Роль метрического тензора в калибровочной симметрии гравитационного поля

Васильев Н.С.[1]

В данной работе предложена теория калибровочной симметрии гравитационного поля. Особое внимание было уделено метрическому тензору пространства Римана и его роли в формировании неабелевой симметрии на основе коэффициентов аффинной связности.

Сегодня известны различные физико-математические теории, описывающие калибровочную симметрию гравитационного поля. К ним, например, можно отнести теория струн [2–3], которая имеет мощный математический фундамент и предлагает оригинальное решение в виде структурных объектов, так называемых, струн, бран и т.д. Другой подход к построению калибровочной симметрии гравитационного поля – это увеличение размерности пространства–времени, большая часть которой в основном вырождена (свернута). Однако рассмотрение многомерного (например, десятимерного) пространства-времени позволяет сформулировать не только перенормируемую калибровочную теорию гравитационного поля, но и объединить известные в физике виды взаимодействий.

В данной работе применяется математический аппарат Янга-Миллса [1], не выходя за рамки общей теории относительности (ОТО) и четырехмерного пространства-времени. Рассмотрим пространство Римана, для которого задан метрический тензор (g_{ik}) и аффинная связность (Γ^i_{km} – коэффициенты связности или символы Кристоффеля). Поскольку достаточно часто используются римановы пространства с неопределенной метрикой, предположим, что квадратичная форма, соответствующая матрице метрического тензора (g_{ik}), положительно определена. Кроме того учтем, что $g^{pd} g_{pn} = \delta^d_n$, где δ^d_n - единичный 4-тензор, т.е. $\delta^d_n = 0$ при $d \neq n$ и $\delta^d_n = 1$ при $d = n$ [4].

Далее напомним, что теория Янга-Миллса представляет собой реализацию изотопической инвариантности, т.е. имеет место инвариантность относительно локальных изотопических поворотов [1, 5, 9]. По аналогии с теорией Янга-Миллса предположим, что имеет место инвариантность относительно локальных поворотов в пространстве Римана, т.е. метрический тензор, с помощью которого осуществляется указанное локальное вращение (особенности данного вращения рассмотрены ниже), является источником калибровочного поля. Чтобы понять, что представляет собой это калибровочное поле,

[1] E-mail: nikolasvs@mail.ru

сначала рассмотрим член, на который происходит, так называемое, «удлинение» производной при калибровочном преобразовании:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}g^{dl}g_{pl}g_{pn}(\partial_d)g^{pd}g^{ip}g_{nl}=\frac{1}{8}(g^{dl}g_{pl}g_{pn}(\partial_d g^{pd})g^{ip}g_{nl}+\\&+g^{dl}g_{pl}g_{pn}g^{pd}(\partial_d g^{ip})g_{nl}+g^{dl}g_{pl}g_{pn}g^{pd}g^{ip}(\partial_d g_{nl}))=\\&=-\frac{1}{8}g^{ip}(\delta_n^d g_{pl}g^{pd}(\partial_d g_{pn})+\delta_n^d g^{dl}(\partial_d g_{pl})g_{nl}-\delta_n^d(\partial_p g_{nl}))=\\&=-\frac{1}{8}\delta_n^d g^{ip}(\partial_l g_{pn}+\partial_n g_{pl}-\partial_p g_{nl})=-\frac{1}{4}\delta_n^d\Gamma_{nl}^i\end{aligned}\tag{1}$$

В выражении (1) $g_{pn}(\partial_d g^{pd})=-g^{pd}(\partial_d g_{pn})$ и $g_{pl}(\partial_d g^{ip})=-g^{ip}(\partial_d g_{pl})$ [4], а также учтена формула аффинной связности (Γ_{nl}^i) в римановом пространстве [6].

Свернув единичный 4-тензор (δ_n^d) по индексам *d* и *n*, получим

$$\frac{1}{8}g^{dl}g_{pl}g_{pn}(\partial_d)g^{pd}g^{ip}g_{nl}=-\Gamma_{nl}^i\tag{2}$$

Следовательно, при калибровочном преобразовании производная «удлиняется» на коэффициент связности.

Далее, воспользовавшись подходом для выражения компонент тензора неабелевых калибровочных векторных полей и обозначениями, использованными в работе [5], рассмотрим напряженность калибровочного поля (B_{klm}^i) с помощью теории Янга-Миллса:

$$\begin{aligned}B_{klm}^i&=D_l^{(-)}\Gamma_{km}^i-D_m^{(-)}\Gamma_{kl}^i=\\&=(\partial_l+\Gamma_{kl}^i)\Gamma_{km}^i-(\partial_m+\Gamma_{km}^i)\Gamma_{kl}^i=\\&=(\partial_l\Gamma_{km}^i+\Gamma_{nl}^i\Gamma_{km}^n)-(\partial_m\Gamma_{kl}^i+\Gamma_{nm}^i\Gamma_{kl}^n)=\\&=\partial_l\Gamma_{km}^i-\partial_m\Gamma_{kl}^i+(\Gamma_{nl}^i\Gamma_{km}^n-\Gamma_{nm}^i\Gamma_{kl}^n)\end{aligned}\tag{3}$$

Очевидно, что напряженность калибровочного поля (B_{klm}^i) полностью соответствует тензору Римана ($R_{klm}^i=\partial_l\Gamma_{km}^i-\partial_m\Gamma_{kl}^i+\Gamma_{nl}^i\Gamma_{km}^n-\Gamma_{nm}^i\Gamma_{kl}^n$) [4], поэтому далее для напряженности калибровочного поля используется обозначение (R_{klm}^i). Чтобы выражение (3) было идентично напряженности поля Янга-Миллса, введем константу $g_B=i\bar{g}_B$, где $\bar{g}_B=1$, в результате получим

$$R_{klm}^i=\partial_l\Gamma_{km}^i-\partial_m\Gamma_{kl}^i-ig_B(\Gamma_{nl}^i\Gamma_{km}^n-\Gamma_{nm}^i\Gamma_{kl}^n)\tag{4}$$

Исходя из выражения (3) и (4) лагранжиан свободного калибровочного поля необходимо взять в виде:

$$L_{sv}=-\frac{1}{2}R_i^{klm}R_{klm}^i=-\frac{1}{2}R^{km}R_{km}\tag{5}$$

где R_{km} - тензор Риччи.

Затем согласно теории Янга-Миллса необходимо найти уравнение движения. Для этого в соответствии с лагранжианом (5) с помощью принципа наименьшего действия необходимо варьировать только символы Кристоффеля, а определитель метрического тензора (g) считать заданным. Такой подход является обоснованным, поскольку риманову метрику на многообразие (M) можно накладывать по-разному, фактически, метрический тензор вводится произвольно за исключением нескольких основных условий ($g_{ik}(M)=g_{ik}(x^1,...,x^n)$, $Det|g_{ik}|\neq 0$, $g_{ik}=g_{ki}$) [6]. С другой стороны аффинную связность в римановом пространстве всегда можно построить единственным образом при условии равенства нулю кручения ($\Gamma^k_{il}=\Gamma^k_{li}$) и неизменности скалярного произведения двух векторов, которые одновременно подвергаются параллельному переносу вдоль какого-либо пути [6]. Напряженность калибровочного поля (тензор Римана) выразим в следующем виде:

$$\begin{aligned} R^i_{klm} &= \partial_l\Gamma^i_{km} - \partial_m\Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} = \\ &= \partial_l\Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} \end{aligned} \tag{6}$$

Альтернация тензора R^i_{klm} по индексам l и m проведена без удвоения [6]. Тогда вариация действия калибровочного поля равна:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2}\delta\int(R_i^{klm}R^i_{klm})\sqrt{-g}\,d\Omega = -\int R_i^{klm}\delta R^i_{klm}\sqrt{-g}\,d\Omega = \\ &= -\int R_i^{klm}\delta(\partial_l\Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km})\sqrt{-g}\,d\Omega = \\ &= -\int(R_i^{klm}\partial_l\delta\Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{nl}R_i^{klm}\delta\Gamma^n_{km} + \Gamma^n_{km}R_i^{klm}\delta\Gamma^i_{nl})\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (7) проинтегрируем по частям, во втором слагаемом заменим индекс *n* на *i*, в третьем слагаемом заменим индекс *n* на *k*, а также индекс *l* на *m*. Эти замены ни на что не повлияют, поскольку суммирование проводится по всем перечисленным индексам. В результате получим

$$\begin{aligned} \delta S &= \int(R_i^{klm}\partial_l\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\partial_l R_i^{klm} - \sqrt{-g}\,(\Gamma^n_{il}R_n^{klm} + \Gamma^k_{nl}R_i^{nml}))\delta\Gamma^i_{km}\,d\Omega = \\ &= \int(R_i^{klm}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l\sqrt{-g} + \partial_l R_i^{klm} - \Gamma^n_{il}R_n^{klm} + \Gamma^k_{nl}R_i^{nlm})\delta\Gamma^i_{km}\sqrt{-g}\,d\Omega = \\ &= \int(R_i^{knm}\Gamma^l_{nl} + \partial_l R_i^{klm} - \Gamma^n_{il}R_n^{klm} + \Gamma^k_{nl}R_i^{nlm})\delta\Gamma^i_{km}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

В уравнении (8) в первом слагаемом, в котором $\Gamma^n_{\ln} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l\sqrt{-g}$, заменили индекс *l* на *n*, в последнем слагаемом учли антисимметричность тензора R_i^{nml} по индексам *m* и *l*, т.е. $R_i^{nlm}=-R_i^{nml}$. Так как вариации $\delta\Gamma^i_{km}$ произвольны, то подынтегральное выражение в интеграле (8) должно равняться нулю. В итоге получим следующее уравнение движения:

$$\partial_l R_i^{klm} - \Gamma^n_{il}R_n^{klm} + \Gamma^k_{nl}R_i^{nlm} + \Gamma^l_{nl}R_i^{knm} = 0 \tag{9}$$

Выражение (9) представляет собой ковариантную дивергенцию тензора Римана:

$$D_l R_i^{klm} = 0 \tag{10}$$

Здесь (10) учтен тот факт, что компонент $\Gamma_{\ln}^{m} R_i^{k\ln}$ ковариантной производной антисимметричного по индексам l и m тензора R_i^{klm} равен нулю, поскольку $\Gamma_{\ln}^{m} R_i^{k\ln} = -\Gamma_{nl}^{m} R_i^{knl} = 0$ [4]. В приложении 1 приводится вывод уравнения движения на основе лагранжиана (5), который представлен с помощью тензора Риччи.

Для полученного уравнения движения (10) достаточно просто провести квантование, для этого необходимо воспользоваться, например, известным фейнмановским подходом [7,8]. Подробно останавливаться на этом вопросе не будем потому, что существует большое количество оригинальных работ, например [7,11-12], в которых подробно описан процесс квантования физических полей при наличии у них нелинейных или полулинейных уравнений движения.

В соответствии с теорией Янга-Миллса итоговый лагранжиан калибровочного гравитационного поля, представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} L &= \overline{\psi}(i(\partial_n + \Gamma_{nk}^{i})\gamma^n - m)\psi - \frac{1}{2}R^{dp}R_{dp} = \\ &= \overline{\psi}(i(\partial_n + \Gamma_{nl}^{l})\gamma^n - m)\psi - \frac{1}{2}R^{dp}R_{dp} \end{aligned} \tag{11}$$

где γ^n - матрицы Дирака [8].

Поскольку для лагранжиана (11) значимым является только индекс n, то индексы i и k считаем «замороженными». Однако, если к выражению (11) подойти более строго, то необходимо провести свертывание по индексам i и k. Следует сразу отметить, что указанное свертывание направлено только на соблюдение требований предъявляемых к любому лагранжиану в классической или квантовой физико-математической теории. Возврат к индексам i и k продиктован, например, тем фактом, что равенство нулю тензора Риччи ($R_{ik} = 0$), вытекающее из уравнений Эйнштейна для пустого пространства-времени, не означает, что данное пустое пространство-время является плоским, - для этого требуется выполнение более сильных условий $R_{iklm} = 0$ [4]. Поэтому в выражении (11) и дальнейших формулах у коэффициентов связности намеренно оставлены индексы i и k.

Требуется обратить внимание, что рассматривается инвариантность относительно локальных поворотов в римановом пространстве, но не вращающаяся (например, равномерно) система координат, которая достаточно активно применяется в ОТО. Чтобы лагранжиан (11) был калибровочно инвариантен согласно теории Янга-Миллса [5, 9], то в соответствии с предложенной калибровочной теорией (выражение (2)) необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^i_{km} &= g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + \frac{1}{4}\delta^m_i \Gamma^k_{id} = \\ &= g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + \Gamma^k_{id} \end{aligned} \qquad (12)$$

Для напряженности гравитационного поля это условие имеет вид (ниже данное условие представлено на примере одного метрического тензора):

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^i_{klm} &= \partial_l (g_{ip}\Gamma^i_{km} g^{pm} - g_{ip}\partial_m g^{pm}) - \partial_m (g_{ip}\Gamma^i_{kl} g^{pl} - g_{ip}\partial_l g^{pl}) + \\ &+ (g_{ip}\Gamma^i_{nl} g^{pl} - g_{ip}\partial_l g^{pl})(g_{np}\Gamma^n_{km} g^{pm} - g_{np}\partial_m g^{pm}) - \\ &- (g_{ip}\Gamma^i_{nm} g^{pm} - g_{ip}\partial_m g^{pm})(g_{np}\Gamma^n_{kl} g^{pl} - g_{np}\partial_l g^{pl}) = \\ &= g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} + \partial_l \partial^p g_{ip} - g_{ip}(\partial_m \Gamma^i_{kl}) g^{pl} - \partial_m \partial^p g_{ip} + \\ &+ g_{ip}\Gamma^i_{nl}\delta^l_n \Gamma^n_{km} g^{pm} - g_{ip}\partial_l g^{pl} g_{np}\Gamma^n_{km} g^{pm} - g_{np}\partial_m g^{pm} g_{ip}\Gamma^i_{nl} g^{pl} + \\ &+ g_{ip}\partial_l g^{pl} g_{np}\partial_m g^{pm} - g_{ip}\Gamma^i_{nm}\delta^m_n \Gamma^n_{kl} g^{pl} + g_{ip}\partial_m g^{pm} g_{np}\Gamma^n_{kl} g^{pl} + \\ &+ g_{np}\partial_l g^{pl} g_{ip}\Gamma^i_{nm} g^{pm} - g_{ip}\partial_m g^{pm} g_{np}\partial_l g^{pl} \end{aligned} \qquad (13)$$

В выражении (13) во втором и четвертом слагаемом - $g_{ip}\partial_m g^{pm} = -g^{pm}\partial_m g_{ip}$ и $g_{ip}\partial_l g^{pl} = -g^{pl}\partial_l g_{ip}$. Кроме того

$$\begin{aligned} &\partial_l (g_{ip}\Gamma^i_{km} g^{pm}) = (\partial_l g_{ip})\Gamma^i_{km} g^{pm} + g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} + \\ &+ g_{ip}\Gamma^i_{km}(\partial_l g^{pm}) = (\partial_l g_{ip})\Gamma^i_{km} g^{pm} + g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} - \\ &- \Gamma^i_{km} g^{pm}(\partial_l g_{ip}) = g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} \end{aligned} \qquad (14)$$

Аналогичный результат имеем для $\partial_m (g_{ip}\Gamma^i_{kl} g^{pl}) = g_{ip}(\partial_m \Gamma^i_{kl}) g^{pl}$. Сокращая соответствующие слагаемые в формуле (13), получим

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^i_{klm} &= g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} - g_{ip}(\partial_m \Gamma^i_{kl}) g^{pl} + \\ &+ g_{ip}\Gamma^i_{nl}\delta^l_n \Gamma^n_{km} g^{pm} - g_{ip}\Gamma^i_{nm}\delta^m_n \Gamma^n_{kl} g^{pl} = \\ &= g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} - g_{ip}(\partial_m \Gamma^i_{kl}) g^{pl} + \\ &+ g_{ip}\Gamma^i_{nl}\Gamma^l_{km} g^{pm} - g_{ip}\Gamma^i_{nm}\Gamma^m_{kl} g^{pl} \end{aligned} \qquad (15)$$

Заменив индекс *n* на *l* в третьем слагаемом и индекс *n* на *m* в четвертом слагаемом выражения (15), воспользовавшись равенством $\Gamma^i_{nl} = \Gamma^i_{\ln}$, преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^i_{klm} &= g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} - g_{ip}(\partial_m \Gamma^i_{kl}) g^{pl} + \\ &+ g_{ip}\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} g^{pm} - g_{ip}\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} g^{pl} = \\ &= g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} + g_{ip}\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} g^{pm} = \\ &= g_{ip}(\partial_l \Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}) g^{pm} = g_{ip} R^i_{klm} g^{pm} \end{aligned} \qquad (16)$$

В выражении (16) альтернация тензора R^i_{klm} по индексам *l* и *m* проведена без удвоения [6]. Таким образом, наложение условия инвариантности на напряженность калибровочного гравитационного поля (тензор Римана) в соответствии с предложенной калибровочной симметрией приводит к преобразованию, которое соответствует полю Янга-Миллса. В формулах 13 – 16 для тензора Римана указано упрощенное доказательство, полное - изложено в приложении 2. Для тензора Риччи преобразования (16) аналогичны (приложение 3).

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: при наложении условия калибровочной инвариантности гравитационное поле, преобразующееся согласно выражению (12), и тензор Римана, соответствующий выражению (16), вращаются во взаимных базисах риманова пространства ($\mathbf{e^k}, \mathbf{e_i}$). Указанные взаимные базисы связаны друг с другом следующей зависимостью [10]:

$$\mathbf{e^k} = g^{ik}\mathbf{e_i}, \mathbf{e_i} = g_{ik}\mathbf{e^k} \tag{17}$$

В ОТО, равно как и в большинстве других физико-математических теориях, имеющих дело с гравитационным полем, постулируется эквивалентность ассоциированных тензоров в римановом пространстве. Следовательно, при поднятии или опускании индекса любого тензора в римановом пространстве искомый тензор не изменяется, а происходит переход между различными аналитическими представлениями данного тензора [10]. В более строгой формулировке: при переходе от одного взаимного базиса к другому тензор в римановом пространстве сохраняется. Здесь можно провести прямую аналогию с требованием инвариантности относительно общих преобразований координат.

Поэтому отдельно рассмотрим тензор энергии-импульса гравитационного поля (T_p^l). Согласно [4, 8] и с учетом формул (5, 6) его можно выразить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-g}T_p^l = \partial_p \Gamma_{km}^i \frac{\partial(-\frac{1}{2}R_i^{klm}R_{klm}^i\sqrt{-g})}{\partial(\partial_l \Gamma_{km}^i)} - \delta_p^l(-\frac{1}{2}R_i^{klm}R_{klm}^i\sqrt{-g}) \\
&T_p^l = \partial_p \Gamma_{km}^i \frac{\partial(-\frac{1}{2}R_i^{klm}(\partial_l \Gamma_{km}^i + \Gamma_{nl}^i\Gamma_{km}^n))}{\partial(\partial_l \Gamma_{km}^i)} + \delta_p^l \frac{1}{2}R_i^{klm}R_{klm}^i = \\
&= -\partial_p \Gamma_{km}^i R_i^{klm} + \delta_p^l \frac{1}{2}R_d^{qnr}R_{qnr}^d
\end{aligned} \tag{18}$$

Рассматривая ковариантную дивергенцию ($D_l T_p^l$) в локально-геодезической системе координат, где в данной точке все $\Gamma_{kl}^i = 0$ [4], имеем:

$$\begin{aligned}
&D_l T_p^l = \partial_l T_p^l = -R_i^{klm}\partial_l \partial_p \Gamma_{km}^i - \partial_p \Gamma_{km}^i \partial_l R_i^{klm} + \frac{1}{2}\delta_p^l \partial_l (R_d^{qnr}\partial_n \Gamma_{qr}^d) = \\
&= -R_i^{klm}\partial_l \partial_p \Gamma_{km}^i - \partial_p \Gamma_{km}^i \partial_l R_i^{klm} + \frac{1}{2}(\partial_p R_d^{qnr}\partial_n \Gamma_{qr}^d + R_d^{qnr}\partial_p \partial_n \Gamma_{qr}^d)
\end{aligned} \tag{19}$$

Согласно выражению (10) ковариантная дивергенция тензора Римана равна нулю ($D_l R_i^{klm} = \partial_l R_i^{klm} = 0$). Суммируя первое и четвертое слагаемые, получим

$$\begin{aligned}\partial_l T_p^l &= \frac{1}{2}(-R_d^{qnr}\partial_p\partial_n\Gamma_{qr}^d + \partial_p R_d^{qnr}\partial_n\Gamma_{qr}^d) = \\ &= \frac{1}{2}(-R_d^{qnr}\partial_p R_{qnr}^d + \partial_p R_d^{qnr} R_{qnr}^d)\end{aligned} \tag{20}$$

Проведем опускание и поднятие индексов в последнем слагаемом выражения (20):

$$\partial_l T_p^l = \frac{1}{2}(-R_d^{qnr}\partial_p R_{qnr}^d + \partial_p R_{qnr}^d R_d^{qnr}) = 0 \tag{21}$$

Поскольку в локально-геодезической системе координат дивергенция тензора энергии-импульса гравитационного поля равна нулю, то и в любой другой (произвольной) системе координат выполняется следующее равенство:

$$D_l T_p^l = 0 \tag{22}$$

Однако следует отметить, что вопрос тензора энергии-импульса гравитационного поля, в том числе и вопрос сохранения 4-импульса материи вместе с гравитационным полем, в ОТО до сих пор является дискуссионным. В целом ряде случаев активно применяют псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля [4]. В приложении 4 рассмотрен тензор T_p^l и его ковариантная производная с позиции тензора Риччи.

Как и в случае полей Янга-Миллса для калибровочного гравитационного поля (11) работает механизм спонтанного нарушения симметрии [5,9]. Рассмотрим лагранжиан комплексного скалярного поля:

$$L_{sp} = |D_n\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2(|\varphi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2)^2 - \frac{1}{2}R^{ik}R_{ik}\text{, где} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}|D_n\varphi|^2 &= (\partial_n + \Gamma_{nl}^i)\varphi(\partial^n - \Gamma_{pi}^l g^{pn})\varphi = \\ &= (\partial_n + \Gamma_{nl}^l)\varphi(\partial^n - \Gamma_l^{nl})\varphi = \\ &= \partial_n\varphi\partial^n\varphi + \Gamma_{nl}^l\varphi\partial^n\varphi - \partial_n\varphi\Gamma_l^{nl}\varphi - \Gamma_{nl}^l\varphi\Gamma_l^{nl}\varphi\end{aligned} \tag{24}$$

В выражении (24) взаимно сокращая второе и третье слагаемые, получим

$$\begin{aligned}|D_n\varphi|^2 &= \partial_n\varphi\partial^n\varphi - \Gamma_{nl}^l\varphi\Gamma_l^{nl}\varphi = \\ &= \partial_n\varphi\partial^n\varphi - \Gamma_{nl}^i\varphi\Gamma_{pi}^l g^{pn}\varphi\end{aligned} \tag{25}$$

Действуя далее по известной схеме [5,9], учитывая инвариантность лагранжиана (23) относительно преобразования фазы комплексного скалярного поля φ, введем поле χ, учитывающее возбуждение вблизи стабильного вакуума $(\eta/\sqrt{2})$, т.е. $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \chi)$.

После спонтанного нарушения симметрии лагранжиан (23) приобретает вид

$$\begin{aligned}L_{sp} &= \frac{1}{2}\partial_n\chi\partial^n\chi - \frac{1}{2}\Gamma_{nl}^i\Gamma_{pi}^l g^{pn}(\eta+\chi)^2 - \\ &- \frac{1}{8}\lambda^2\chi^2(2\eta^2+\chi)^2 - \frac{1}{2}R^{ik}R_{ik}\end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое полученного выражения (26):

$$
\begin{aligned}
\Gamma^l_{ni}\Gamma^i_{nl} &= \frac{1}{4} g^{lp}(\partial_i g_{pn} + \partial_n g_{pi} - \partial_p g_{ni}) g^{id}(\partial_l g_{dn} + \partial_n g_{dl} - \partial_d g_{nl}) = \\
&= \frac{1}{4}(g^{lp}\partial_i g_{pn} g^{id}\partial_l g_{dn} + g^{lp}\partial_i g_{pn} g^{id}\partial_n g_{dl} - g^{lp}\partial_i g_{pn} g^{id}\partial_d g_{nl} + \\
&+ g^{lp}\partial_n g_{pi} g^{id}\partial_l g_{dn} + g^{lp}\partial_n g_{pi} g^{id}\partial_n g_{dl} - g^{lp}\partial_n g_{pi} g^{id}\partial_d g_{nl} - \\
&- g^{lp}\partial_p g_{ni} g^{id}\partial_l g_{dn} - g^{lp}\partial_p g_{ni} g^{id}\partial_n g_{dl} + g^{lp}\partial_p g_{ni} g^{id}\partial_d g_{nl}) = \\
&= \frac{1}{4}(\partial^d g_{pn}\partial^p g_{dn} - \partial_l g_{pn}\partial_n g^{lp} - \partial^d g_{pn} g^{lp}\partial_d g_{nl} - \partial_n g^{id}\partial_i g_{dn} - \partial_n g^{id}\partial_n g_{di} + \\
&+ \partial_n g^{id}\partial_d g_{ni} - \partial_p g_{ni} g^{id}\partial^p g_{dn} + \partial_p g_{nl}\partial_n g^{lp} + \partial^l g_{ni}\partial^i g_{nl})
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Складывая подобные слагаемые и проводя альтернацию, упростим выражение (27):

$$
\begin{aligned}
\Gamma^l_{ni}\Gamma^i_{nl} &= \frac{1}{4}(2\partial^d g_{pn}\partial^p g_{dn} + 2\partial_p g_{nl}\partial_n g^{lp} - 2\partial^d g_{pn} g^{lp}\partial_d g_{nl} + \\
&+ 2\partial_n g^{id}\partial_d g_{ni} - \partial_n g^{id}\partial_n g_{di}) = \frac{1}{4}(4\partial^d g_{pn}\partial^p g_{dn} + 2\partial_p g_{nl}\partial_n g^{lp} + \\
&+ 3\partial_n g^{id}\partial_d g_{ni})
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Возвращаясь к лагранжиану (26), получим

$$
\begin{aligned}
L_{sp} &= \frac{1}{2}\partial_n\chi\partial^n\chi - \frac{1}{8}(4\partial^d g_{pk}\partial^p g_{dn} + 2\partial_p g_{kl}\partial_n g^{lp} + \\
&+ 3\partial_k g^{id}\partial_d g_{ni}) g^{kn}(\eta+\chi)^2 - \frac{1}{8}\lambda^2\chi^2(2\eta^2+\chi)^2 - \frac{1}{2}R^{ik}R_{ik}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Следовательно, лагранжиан (29) описывает три векторные частицы, соответствующие гравитационному полю, которые имеют одинаковые массы.

Таким образом, взяв за основу метрический тензор риманова пространства, сформулирована теория калибровочной симметрии гравитационного поля. В заключении следует отметить, что интересным является вопрос классификации данной симметрии, особенно учитывая тот факт, что в ОТО достаточно часто используются римановы пространства с неопределенной метрикой. Допущение, что квадратичная форма, соответствующая матрице метрического тензора, например, положительно определена, вопрос классификации полностью не решает [4,6,10].

Приложение 1.

Тензор Риччи (R_{ik}) выразим в виде ковариантной производной:

$$R_{ik} = \partial_l \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} = \\ = (-\partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}) = -D_k \Gamma^l_{il} \tag{30}$$

В формуле (30) альтернация тензора R_{ik} по индексам k и l проведена без удвоения [6]. Тогда вариация действия гравитационного поля равна

$$\delta S = \delta \frac{1}{2}\int R^{ik} R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = \\ = \int R^{ik}\delta(-\partial_k \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})\sqrt{-g}\,d\Omega = \\ = \int (-R^{ik}\partial_k \delta\Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ik} R^{ik}\delta\Gamma^m_{lm})\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 \tag{31}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (31) проинтегрируем по частям, во втором слагаемом заменим индекс l на i, в результате получим

$$\delta S = \int (R^{ik}\partial_k \sqrt{-g} + \sqrt{-g}\,\partial_k R^{ik} + \sqrt{-g}\,\Gamma^i_{lk} R^{lk})\delta\Gamma^m_{im}\,d\Omega = \\ = \int (\partial_k R^{ik} + \Gamma^k_{lk} R^{il} + \Gamma^i_{lk} R^{lk})\delta\Gamma^m_{im}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 \tag{32}$$

В уравнении (32) во втором слагаемом, где $\Gamma^k_{lk} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l \sqrt{-g}$, заменили индекс k на l. Так как вариации $\delta\Gamma^m_{im}$ произвольны, то подынтегральное выражение в интеграле (32) должно равняться нулю. В итоге получаем следующее уравнение движения:

$$\partial_k R^{ik} + \Gamma^k_{lk} R^{il} + \Gamma^i_{lk} R^{lk} = 0 \tag{33}$$

Необходимо обратить внимание, что при выводе уравнения (33) коэффициенты связности Γ^l_{ik} ковариантной производной ($D_k = \partial_k - \Gamma^l_{ik}$, в выражении 31 и 32) не варьировались. Поскольку в кривом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если он совершается по разным путям [4]. Здесь можно провести аналогию, например, с SU(2)-симметрией и с соответствующим уравнением движения в комплексном изотопическом пространстве [5,9].

Уравнение (33) представляет собой ковариантную дивергенцию тензора Риччи:

$$D_k R^{ik} = 0 \tag{34}$$

Приложение 2.

Рассмотрим тензор Римана (1) в локально-геодезической системе координат, тогда в данной точке все $\Gamma^i_{kl} = 0$ [4]. Условия калибровочной инвариантности представим в следующем виде (калибровочные коэффициенты связности для наглядности оставим):

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^i_{km} &= g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + \Gamma^k_{id} = S_1 \Gamma^i_{km} \frac{1}{S_1} + \Gamma^k_{id}, \\ \tilde{\Gamma}^i_{kl} &= g^{ld} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{kl} g^{pl} g^{kp} g_{id} + \Gamma^k_{id} = S_2 \Gamma^i_{kl} \frac{1}{S_2} + \Gamma^k_{id} \end{aligned} \tag{35}$$

Подставим условия (35) в выражение для тензора Римана (1), получим

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i_{klm} &= \partial_l (S_1 \Gamma^i_{km} \frac{1}{S_1} + \Gamma^k_{id}) - \partial_m (S_2 \Gamma^i_{kl} \frac{1}{S_2} + \Gamma^k_{id}) = \\ &= S_1 (\partial_l \Gamma^i_{km}) \frac{1}{S_1} + \partial_l \Gamma^k_{id} - S_2 (\partial_m \Gamma^i_{kl}) \frac{1}{S_2} - \partial_m \Gamma^k_{id} \end{aligned} \tag{36}$$

В выражении (36) второе и четвертое слагаемые сокращаются. Кроме того

$$\begin{aligned} &\partial_l (S_1 \Gamma^i_{km} \frac{1}{S_1}) = \partial_l (g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id}) = \\ &= (\partial_l g^{md}) g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + g^{md} (\partial_l g_{pd}) g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + \\ &+ g^{md} g_{pd} (\partial_l g_{pi}) \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + g^{md} g_{pd} g_{pi} (\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} g^{kp} g_{id} + \\ &g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} (\partial_l g^{pm}) g^{kp} g_{id} + g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} (\partial_l g^{kp}) g_{id} + \\ &+ g^{md} g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} (\partial_l g_{id}) = (\partial_l g^{md}) g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + \\ &+ g^{md} (\partial_l g_{pd}) g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + g^{md} g_{pd} (\partial_l g_{pi}) \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} + \\ &+ g^{md} g_{pd} g_{pi} (\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} g^{kp} g_{id} - g^{md} g_{pd} \Gamma^i_{km} g^{pm} (\partial_l g_{pi}) g^{kp} g_{id} - \\ &- g^{md} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} (\partial_l g_{pd}) g_{id} - g_{pd} g_{pi} \Gamma^i_{km} g^{pm} g^{kp} g_{id} (\partial_l g^{md}) = \\ &= g^{md} g_{pd} g_{pi} (\partial_l \Gamma^i_{km}) g^{pm} g^{kp} g_{id} = S_1 (\partial_l \Gamma^i_{km}) \frac{1}{S_1} \end{aligned} \tag{37}$$

Аналогичный результат получим для слагаемого $\partial_m (S_2 \Gamma^i_{kl} \frac{1}{S_2}) = S_2 (\partial_m \Gamma^i_{kl}) \frac{1}{S_2}$. Таким образом, выражение (37) преобразуем в следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i_{klm} &= S_1 (\partial_l \Gamma^i_{km}) \frac{1}{S_1} - S_2 (\partial_m \Gamma^i_{kl}) \frac{1}{S_2} = \\ &= S_1 (\partial_l \Gamma^i_{km}) \frac{1}{S_1} = S_1 R^i_{klm} \frac{1}{S_1} \end{aligned} \tag{38}$$

В (38) альтернация тензора R^i_{klm} по индексам l и m проведена без удвоения [6]. Поскольку в локально-геодезической системе координат выполняется равенство (38), то и в любой другой (произвольной) системе координат тензор Римана преобразуется аналогично полям Янга-Миллса.

Приложение 3.

Как и в случае тензора Римана (приложение 2) рассматриваем тензор Риччи в локально-геодезической системе координат, калибровочные условия следующие:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^l_{ik} &= g^{kd} g_{pd} g_{pl} \Gamma^l_{ik} g^{pk} g^{ip} g_{ld} + \Gamma^i_{ld} = S_1 \Gamma^l_{ik} \frac{1}{S_1} + \Gamma^i_{ld}, \\
\tilde{\Gamma}^l_{il} &= g^{ld} g_{pd} g_{pl} \Gamma^l_{il} g^{pl} g^{ip} g_{ld} + \Gamma^i_{ld} = S_2 \Gamma^l_{il} \frac{1}{S_2} + \Gamma^i_{ld}
\end{aligned} \tag{39}
$$

Подставим условия (39) в выражение для тензора Риччи, получим

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{ik} &= \partial_l (S_1 \Gamma^l_{ik} \frac{1}{S_1} + \Gamma^i_{ld}) - \partial_k (S_2 \Gamma^l_{il} \frac{1}{S_2} + \Gamma^i_{ld}) = \\
&= S_1 (\partial_l \Gamma^l_{ik}) \frac{1}{S_1} + \partial_l \Gamma^i_{ld} - S_2 (\partial_k \Gamma^l_{il}) \frac{1}{S_2} + \partial_k \Gamma^i_{ld}
\end{aligned} \tag{40}
$$

В выражении (40) второе и четвертое слагаемые сокращаются. Кроме того

$$
\begin{aligned}
&\partial_l (S_1 \Gamma^l_{ik} \frac{1}{S_1}) = (\partial_l S_1) \Gamma^l_{ik} \frac{1}{S_1} + S_1 (\partial_l \Gamma^l_{ik}) \frac{1}{S_1} + S_1 \Gamma^l_{ik} (\partial_l \frac{1}{S_1}) = \\
&= (\partial_l S_1) \Gamma^l_{ik} \frac{1}{S_1} + S_1 (\partial_l \Gamma^l_{ik}) \frac{1}{S_1} - \Gamma^l_{ik} \frac{1}{S_1} (\partial_l S_1) = \\
&= S_1 (\partial_l \Gamma^l_{ik}) \frac{1}{S_1}
\end{aligned} \tag{41}
$$

Аналогичный результат получим для слагаемого $\partial_k (S_2 \Gamma^l_{il} \frac{1}{S_2}) = S_2 (\partial_k \Gamma^l_{il}) \frac{1}{S_2}$. Таким образом, выражение (41) примет вид

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{ik} &= S_1 (\partial_l \Gamma^l_{ik}) \frac{1}{S_1} - S_2 (\partial_k \Gamma^l_{il}) \frac{1}{S_2} = \\
&= S_1 (\partial_l \Gamma^l_{ik}) \frac{1}{S_1} = S_1 R_{ik} \frac{1}{S_1}
\end{aligned} \tag{42}
$$

Как и в случае тензора Римана, альтернация тензора Риччи по индексам k и l проведена без удвоения [6].

Приложение 4.

Согласно [4, 8] и с учетом формул (5, 33) тензор энергии-импульса гравитационного поля можно представить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-g}T_i^k = \partial_i\Gamma_{lp}^p \frac{\partial(-\frac{1}{2}R^{lm}R_{lm}\sqrt{-g})}{\partial(\partial_k\Gamma_{lp}^p)} - \delta_i^k(-\frac{1}{2}R^{lm}R_{lm}\sqrt{-g}) \\
&T_i^k = \partial_i\Gamma_{lp}^p \frac{\partial(\frac{1}{2}R^{lm}(\partial_m\Gamma_{lp}^p - \Gamma_{lm}^n\Gamma_{np}^p))}{\partial(\partial_k\Gamma_{lp}^p)} + \delta_i^k\frac{1}{2}R^{lm}R_{lm} = \\
&= R^{lk}\partial_i\Gamma_{lp}^p + \delta_i^k\frac{1}{2}R^{lm}R_{lm}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Рассмотрим ковариантную дивергенцию ($D_kT_i^k$) в локально-геодезической системе координат:

$$
\begin{aligned}
&D_kT_i^k = \partial_kT_i^k = \partial_kR^{lk}\partial_i\Gamma_{lp}^p + R^{lk}\partial_k\partial_i\Gamma_{lp}^p + \frac{1}{2}\partial_i(R^{lm}R_{lm}) = \\
&= \partial_kR^{lk}\partial_i\Gamma_{lp}^p + R^{lk}\partial_k\partial_i\Gamma_{lp}^p - \frac{1}{2}(\partial_iR^{lm}\partial_m\Gamma_{lp}^p + R^{lm}\partial_i\partial_m\Gamma_{lp}^p)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

В соответствии с равенством (34) первое слагаемое в выражении (44) равно нулю, суммируя слагаемые два и четыре, получим

$$
\begin{aligned}
&\partial_kT_i^k = \frac{1}{2}(R^{lm}\partial_i\partial_m\Gamma_{lp}^p - \partial_iR^{lm}\partial_m\Gamma_{lp}^p) = \\
&= \frac{1}{2}(-R^{lm}\partial_iR_{lm} + \partial_iR^{lm}R_{lm})
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Проведем опускание и поднятие индексов в последнем слагаемом выражения (45):

$$
\partial_kT_i^k = \frac{1}{2}(-R^{lm}\partial_iR_{lm} + \partial_iR_{lm}R^{lm}) = 0 \tag{46}
$$

Поскольку в локально-геодезической системе координат дивергенция тензора энергии-импульса гравитационного поля равна нулю, то и в любой другой (произвольной) системе координат выполняется следующее равенство:

$$
D_kT_i^k = 0 \tag{47}
$$

Список литературы

1. C. Yang, R. Mills Phys. Rev. V 96, 191 (1954).
2. А. Ю. Морозов, УФН 162, 83 (1992).
3. S. Franco, ArXiv hep-th/2201.10987.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теория поля, ФИЗМАТЛИТ, Москва (2001), с. 536.
5. А.А. Богуш Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий, Едиториал УРСС, Москва (2012), с. 360.
6. П.К. Рашевский Риманова геометрия и тензорный анализ, Едиториал УРСС, Москва (2003), с. 664.
7. А.А. Славнов, Л.Д. Фаддеев Введение в квантовую теорию калибровочных полей, НАУКА, Москва (1988), с. 272.
8. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков Введение в теорию квантованных полей, Наука, Москва (2008), с. 736.
9. Л.Б. Окунь Лептоны и кварки, ЛЕНАНД, Москва (2015), с. 352.
10. Г. Торн, Т. Корн Справочник по математике, НАУКА, Москва (1973), с. 832.
11. Сборник статей Нелинейная квантовая теория поля, Издательство иностранной литературы, Москва (1959), с. 464.
12. Сборник статей Новейшие проблемы гравитации, Издательство иностранной литературы, Москва (1961), с. 488.