А.Н.Парфенов

О доказательстве Геделя

Цитирование важных для понимания моментов логики построения доказательства «Теоремы Геделя о неполноте» представлено по книге:
Нагель Эрнест, Ньюмен Джеймс Рой. Теорема Гёделя : Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. — М.: КРАСАНД, 2010. — 120 с. (НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы.
Цитаты выделены синим цветом.

Далее собственно мои не слишком глубокомысленные рассуждения на данную тему. Цитата со стр. 97 :

«Гёдель далее показал, что некоторый частный случай этой формулы (имеется в виду частный случай формулы «$\forall x \sim Dem\ (x, z)$») является формально недоказуемым. Чтобы получить формулу, мы будем исходить из следующей формулы:

$\forall\ x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$ (1) »

Собственно говоря, с данного момента, как мне кажется, в логической структуре построения доказательства и начинаются некоторые неувязочки. Присмотримся повнимательнее к отправной точке, «формуле»

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

и попробуем разобраться «что» здесь есть «что».

Формула

$Dem(x, z)$

означает: последовательность формул с Гёделевским номером (G№), равным x, является доказательством формулы с G№, равным z. Или равнозначно: Гёделевские номера (G№) x и z находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem. (Dem, таким образом является арифметическим соотношением натуральных чисел, являющихся к тому же Гёделевскими номерами (G№). И это важно.)

Формула

$\sim Dem(x, z)$

означает: последовательность формул с Гёделевским номером (G№), равным x, не является доказательством формулы с G№, равным z. Или равнозначно: Гёделевские номера (G№) x и z не находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem.

Формула

$\forall x \sim Dem\ (x, z)$

означает: для всех (для любого) x, последовательность формул с Гёделевским номером, равным x (G№=x), не является доказательством формулы с Гёделевским номером, равным z (G№=z). Или равнозначно: ни какое, являющееся Гёделевским номером, число x (G№=x), не находится в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem, с натуральным числом - Гёделевским номером, равным z (G№=z). Т.е., иначе говоря, формула с G№= z недоказуема (не выводима).

Запись (выражение)

$sub(y, 13, y)$

*обозначает «*арифметическую формулу *(функцию f(y), содержащую единственную переменную – целочисленный аргумент y),* выражающую внутри арифметического исчисления метаматематическую характеристику: «гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер y, подстановкой вместо входящей в нее переменной, имеющей гёделевский номер 13, цифры, обозначающей число „y“»» *(стр. 91). Я бы сказал: « подстановкой вместо буквенного обозначения входящей в нее переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т.е. переменной «y»), её целочисленного значения, являющегося, к тому же G№».*

<u>*Важно:*</u> *запись «sub(y, 13, y)» до подстановки конкретного значения переменной(аргумента) «y» – это функция, а отнюдь не натуральное число.*

Запись (выражение)

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

означает: ни какой Гёделевский номер x (G№= x) не находятся в определенном арифметическом соотношении, обозначаемом нами Dem, с… Чем???....... с функцией f(y)= sub(y, 13, y)?

Но ведь до подстановки численного значения переменной «y» эта запись - логическая бессмыслица. Арифметическое соотношение Dem, это соотношение между двумя натуральными числами, являющимися к тому же G№, а не между натуральным числом x, являющимся к тому же G№, и функцией f(y). И такая запись формулой не является и G№ не имеет.

Выражение

∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))

можно попытаться прочитать и несколько иным способом:

*Никакое, являющееся G№, натуральное число x, не находится в арифметическом соотношение Dem с являющимся G№ натуральным числом, которое может быть получено (вычислено) исходя из некоторого неопределенного (пока) значения переменной «y» при помощи процедуры (функции, алгоритма) sub(y, 13, y). И это именно «выражение», а не формула. «*Заметим, наконец, что выражение «sub(*y*, 13, *y*)» не является *формулой* нашей арифметической системы в том смысле, в каком, например являются формулами выражения «∃ *x* (*x* = *sy*)» или «Dem(*x*, *z*)», и вот почему. Выражение «0 = 0» мы называем формулой; такая запись *утверждает* наличие некоторого отношения между двумя числами, так что имеет смысл ставить вопрос, истинно или ложно это утверждение. Аналогично, когда вместо переменных, входящих в выражение «Dem(*x*, *z*)», подставляются некоторые цифры, то получающееся выражение оказывается записью некоторого утверждения (о том, что два числа находятся в некотором отношении), о котором опять-таки имеет смысл ставить вопрос, истинно оно или ложно. То же самое можно сказать и о выражении «∃ *x (x* = *sy*)»» (стр. 93-94). *То есть, до подстановки целочисленного значения переменной «y» запись «sub(y, 13, y)» не является ни формулой имеющей G№ (значение которого можно было бы рассматривать как значение числа «z») , ни натуральным числом. Соответственно и запись*

∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))

становится формулой, об истинности которой можно говорить (т.е. она становится не только записью, но и формулой – утверждением, либо истинным, либо ложным), лишь после того, как функция f(y)= sub(y, 13, y) принимает некоторое вполне определенное значение, что в свою очередь происходит при установлении конкретного, определенного значения аргумента «y».

И еще раз: ***<u>важно</u>,*** *что* ***вычисление значения функции z=f(y)=sub(y, 13, y), а соответственно и определение и подстановка значения переменной «y» в выражение sub(y, 13, y) должно предшествовать превращению записи (выражения) ∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)) в формулу****, кодирующую вполне определенное метаматематическое утверждение, и возникновению у нее G№.*

Повторюсь, запись

∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y))

до подстановки определенного, конкретного значения переменной «y», формулой не является. И до этого момента G№ не имеет.

Цитата со стр. 97:

«$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$ (1)

Эта формула, принадлежащая формальному арифметическому исчислению, представляет некоторое метаматематическое высказывание. Какое же именно? Читатель должен помнить, что выражение «sub(y, 13, y)» обозначает некоторое число, которое есть гёделевский номер формулы, получаемой из формулы, имеющей гёделевский номер y, подстановкой вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13, (т. е. переменной y) цифры, обозначающей число y. Отсюда видно, что формула (1) представляет метаматематическое высказывание: «формула, имеющая в качестве гёделевского номера число *sub*(y, 13, y), недоказуема».»

Но так как формула (1) принадлежит арифметическому исчислению, она имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число n. Подставим в (1) вместо переменной, имеющей гёделевский номер 13 (т. е. вместо переменной «y»), цифру, обозначающую это число n. В результате подстановки мы получим некоторую формулу, которую назовем (в честь Гёделя) «G»:

$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n, 13, n))$. ($G$)»

И вот неувязка в логической структуре построения доказательства проступила яснее:

«*sub*(y, 13, y)» *это не* «число», *а функция, по крайней мере до момента подстановки в неё конкретного значения переменной «у». Запись (выражение)* «$\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$» *до момента подстановки определенного, конкретного целочисленного значения переменной «у», формулой не является, и G№ не имеет. В логическом же построении доказательства сделано ложное предположение (допущение, утверждение), что запись: «* $\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$» - *есть формула, и эта «*формула (1)… имеет некоторый гёделевский номер, который можно фактически вычислить. Пусть этим номером является число n.»

То есть нам предложено подставить в качестве значения переменной «у» то значение, которое может быть определено лишь после подстановки этого же самого значения. И мы здесь имеем вполне определенно самореферентное, непредикативное определение значения переменно «у». Никакое число «n» до подстановки значения переменной «у» не является G№ записи $\forall x \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(y, 13, y))$. *И его нельзя подставить в формулу (1) в качестве значения аргумента «у», ибо нельзя подставить, то, чего еще нет, то, что еще не определено. Невозможно выполнить действие подстановки «в долг». А, следовательно, все дальнейшие, приведенные в построении доказательства рассуждения теряют смысл. G – формулу, тем способом, который предложен автором, построить невозможно, поскольку отправная запись (в соответствии с принятым определением формулы) формулой не является и G№ не имеет.*

По сути до подстановки определенного, конкретного значения переменной «у», выражение:

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

<u>лишь шутки ради</u> *может интерпретировано как:*

<u>«Утверждение: «Некое неопределённое, не имеющее определенного G№ утверждение, недоказуемо», не имеет определенного G№».</u>

И только в этом смысле запись

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

может рассматриваться, как утверждение, говорящее (возможно?) о себе самом (как «неопределенное» о «неопределенном»). Хотя и это недоказуемо. (И это, только шутка на вполне серьезную тему, не содержащая в данном случае «доли истины»).

Порядок действий, превращающий запись

$\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$

в формулу, имеющую вычислимый G№, возможен лишь один:

1. *Установление целочисленного значения переменной «y», являющегося к тому же G№;*

2. *Определение значения функции z=f(y)=sub(y, 13, y);*

3. *Подстановка числа z, являющегося при этом G№, на место функции sub(y, 13, y) в запись $\forall x \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$, с превращением последней в формулу $\forall x \sim Dem(x,z)$, имеющую вычислимый G№=n. В формулу, кодирующую (ложное или истинное) метаматематическое утверждение о доказуемости формулы с G№= sub(y, 13, y). При этом подстановка конкретного значения переменной «y» устанавливает статус истинности этого утверждения.*

Например:

при простановке в место переменной y числа 243 000 000 (G№ формулы «0=0»), (учитывая что, формула «0=0» переменной «y» не содержит, и что подстановка числа 243 000 000 вместо переменной «y» будет чисто формальной, я бы употребил даже термин – фиктивной), мы получим G№= sub(y, 13, y)= 243 000 000, и соответственно <u>ложное</u> метаматематическое утверждение, о том что формула «0=0» не выводима (недоказуема);

при простановке в место переменной «y» числа, равного G№ формулы «~ (0=0»), мы получим формулу, кодирующую <u>истинное</u> метаматематическое утверждение, о том что формула «~ (0=0)» не выводима (недоказуема).

Выводы:

1. *Запись sub(y, 13, y) до момента подстановки в неё конкретного значения переменной «у» - это функция, а отнюдь не формула и не натуральное число, являющееся G№.*

2. *Dem(x, sub(y, 13, y)) - запись, до подстановки значения переменной «у», формулой не являющаяся и G№ не имеющая.*

3. *∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)) - запись, до подстановки значения переменной «у», формулой не являющаяся и G№ не имеющая.*

4. *Никакое число «n» до подстановки конкретного значения переменной «у» не является G№ записи ∀x ~ Dem(x, sub(y, 13, y)). А, следовательно, все дальнейшие, приведенные в построении доказательства рассуждения теряют смысл. G – формулу, тем способом, который предложен автором, построить невозможно, поскольку отправная запись (в соответствии с принятым определением формулы) формулой не является и G№ не имеет.*

Как мы видим, способом, предложенным Геделем, G-формулу построить невозможно и «Теорема о неполноте» при помощи данного построения не может быть доказана. Но это не отрицает принципиальной возможности построения G-формулы неким иным способом. Зададимся вопросом: «Что будет, если кому-то такое построение все же удастся ?» Чтобы оценить последствия обратим наше внимание собственно на семантику G-высказываний Гёделя.

Завораживающие, почти магические манипуляции Гёделя с нумерацией утверждений и формированием G-высказываний через систему нумерации, на столько смещают центр внимания при изложении доказательства Малой и Большой теорем о неполноте, что оказывается что нужна почти вечность (по крайней мере для меня) чтобы осознать в общем то простую вещь: G-высказывание всего лишь высказывание, семантически тождественное утверждению «данное утверждение ложное» (парадоксу лжеца). А следовательно, построено по принципу самореферентности и грубо нарушает мои интуитивные представления о мета высказываниях («базовое высказывание, в отношении которого мы строим мета высказывания, должно существовать: а) до возникновения, формирования, формулирования любого из мета высказываний о нем, и б) независимо от любого из мета высказываний о нем»).

Соответственно, любое G-высказывание, - это высказывание, семантически и логически не связанное с остальными высказываниями в системе (оно говорит только о себе самом; истинность, как и ложность его никак не влияет на <u>установление статуса истинности = доказательстве</u> иных высказываний в рамках данной логической системы). Можно сказать – «любое G-высказывание семантически ничтожное». Обособление и удаление G-высказываний из логической системы, интуитивно, не должно обеднять или искажать информационное и семантическое содержание логической системы. Т.е., опять же интуитивно, мы имеем полное право «конвенционально» запретить, сделать *невозможными, недопустимыми G-высказывания, сохраняя при этом семантическую полноту системы…*

Кроме того, смущают рассуждения о «правдивости G-высказываний». Нам подспудно, не определяя термина, пытаются «продать» на ряду с понятием «истинности как выводимости» некое иное понятие «првдивости», не совпадающее с ним, и, в тоже время, имеющее нечто общее. Такое действие является замаскированным покушением на ***логический Закон фундировония****, и его всеобщность. Выстраивая формально-логическую систему мы пытаемся, в той или иной мере последовательно, полно и строго (= формализовано), отобразить нашу неформальную, только нам одним внутренне понятную, систему построения логических заключений. Если же мы допускаем параллельное существование несовпадающих понятий: «истинно» и «правдиво», мы негласно признаем ущербность, ограниченность выстраиваемый формально-логической системы, не вмещающей в себя наше не формализуемое, «трансцедентальное» представление о «правдивости» высказываний, которое оказывается недоступным формализации и включению (имплементации) в выстраиваемую систему.*

При «конвенционном» запрещении использования G-высказываний (если вдруг появился бы некий действительно работающий способ построения G-высказываний, отличный от предложенного Геделем, и у нас действительно возникла возможность, отсутствующая на данный момент, их построить), мы получили бы формально-логическую систему, семантически столь же полную, как и исходная система, допускающая G-высказывания. Но при этом систему, в которой доказательство Гёделя становится вновь неработающим в виду отсутствия основного инструмента доказательства - G-высказываний…

И, вуаля, мы получаем старый вопрос на новый лад:

«Можно ли доказать непротиворечивость логической системы включающей арифметику (теорию чисел) и не содержащей G-высказываний, в силу подпадания их под «конвенцию» о запрете, логическими средствами (в рамках) самой системы?

Или доказать, что это невозможно…?»