}_2|^2}{1 + |\{\omega\}_1|} + |2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3|. \quad (6) \end{aligned}$$

Без потери общности можно считать, что  $\{\omega\}_1 > 0$ . Принимая во внимание неравенства (4) и (3), введём обозначения  $x := \{\omega\}_1$ ,  $y := |\{\omega\}_2|$ ,  $\varphi := \arg \{\omega\}_2$ . Итак, наша задача свелась к поиску условного максимума функции 3-х действительных аргументов

$$h(x, y, \varphi) := 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 + x} + x|2\alpha ye^{i\varphi} + \beta x^2|,$$

при ограничениях  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1 - x^2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

### 5.3. Исследование $h(x, y, \varphi)$ на максимум по $\varphi$

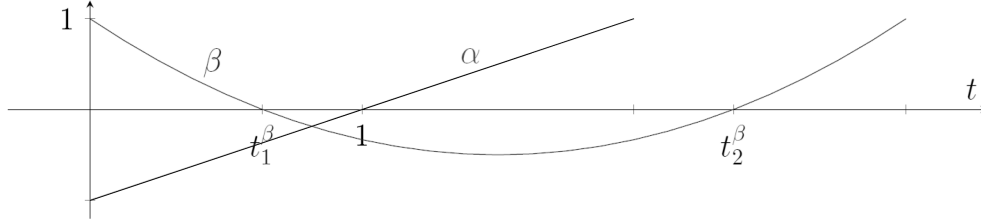


Рис. 2: Графики функций  $\alpha = \alpha(t)$  и  $\beta = \beta(t)$

Исследуем  $h(x, y, \varphi)$  на максимум по  $\varphi$ . Так как неравенство (3) никак не ограничивает  $\varphi$ , то  $|2\alpha ye^{i\varphi} + \beta x^2|$  принимает максимальное значение при  $e^{i\varphi} = \pm 1$ , в зависимости от того совпадают знаки  $\alpha$  и  $\beta$  или нет (см. рис. 2). Окончательно,

$$\max_{\varphi} |2\alpha ye^{i\varphi} + \beta x^2| = \begin{cases} -2\alpha y + \beta x^2, & t \in [0, t_1^\beta), \\ -2\alpha y - \beta x^2, & t \in [t_1^\beta, 1), \\ 2\alpha y - \beta x^2, & t \in [1, t_2^\beta), \\ 2\alpha y + \beta x^2, & t \geq t_2^\beta, \end{cases} = 2|\alpha|y + |\beta|x^2.$$

и

$$h(x, y) := \max_{\varphi} h(x, y, \varphi) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 + x} + 2|\alpha|xy + |\beta|x^3, \quad (7)$$

где  $t_1^\beta := (3 - \sqrt{3})/2 \approx 0.63$  и  $t_2^\beta := (3 + \sqrt{3})/2 \approx 2.37$  — корни уравнения  $\beta(t) = 0$ .

#### 5.4. Исследование $h(x, y)$ на максимум по $y$ и по $x$

Исследуем  $h(x, y)$  на максимум по  $y$ . Имеем

$$\begin{aligned}(h(x, y))'_y &= 2 \left( -\frac{y}{1+x} + |\alpha|x \right), \\ (h(x, y))''_{yy} &= -\frac{2}{1+x} < 0, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y = y_1 := |\alpha|x(1+x)$$

есть точка максимума. Точка  $y = y_1$  всегда находится в области определения, так как  $y_1 \leq 1 - x^2 =: y_4$  равносильно  $x \leq (1 + |\alpha|)^{-1} =: x_1$ , причём  $x_1 \in (0, 1]$ , при  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

#### 5.5. Исследование $h(x, 0)$ на максимум по $x$

Рассмотрим граничную точку  $y = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}h(x, 0) &= 1 - x^2 + |\beta|x^3, \\ (h(x, 0))'_x &= -2x + 3|\beta|x^2, \\ (h(x, 0))''_{xx} &= -2 + 6|\beta|x.\end{aligned}$$

Стационарная точка  $x = 0$ , очевидно, есть точка максимума и

$$h(0, 0) = 1, \quad t \geq 0.$$

Стационарная же точка  $x = x_2 := 2/(3|\beta|)$  является точкой минимума, так как  $(h(x, 0))''_{xx}|_{x=x_2} = 2$ . В граничной точке  $x = 1$  имеем

$$h(1, 0) = |\beta|, \quad t \geq 0.$$

#### 5.6. Исследование $h(x, y_1)$ на максимум по $x$

Далее, рассмотрим точку максимума  $y = y_1$ . Имеем

$$\begin{aligned}h(x, y_1) &= 1 - (1 - \alpha^2)x^2 + (\alpha^2 + |\beta|)x^3, \\ (h(x, y_1))'_x &= -2(1 - \alpha^2)x + 3(\alpha^2 + |\beta|)x^2, \\ (h(x, y_1))''_{xx} &= -2(1 - \alpha^2) + 6(\alpha^2 + |\beta|)x.\end{aligned}$$

Стационарная точка  $x = 0$  является точкой максимума при  $t \in (0, 2)$  и точкой минимума при  $t > 2$ , так как  $(h(x, y_1))''_{xx}|_{x=0} = -2(1 - \alpha^2) = 2t(t - 2)$ . Значение в точке максимума

$$h(0, y_1(0)) = 1, \quad t \in (0, 2).$$

Наоборот, стационарная точка

$$x = x_3 := \frac{2}{3} \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 + |\beta|}$$

является точкой минимума при  $t \in (0, 2)$  и точкой максимума при  $t > 2$ , так как  $(h(x, y_1))''_{xx}|_{x=x_3} = -(h(x, y_1))''_{xx}|_{x=0}$ . Однако,  $x_3 < 0$ , при  $t > 2$ , поэтому исключаем эту точку из рассмотрения. В граничной точке  $x = 1$  имеем, что  $h(1, y_1(1)) = 2\alpha^2 + |\beta| = |\beta|$ . Действительно,  $y_1 \leq y_4$  равносильно  $x \leq x_1$ , но  $x_1 = 1$  только при  $t = 1$ , когда  $\alpha = 0$ .

### 5.7. Исследование $h(x, y_4)$ на максимум по $x$

Наконец, рассмотрим граничную точку  $y = y_4$ . Имеем

$$\begin{aligned} h(x, y_4) &= (2|\alpha| + 1)x - (2|\alpha| + 1 - |\beta|)x^3, \\ (h(x, y_4))'_x &= (2|\alpha| + 1) - 3(2|\alpha| + 1 - |\beta|)x^2, \\ (h(x, y_4))''_{xx} &= -6(2|\alpha| + 1 - |\beta|)x. \end{aligned}$$

В граничной точке  $x = 0$  имеем  $h(0, y_4(0)) = 0$ .

Стационарная точка

$$x = x_4 := \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2|\alpha| + 1}{2|\alpha| + 1 - |\beta|}}$$

является точкой максимума при  $t \in [0, 3 + \sqrt{6})$ , так как

$$(h(x, y_4))''_{xx}|_{x=x_4} = -2\sqrt{3}\sqrt{2|\alpha| + 1 - |\beta|}\sqrt{2|\alpha| + 1} < 0,$$

а  $2|\alpha| + 1 - |\beta| < 0$  при  $t > 3 + \sqrt{6} \approx 5.45$ . При этом  $0 \leq x_4 \leq 1$  только при  $t \in [0, t_3]$ , где  $t_3 := (5 + \sqrt{15})/2 \approx 4.44$  (см. рис. 3). Значение в точке максимума

$$h(x_4, y_4(x_4)) = 2 \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{\frac{(2|\alpha| + 1)^3}{2|\alpha| + 1 - |\beta|}}, \quad t \in [0, t_3].$$

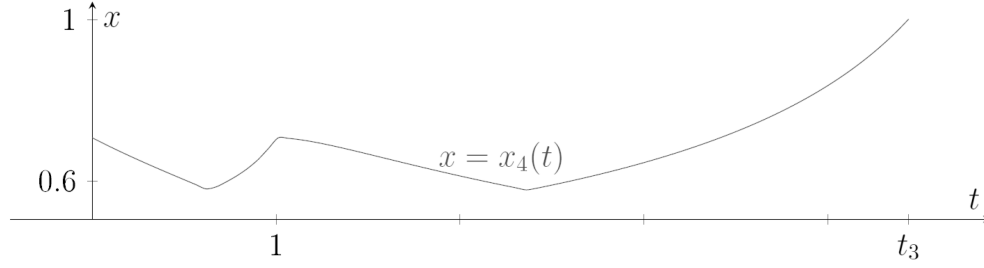
В граничной точке  $x = 1$  имеем  $h(1, y_4(1)) = |\beta|$ ,  $t \geq 0$ .

### 5.8. Анализ результатов

Итак, при каждом  $t \geq 0$  нам нужно найти максимум среди  $h(0, 0)$ ,  $h(1, 0)$  и  $h(x_4, y_4(x_4))$ . Обозначим  $M(t) := \max\{h_t(0, 0), h_t(1, 0), h_t(x_4, y_4(x_4))\}$ . Уравнение  $h(x_4, y_4(x_4)) = h(0, 0)$  имеет 2 решения  $t_1 := (33 - 3\sqrt{57})/32 \approx 0.32$  и

$$t_2 := \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\sqrt[3]{26\sqrt{2} + 8\sqrt{21}}}{4} + \frac{1}{2\sqrt[3]{26\sqrt{2} + 8\sqrt{21}}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 \right) \approx 1.65.$$



Рис. 3: График функции  $x = x_4(t)$ 

Уравнение  $h(x_4, y_4(x_4)) = h(1, 0)$  имеет 1 решение — число  $t = t_3 \approx 4.44$ , уже встречавшееся нам чуть выше. Выше, мы ввели число  $t_2^\beta := (3 + \sqrt{3})/2 \approx 2.37$  — наибольший корень уравнения  $\beta(t) = 0$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** *Если  $f \in B_t$ , то имеет место оценка*

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t}M(t) = 2te^{-t} \begin{cases} g(t), & t \in [0, t_1), \\ 1, & t \in [t_1, t_2), \\ g(t), & t \in [t_2, t_3), \\ \beta(t), & t \geq t_3, \end{cases}$$

где  $g(t) := 2\frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{\frac{(2|t-1|+1)^3}{2|t-1|+1-|2t^2-6t+3|/3}}$ , точная при  $t \notin (0, t_1) \cup (t_2^\beta, t_3)$ .

Ясно, что при некоторых  $t$  первое из неравенств (6) может быть строгим, вследствие чего полученная оценка будет грубой. К сожалению, в нашем случае, это так при  $t \in (0, t_1)$  и при  $t \in (t_2^\beta, t_3)$  (см. рис. 4). Тем не менее, и этого результата достаточно для доказательства гипотезы Кшижа при  $n = 3$ , так как

$$\max_{t \geq 0} \left( \frac{2t}{e^t} M(t) \right) = \frac{2}{e} \quad \text{и} \quad \frac{2t}{e^t} M(t) = \frac{2}{e} \iff t = 1.$$

Для доказательства нужно решить неравенство  $2t/e^t M(t) < 2/e$  при  $t \geq 0$  (см. рис. 4).

**Следствие 2.** *Гипотеза Кшижа справедлива при  $n = 3$ . То есть, если  $f \in B$ , то  $|\{f\}_3| \leq 2/e$ , причём равенство достигается только на вращениях функции  $F(z^3, t)$  в плоскостях переменных  $z$  и  $w$ .*

Сравним только что полученную оценку и оценку, точную для всех  $t \geq 0$ , полученную Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем в работе [13]:

**Теорема 2.** (Прохоров, Шиналь) *Если  $f \in B_t$ , то*

$$\Psi(t) := \sup_{f \in B_t} |\{f\}_3|(t) = \begin{cases} 2te^{-t}, & t \in [0, 1.65\dots), \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}\sqrt{(2t-1)^3}, & t \in [1.65\dots, 3.22\dots), \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}(2t^2-6t+3)\sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, & t \in [3.22\dots, 3.47\dots), \\ 2\frac{\sqrt{2}}{3}te^{-t}\sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2+6t-6}}, & t \in [3.47\dots, 3.82\dots), \\ \frac{2}{3}te^{-t}(2t^2-6t+3), & t \geq 3.82\dots \end{cases}$$

На рис. 4 изображены графики функций  $2te^{-t}M(t)$  и  $\Psi(t)$ . Эти графики совпадают при  $t \in [t_1, t_2^\beta]$  и при  $t \geq t_3$ . В остальных точках первый график лежит над вторым.

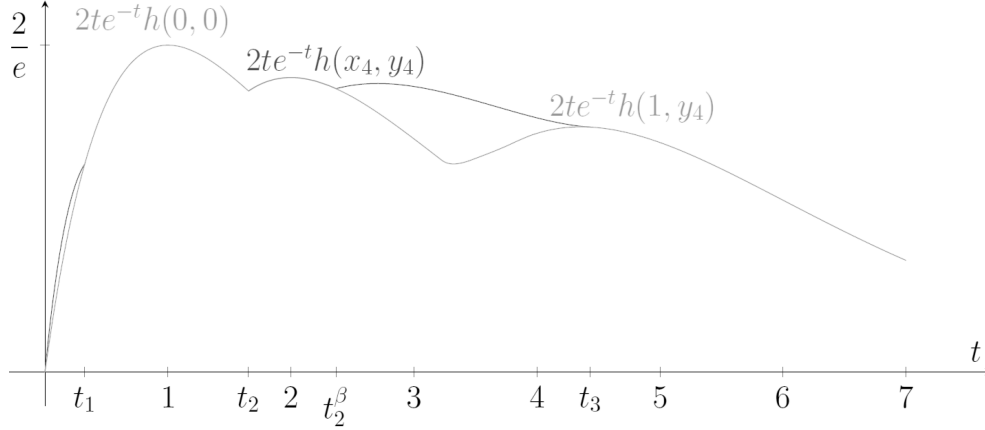


Рис. 4: Графики функций  $2te^{-t}M(t)$  и  $\Psi(t)$ .

## 6. Краткий исторический обзор по начальным коэффициентам

По геометрическим соображениям очевидно, что  $|\{f\}_0| \leq 1$ .

Точную оценку  $|\{f\}_1|$  можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [15].

Оценка  $|\{f\}_2|$  не вызывает сложности с 1943 года [4]. В статье [16] оценки  $|\{f\}_1| \leq 2/e$  и  $|\{f\}_2| \leq 2/e$  были найдены сразу несколькими способами, а именно методом структурных формул, параметрическим методом и методом, основанным на принципе подчинения.

Я. Кшиж, располагая точными оценками  $|\{f\}_1|$  и  $|\{f\}_2|$ , высказал свою гипотезу в 1968 году [2].

Затем, в 1977 году, появилась большая работа Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [16]. В их статье, при помощи вариационного метода, перенесённого с класса Каратеодори, была получена формула (7) и на её основе впервые найдена оценка  $|\{f\}_3| \leq 2/e$ . Точная оценка  $|\{f\}_3|$  дана этими авторами не для всех  $t > 0$ , однако ими доказано, что глобальный максимум  $|\{f\}_3|$  достигается при  $t = 1$ . Стоит отметить, что в [16] функция  $M(t)$  состоит из пяти разных формул, а у нас только из трёх, но это только за счёт упрощений, связанных с раскрытием модулей в  $g(t)$ .

Спустя 10 лет, Дж. Браун в [12] написал, что получил точно такой же результат как и в [16], но другим методом. Точнее, в [12] приведена формула (7). Исследование на максимум в [12] отсутствует.

Оценка, полученная автором этой работы, совпадает с [16], но получена другим методом. Возможно, Дж. Браун [12] неявно располагал вторым из неравенств (5), так как в его работе присутствует формула (7), но в тексте его работы нет вывода формулы (7) и нет неравенства (5).

Точная оценка  $|\{f\}_3|$ , при каждом  $t$ , была получена позднее Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем [13] при помощи неравенств Каратеодори-Тёплица.

Кроме того, стоит отметить результат Р. Переца [21], который доказал оценку  $|\{f\}_3| \leq 2/e$  используя то, что отрезок ряда Тейлора  $\{f\}_0 + \dots + \{f\}_3 z^3$  любой функции из  $B$  можно продолжить до функции класса Каратеодори. Доказательство Р. Эрмерс [19] имеет алгебраическую форму, а сама оценка состоит всего из трёх формул.

Доказательство того, что  $|\{f\}_4| \leq 2/e$  в 1983 году появилось у Д. Тана в работе [17], но его рассуждения, основанные на принципе подчинения и лемме Шварца-Пика, не были полными [14]. В том же году появилось доказательство П. Н. Пронина [18], основанное на том же самом вариационном методе, который использовался в [16] при получении оценки  $|\{f\}_3|$ . Позже, в 1987 году, Дж. Браун [12] опубликовал свой вариант подхода к доказательствам оценок  $|\{f\}_n| \leq 2/e$  для  $n = \overline{1, 4}$ . Р. Эрмерс [19] предоставил более обстоятельное доказательство, проведённое при помощи алгебраического метода, восходящего к И. Шуру. Как отмечается в [14], наиболее убедительным стало доказательство В. Шапеля [20], использовавшего теорию меры для оценки коэффициентов.

Остановимся на статье Дж. Брауна [12] подробнее. О. Тёплицу в 1911 году удалось найти [8] простое и очень красивое описание тел коэффициентов на классе  $C$  в детерминантной форме, посредством которого все результаты Каратеодори были приведены к алгебраической форме. После чего математики незаслуженно забыли о подходе Шура. Дошло до того, что неравенства для класса  $\Omega_0$  стали получать из неравенств Каратеодори-Тёплица при помощи связи между классами  $C$  и  $\Omega_0$ . При помощи метода, основанного на алгоритме, аналогичном алгоритму И. Шура для класса  $\Omega$ , Браун получил известные до него неравенства (4), (3), (2), описывающие первые три тела коэффициентов класса  $\Omega_0$ , а также новое неравенство, характеризующее четвёртое тело. Далее, при помощи формулы (1) он рассмотрел  $|\{f\}_n|$  как нелинейные функционалы на классе  $\Omega_0$ , после чего каким-то образом свёл исходную задачу к задаче о нахождении условного максимума действительной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств. Однако, само исследование на максимум в его работе отсутствует, что порождает вполне справедливые сомнения математического сообщества в представленных результатах [14]. Правда, по поводу исследования на максимум, в случае  $n = 3$ , Браун ссылается на [16], а при  $n = 4$  на [17].

Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [3].

Автор данной статьи в работе [10] при помощи метода Шапеля получил оценки  $|\{f\}_n| \leq 2/e$ ,  $n = \overline{1, 5}$ , а также оценку  $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.001163$ . Интересно, что при  $n = 2$  оценка получилась точной при всех  $t$ , а при  $n = 3$  оценка, полученная автором этой статьи совпала с оценкой Р. Эрмерс [19]. В. Шапель в [20] задал вопрос: до какого номера  $n$  применим его метод? Похоже, что ответ таков:  $n = 6$ .

Исследования по проблеме Кшижа не ограничиваются оценками модулей начальных тейлоровских коэффициентов. Обзор по тематике коэффициентов голоморфных функций, в частности по гипотезе Кшижа, имеется в статье [14].

## 7. Заключение

В настоящей статье решается задача получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов  $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \{\omega\}_3$  на классе  $\Omega_0$ . Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе  $\Omega_0$ . Побочным результатом этих оценок является визуализация тел коэффициентов класса  $\Omega_0$ .

Далее решается задача получения верхней оценки функционала  $|\{f\}_3|$  на классе  $B$ , путём перехода к функционалу над классом  $\Omega_0$ . На основе упомянутых оценок на классе  $\Omega_0$ , удалось получить функционал, мажорирующий исходный. После чего задача сведена к задаче о поиске условного максимума функции трёх действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что позволило применить стандартные методы дифференциального исчисления для получения основного результата — теоремы 1.

Точная при каждом  $t > 0$  оценка функционала  $|\{f\}_3|$  на классе  $B_t$  добыта в работе [13]. Эта оценка получена, в основном, при помощи описанного выше метода, разумеется, без использования огрубления. При этом, по понятным причинам (точность и использование двух параметров  $\alpha$  и  $\beta$  вместо одного  $t$ ), доказательство существенно больше приведённого здесь.

Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе  $B$ , а также на других классах голоморфных функций. Более того, задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

## Список литературы

- [1] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.
- [2] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.
- [3] Samaris N. A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.
- [4] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.
- [5] Schur I. Über potenzreihen, die in Innern des Einheitskrieses Beschränkt Sind. // J. Reine Angew. Math., 1917. V. 147. P. 205–232. English translation in: Schur I. Methods in Operator Theory and Signal Processing, I. Gohberg, ed., Birkhauser. 1986. P. 31–89.
- [6] Carathéodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. // Mathematische Annalen. 1907, V. 64. P. 95–115.

- [7] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.
- [8] Töplitz O. Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 191–192.
- [9] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.
- [10] Ступин Д. Л. Теория меры и оценка модулей первых шести коэффициентов в проблеме Кшижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2015. С. 36–49.
- [11] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [12] Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. // Compl. Var. 1987. V. 9. P. 143–152.
- [13] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. N. 5-6. P. 223–230.
- [14] Прохоров Д. В. Коэффициенты голоморфных функций. // Комплексный анализ и теория представлений. Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Москва. ВИНТИ. 2000. Т. 71.
- [15] Levin V. I., Fenchel W., Reissner E. Lösung der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80–83.
- [16] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathématique 1977. V 31. P. 169–190.
- [17] Tan Delin. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Chinese Ann. Math. 1983. V. A4. P. 97–104.
- [18] Пронин П. Н. Достаточные условия однолистности различных операторов и экстремальные задачи на классе ограниченных функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов: Саратовский гос. ун-т. 1983. 105 с.
- [19] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.
- [20] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.
- [21] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.