

НОВЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ НАЧАЛЬНЫХ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕ ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ ФУНКЦИЙ.

Ступин Д. Л.

Тверь

На основе решения проблемы коэффициентов на классе ограниченных в единичном круге Δ функций $\omega(z)$ с нормировкой $\omega(0) = 0$, излагается и обосновывается метод оценки модуля тейлоровского коэффициента с любым номером n на классе B ограниченных не обращающихся в нуль на Δ функций. Проводится точная оценка модулей первых шести тейлоровских коэффициентов на классе B .

Basing on the solution of the coefficient problem on the class of bounded in the unit circle Δ functions $\omega(z)$ with normalization $\omega(0) = 0$, we present and substantiate a method of sharp estimation of the modulus of the Taylor coefficient with any number n on the class B of bounded nonvanishing in Δ functions. The moduli of the first six Taylor coefficients on the class B are estimated.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов, подчинённые функции.

Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, Taylor coefficient modulus estimates, subordinate functions.

1. Введение

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в единичном круге Δ функций f , таких, что $0 < |f(z)| \leq 1, z \in \Delta$.

В 1968 г. польский математик Ян Кшиж предположил [1, 2], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако, в настоящее время, она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [3]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в топологии локально равномерной сходимости семейство функций.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t . Как известно из теории подчинённых функций [4], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \quad (1)$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω , таких, что

$$|\omega(z)| \leq 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t \geq 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t .

Класс, состоящий из функций $\omega \in \Omega_0$ с действительными коэффициентами обозначим через Ω_0^r , а класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами обозначим через B_t^r . При каждом $t \geq 0$ формула (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0^r и B_t^r .

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам например свободно делить на t .

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через её тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на её основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лаггера, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчинённых функций [4] и с теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнзначной функции $2n - 3$ действительных переменных. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, изложенные ниже результаты имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс B посредством класса Ω_0 , связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звёздных функций. Соответственно и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

2. Постановка задачи

В пункте 1 мы упоминали, что гипотеза Кшижа доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно. Краткий исторический обзор по начальным коэффициентам имеется в [12], а также в конце этой работы. Заметим

также, что оценки на B_t , точные для всех $t \geq 0$ получены только до третьего тейлоровского коэффициента включительно (см. [25, 20]). Оценки модулей четвёртого и пятого коэффициентов не являются точными при каждом $t \geq 0$ (см. [19, 26, 29, 3]). Гипотеза Кшижа для шестого коэффициента не доказана, хотя оценки 6-го коэффициента имеются [10].

По видимому, если некоторый метод даёт оценку $\Psi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, точную не при всех $t \geq 0$, то найдётся такой номер n , что $\Psi_n(t) > 2/e$, $t \in (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 > 0$. Таковым например является метод Брауна [19] при $k \geq 5$ и метод Шапеля [29] при $k \geq 6$ (см. [10]).

Даже при $n = 3$ оценки на B_t , точные при каждом $t \geq 0$ точными методами получить достаточно сложно [20]. Вероятно, что при $n \geq 4$ это попросту невозможно. С другой стороны, если ограничиться подклассом функций с действительными коэффициентами, то задача сильно упрощается, при этом получаемые оценки не сильно отличаются от оценок, имеющих место в общем случае [11].

Задача данной работы состоит в том, чтобы предложить и обосновать метод “точной” оценки модуля тейлоровского коэффициента с любым номером n на классе B_t , $t \geq 0$. На некоторых интервалах изменения параметра t мы будем использовать численные методы, поэтому оценки будут получаться с некоторой погрешностью, вносимой в расчеты с одной стороны машинной арифметикой, а с другой стороны самим численным методом.

Численные методы мы будем использовать исключительно на конечном интервале (t_1, t_2) , $t_2 > t_1 > 0$, изменения параметра t , так как при $t \in [0, t_1]$ и $t \geq t_2$ у нас есть точная оценка, полученная аналитическим методом. Об этом подробнее рассказывается в следующих пунктах.

3. Метод подчинения

Остановимся подробнее на представлениях вида (1). Пусть функции $G(z)$ и $g(z)$ голоморфны в Δ . Функция $g(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $G(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $G(z)$ будем называть мажорантой для $g(z)$ в Δ .

Понятие подчинения восходит к Е. Линделёфу [31], однако термин был введен Д. И. Литльвудом [32] и В. Рогозинским [4], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литльвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B [25, 30, 29, 13, 14].

В случае проблемы Кшижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z, t)$.

Отметим, что теория подчинения позволяет очень легко находить оценки первого и второго коэффициента на классе функций $g(z)$, подчинённых функции $G(z)$. Известно, что

$$\{g\}_0 = \{G\}_0, \quad |\{g\}_1| \leq |\{G\}_1|, \quad |\{g\}_2| \leq \max(|\{G\}_1|, |\{G\}_2|);$$

все оценки точные [4] и равенство достигается только на вращениях F в плоскости переменной z .

4. Асимптотические оценки коэффициентов

Пользуясь теорией подчинения [4] и критерием Каратеодори-Тёплица [8] Р. Перец сформулировал [30] две теоремы, содержащие асимптотические оценки $|\{f\}_n|$ при достаточно больших или достаточно малых положительных t .

Теорема 1 (Peretz). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_1(n) > 0$ такое, что для любой $f \in B_t$ при $0 \leq t \leq t_1(n)$ справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 2 (Peretz). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_2(n) \geq 0$ такое, что для $f \in B_t$ при $t \geq t_2(n)$ справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_n(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

Автор [13, 14] получил явный результат для случая малых t :

Теорема 3. *Для любого $t > 0$ и каждой $f \in B_t$, справедливы точные оценки*

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1(t)|, \quad n \in \{1, \dots, [2/t] + 1\}.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Этот результат также получен с использованием метода подчинения и неравенств Каратеодори-Тёплица.

Из теоремы 3 следует, что чем меньшее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t .

Этот результат интересен при $t \leq 2$. Например, при $t > 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \leq 2$ — два коэффициента, при $t \leq 1$ — три коэффициента, а при $t \leq 1/2$ — пять, и так далее.

Необходимо отметить, что указанные в теореме 3 границы для t не наилучшие. Автор пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z, t)$ можно продолжить до выпуклой однолистной функции. В этом случае получилась простая закономерность, связывающая n и t .

Заметим, что из теоремы 3 сразу следует теорема 1. Однако Перец доказал свою теорему намного раньше. Он пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z, t)$ можно продолжить до функции класса Каратеодори. Используя этот подход при $t = 2$ мы по-прежнему сможем оценить только два коэффициента на классе B_t , зато при $t = 1$ этот метод позволяет оценить уже целых шесть коэффициентов.

Д. В. Прохоров и С. В. Романова методами оптимального управления получили аналогичные результаты [23, 22]. В частности, в статье [22] получены точные оценки для малых t , гарантирующие локальный максимум модуля n -го коэффициента.

5. Границы применимости асимптотических оценок

В формулировках Переца не упоминаются границы для n и t , однако эти границы можно вычислить используя критерий Каратеодори-Тёплица [8].

Переформулируем теорему 1

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B_t$, тогда $|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1(t)|$, $t \in [0, t_1]$, где $t_1(n)$ — наименьший положительный корень уравнения $M_n^1 = 0$, а

$$M_n^1 := \begin{vmatrix} \{F\}_1 & \{F\}_2 & \cdots & \{F\}_{n-1} & \{F\}_n \\ \{F\}_2 & \{F\}_1 & \cdots & \{F\}_{n-2} & \{F\}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \{F\}_{n-1} & \{F\}_{n-2} & \cdots & \{F\}_1 & \{F\}_2 \\ \{F\}_n & \{F\}_{n-1} & \cdots & \{F\}_2 & \{F\}_1 \end{vmatrix}.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Переформулируем теорему 2

Теорема 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B_t$, тогда $|\{f\}_n| \leq |\{F\}_n(t)|$, $t \geq t_2(n)$, где $t_2(n)$ — наибольший положительный корень уравнения $M_n^2 = 0$, а

$$M_n^2 := \begin{vmatrix} \{F\}_n & \{F\}_{n-1} & \cdots & \{F\}_2 & \{F\}_1 \\ \{F\}_{n-1} & \{F\}_n & \cdots & \{F\}_3 & \{F\}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \{F\}_2 & \{F\}_3 & \cdots & \{F\}_n & \{F\}_{n-1} \\ \{F\}_1 & \{F\}_2 & \cdots & \{F\}_{n-1} & \{F\}_n \end{vmatrix}.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

Воспользовавшись этими формулировками имеем для $n \leq 6$:

$$\begin{aligned} t_1(1) &= +\infty, & t_2(1) &= 0, \\ t_1(2) &= 2, & t_2(2) &= 2, \\ t_1(3) &= 3/2, & t_2(3) &= 2 + 2^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}, \\ t_1(4) &= 3 - \sqrt{3}, & t_2(4) &= 6, \\ t_1(5) &= 1.129457\dots, & t_2(5) &= 7.899361\dots, \\ t_1(6) &= 1.037289\dots, & t_2(6) &= 9.785796\dots \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что для $n = 1$ и $n = 2$ поставленная задача решена полностью. Более того, пожертвовав точностью на B_t мы тем не менее можем получить точную на B оценку при $n = 3$ (см. [30]). Однако, задача точной оценки при $n \geq 3$ решена только частично. С другой стороны, интервалы, на которых задача не решена конечны.

Заметим, что границы, указанные в теоремах 4 и 5, также как и в теореме 3 не наилучшие. К этому мы ещё вернёмся далее.

6. Анализ задачи

Так как $t_1(6) \approx 1.037$, то если гипотеза Кшижа верна при $n = 6$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\max_{B_t} |\{f\}_6| < 2/e - \varepsilon, \quad t \in (t_1(6), t_2(6)).$$

Задачу об оценке функционала $|\{f\}_6|$ на классах B_t , $t \geq 0$, можно свести к исследованию на условный глобальный максимум действительнзначной функции $|h_6(x_1, z_2, z_3, z_4, z_5, t)|$. Стало быть, если функция $|h_6|$ липшицева по переменным $x_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$, то гипотезу Кшижа можно доказать (при $n = 6$) или опровергнуть просто вычислив значения $|h_6|$ в узлах сетки.

Фиксируем номер $n > 2$. В работе [15] задача оценки функционала $|\{f\}_n|$ на классах B_t , $t \geq 0$, была сведена к исследованию на условный глобальный максимум действительнзначной функции $|h_n(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, t)|$, при ограничениях $x_1 \in [0, 1]$, $z_k \in \bar{\Delta}$, $k \in 2, \dots, n-1$. Напомним, что в обозначениях статьи [15] $x_k := |z_k|$, $k \in 1, \dots, n-1$.

Пусть $r_1 := 1$, $r_k := \prod_{j=1}^{k-1} (1 - x_j^2)$, $k = 2, 3, \dots$

Выпишем h_n при $n = 3$. Имеем $h_3 = \{F\}_1 g_3^1 + \{F\}_2 g_3^2 + \{F\}_3 g_3^3$, где

$$g_3^1 := r_3 - r_2 x_1 z_2^2, \quad g_3^2 := 2r_2 x_1 z_2, \quad g_3^3 := x_1^3.$$

Выпишем h_n при $n = 4$. Имеем $h_4 = \{F\}_1 g_4^1 + \{F\}_2 g_4^2 + \{F\}_3 g_4^3 + \{F\}_4 g_4^4$, где

$$\begin{aligned} g_4^1 &:= r_4 - r_3(2x_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3)z_3 + r_2 x_1^2 z_2^3, \\ g_4^2 &:= 2r_3 x_1 z_3 + r_2(1 - 3x_1^2)z_2^2, \\ g_4^3 &:= 3r_2 x_1^2 z_2, \\ g_4^4 &:= x_1^4. \end{aligned}$$

При $n = 5$ имеем $h_5 = \{F\}_1 g_5^1 + \{F\}_2 g_5^2 + \{F\}_3 g_5^3 + \{F\}_4 g_5^4 + \{F\}_5 g_5^5$, где

$$\begin{aligned} g_5^1 &:= r_5 - r_4(\bar{z}_3 z_4 + 2(x_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3))z_4 + \\ &\quad + r_3(\bar{z}_2^2 z_3^2 - x_1(1 - 3|z_2|^2)z_3 + 3x_1^2 z_2^2)z_3 - r_2 x_1^3 z_2^4, \\ g_5^2 &:= 2(r_4 x_1 z_4 + r_3((1 - 3x_1^2)z_2 - x_1 \bar{z}_2 z_3)z_3 - r_2 x_1(1 - 2x_1^2)z_2^3), \\ g_5^3 &:= 3(r_2 x_1(1 - 2x_1^2)z_2^2 + r_3 x_1^2 z_3), \\ g_5^4 &:= 4r_2 x_1^3 z_2, \\ g_5^5 &:= x_1^5. \end{aligned}$$

Наконец $h_6 = \{F\}_1 g_6^1 + \{F\}_2 g_6^2 + \{F\}_3 g_6^3 + \{F\}_4 g_6^4 + \{F\}_5 g_6^5 + \{F\}_6 g_6^6$, где

$$\begin{aligned} g_6^1 &:= r_6 - r_5(2(x_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_4) + \bar{z}_4 z_5) z_5 + r_4(3(x_1^2 z_2^2 + \bar{z}_2^2 z_3^2) + \bar{z}_3^2 z_4^2 + \\ &\quad + (2x_1 z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2(1 - 3|z_3|^2))z_4 - 2x_1(1 - 3|z_2|^2)z_3)z_4 + \\ &\quad + r_3((3x_1^2(1 - 2|z_2|^2)z_2 - \bar{z}_2^3 z_3^2)z_3 + 2x_1(1 - 2|z_2|^2)\bar{z}_2 z_3^2 - 4x_1^3 z_2^3)z_3 + \\ &\quad + r_2 x_1^4 z_2^5, \\ g_6^2 &:= 2r_5 x_1 z_5 + 2r_4((1 - 3x_1^2)z_2 - x_1(2\bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_4))z_4 + r_3^2 z_3^2 + \\ &\quad + 2r_3(x_1(\bar{z}_2^2 z_3^2 - x_1(1 - 3|z_2|^2)z_3) - 3x_1(1 - 2x_1^2)z_2^2 - r_2|z_2|^2 z_3)z_3 + \\ &\quad + r_2 x_1^2(3 - 5x_1^2)z_2^4, \\ g_6^3 &:= 3(r_4 x_1^2 z_4 - r_3 x_1(x_1 \bar{z}_2 z_3 - 2(1 - 2x_1^2)z_2)z_3) + r_2(r_2^2 - 3x_1^2(2 - 3x_1^2))z_2^3, \\ g_6^4 &:= 4r_3 x_1^3 z_3 + 2r_2 x_1^2(3 - 5x_1^2)z_2^2, \\ g_6^5 &:= 5r_2 x_1^4 z_2, \\ g_6^6 &:= x_1^6 \end{aligned}$$

Итак, учитывая сказанное в пункте 5 приходим к выводу, что наша задача сводится к исследованию на глобальный условный максимум целевых функции $|h_n|$ при каждом значении параметра t , $t \in (t_1(n), t_2(n))$, $n = 3, 4, 5, 6$, и ограничениях $x_1 \in [0, 1]$, $z_k \in \bar{\Delta}$, $k = 2, \dots, n - 1$.

7. Липшицевость целевой функции

Функция f называется липшицевой на множестве X , если найдётся такое число $L > 0$ (константа Липшица), что $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ при любых $x, y \in X$. Дилатацией (растяжением) будем называть наилучшую, то есть наименьшую константу Липшица на рассматриваемом компакте.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. В предыдущем пункте задача об оценке целевого функционала была сведена к задаче о поиске условного глобального максимума действительной функции $2n - 3$ действительных аргументов $|h_n|$.

Лемма о липшицевости [33] гласит, что непрерывно дифференцируемая функция на компактном подмножестве евклидова пространства удовлетворяет условию Липшица.

Обозначим область определения целевой функции $|h_n|$ через

$$\Delta_n := [0, 1] \times \bar{\Delta}^{n-2}.$$

Для доказательства липшицевости функции h_n мы можем рассматривать её как многочлен от переменных $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{n-2}$. Многочлен, как известно, есть функция липшицева на компакте Δ_n по каждой из своих переменных.

Доказать липшицевость функции h_n мы также можем рассмотрев её реальную и мнимую части. Действительно, принимая во внимание то, что $z_k = x_k e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n - 1$, видим, что $\operatorname{Re} h_n$ и $\operatorname{Im} h_n$ есть липшицевы функции по каждой переменной, так как $\operatorname{Re} h_n$ и $\operatorname{Im} h_n$ — бесконечно гладкие по всем переменным. Из липшицевости $\operatorname{Re} h_n$ и $\operatorname{Im} h_n$ следует липшицевость h_n .

Если h_n — липшицева, то очевидно, что и $|h_n|$ — липшицева.

Мы можем разбить Δ_n некоторым достаточно равномерным образом и вычислить значения $|h_n|$ во всех узлах этой сетки. Обозначим наибольшее из вычисленных значений через v_n . Так как $|h_n|$ — липшицева, то мы можем оценить разность $\varepsilon_n := \max_{\Delta_n} |h_n| - v_n$ через произведение дилатации и расстояния между узлами сетки. Это и будет основная погрешность наших вычислений. Отметим, что погрешностью, вносимой в расчеты машинной арифметикой можно пренебречь, так как она очень мала по сравнению с ε_n .

Обозначим через L_n максимальную из дилатаций по каждой из переменных $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{n-2}$. То есть если δ_n — максимальное расстояние между узлами сетки, то погрешность ε_n не будет превосходить $L_n \delta_n$.

8. Об оценке константы дилатации

Итак, проведённый в пункте 7 анализ показывает, что для решения поставленной задачи целесообразно использовать методы теории многомерной глобальной липшицевой оптимизации.

Как видно из примера, приведённого в конце пункта 7, выбор константы Липшица существенно влияет на скорость работы алгоритма глобального поиска. Поэтому необходимо иметь достаточно хорошую верхнюю оценку L дилатации. Действительно, если взять L меньше дилатации, то алгоритм может сойтись к локальному а не глобальному максимуму, если же взять слишком большое значение для L , то алгоритм будет сходиться очень медленно.

С другой стороны, мы занимаемся поиском глобального максимума, а вблизи экстремальных точек как известно производная становится близкой к нулю. То есть локально в окрестностях точек максимумов дилатация близка к нулю. Таким образом, даже если взять приращение аргумента несколько меньше рассчитанного исходя из глобальной дилатации, то вероятность нахождения стационарной точки остаётся высокой.

Поиск дилатации для целевой функции на некотором компакте X является глобальной оптимизационной задачей. В общем случае, эта задача по сложности сопоставима с задачей поиска глобального максимума целевой функции на X . Например для нахождения дилатации h_6 по переменной x_1 достаточно найти $\max_{\Delta_6} |(h_6)'_{x_1}|$. Для работы нашего алгоритма требуется найти также дилатации по остальным переменным.

Грубую оценку дилатации можно получить например так: находим производную по интересующей нас переменной, затем применяем неравенство треугольника. К сожалению, полученная таким образом константа Липшица скорее всего будет в несколько раз больше дилатации.

9. О численном методе

Для определённости будем рассматривать алгоритм поиска глобального максимума на примере $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$. В этой работе используется метод полного перебора. Здесь мы считаем, что $x_1 \in [0, 1]$, $z_k = u_k + iv_k$, $u_k^2 + v_k^2 \leq 1$, $k = 2, \dots, 5$.

Обсудим сеть, охватывающую множество Δ_6 , в узлах которой мы будем вычислять значения функции $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$.

Отрезок $[0, 1]$ изменения переменной x_1 мы разобьём на равные части так, чтобы расстояние между соседними точками было не более δ .

9.1. Разбиение единичного круга.

Замкнутый единичный круг, пробегаемый переменной z_2 мы разобьём следующим образом. Разбиение начинается с точки в начале координат, которую следует рассматривать как отдельный шаг алгоритма разбиения. Далее, круг разбивается на воображаемые концентрические окружности, величины радиусов которых делят отрезок $[0, 1]$ на равные части. На окружности с наименьшим положительным радиусом поместим 4 точки, разбивающие окружность на равные части, первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. На окружности со вторым по величине радиусом поместим 8 точек, разбивающие окружность на равные части, первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. На окружности с третьим по величине радиусом поместим 12 точек, разбивающие окружность на равные части, первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. И так далее, пока не дойдём до единичной окружности.

Итак, количества точек на концентрических окружностях образуют арифметическую прогрессию $4, 8, 12, \dots, 4n$, где n — общее количество окружностей. То есть количество точек N в таком разбиении будет $2n(n+1)+1$, с учётом особенной точки в начале координат.

Например, если $n = 10$, то $N = 221$, если $n = 100$, то $N = 20201$, если $n = 1000$, то $N = 2002001$ и так далее.

Круги для переменных z_3, z_4, z_5 разбиваются аналогично, с небольшой оговоркой. Дело в том, что x_1 входит в $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$ чаще всех остальных переменных и с самой большой степенью, z_2 входит в $|h_6|$ чаще переменных z_3, z_4, z_5 и с самой большой степенью и так далее, переменная z_5 входит в $|h_6|$ всего дважды с максимальной степенью 2. Этим обусловлено то, что дилатация убывает от x_1 к z_5 . То есть количество точек в разбиениях тоже может убывать от x_1 к z_5 без потери точности вычислений.

На рисунке 1 показано радиальное разбиение единичного круга, точки разбиения лежат на 10 концентрических окружностях плюс одна точка в начале координат.

Заметим, что у приведённых разбиений единичного круга есть точки, лежащие на оси абсцисс, причём располагаются они там достаточно плотно. Дело в том, что случай функций с действительными коэффициентами является весьма важным частным случаем. Если $f \in B_t^r$, то

$$h_6 = h_6(x_1, x_2, \dots, x_5, t), \quad x_1 \in [0, 1], \quad x_2, \dots, x_5 \in [-1, 1],$$

и мы просто разбиваем эти отрезки на равные части.

Сетка называется однородной если все её внутренние узлы имеют одинаковое число соседних узлов. Будем называть сетку подавляюще однородной если все её внутренние вершины, кроме центральной, имеют одинаковое количество соседних вершин.

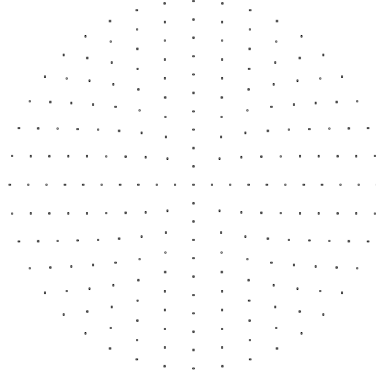


Рис. 1: Четырёхсекторное разбиение единичного круга.

Построенная здесь сетка называется сеткой на основе 4 секторов и обладает хорошим качеством [35], а также подавляющей однородностью. Каждая внутренняя вершина имеет 6 соседних вершин кроме вершины в начале координат, которая имеет только 4 соседних. Граничные вершины, лежащие на осях координат имеют по 3 соседних вершины, остальные вершины имеют по 4 соседних.

Отметим, что сетка на основе 6 секторов обладает полной однородностью. Для её построения на окружности с самым маленьким радиусом нужно разместить не 4, а 6 точек, разбивающих окружность на равные части, причём первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. Следующую окружность разобьём 12 точками на равные части, так чтобы одна из точек лежала на положительном луче оси абсцисс. Следующую окружность разобьём 18 точками на равные части, так чтобы одна из точек лежала на положительном луче оси абсцисс. И так далее, пока не дойдём до единичной окружности.

Заметим для полноты изложения, что имея сетку мы можем построить триангуляцию круга, соединяя ближайшие друг к другу точки отрезками прямой. Начинать процесс триангуляции можно из любой точки сетки.

9.2. Алгоритм поиска условного глобального максимума.

Промежуток изменения параметра t разбиваем равномерно. После этого вычисляем и сохраняем в памяти компьютера числа

$$\{F\}_1(t_k), \dots, \{F\}_6(t_k), \quad k = 1, \dots, m,$$

где m — количество точек в разбиении по t .

Заметим, что $\{F\}_1, \dots, \{F\}_6$ не зависят от x_1, z_2, \dots, z_5 , а g_6^j , $j = 1, \dots, 6$, не зависят от параметра t .

Точки сетки, разбивающей Δ_6 обозначим через D_6 .

Перебираем точки D_6 . В каждой точке D_6 вычисляем один раз значения функций g_6^j , $j = 1, \dots, 6$. Затем вычисляем $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$ по формуле

$$|h_6| = \{F\}_1 g_6^1 + \{F\}_2 g_6^2 + \{F\}_3 g_6^3 + \{F\}_4 g_6^4 + \{F\}_5 g_6^5 + \{F\}_6 g_6^6$$

для всех значений $t_k, k = 1, \dots, m$. Полученный набор значений сравниваем с набором вычисленным в предыдущей точке D_6 если предыдущая точка имеется. Таким образом мы в итоге вычисляем приближение к максимуму и к точке максимума для каждого значения параметра t .

Только что был описан метод полного перебора. Для получения приемлемых результатов, этот метод требует больших вычислительных ресурсов и времени. Дело в том, что сетка, дающая приемлемый результат должна содержать очень много точек. Несколько забегаая вперёд, сообщим, что при определённых условиях нас бы устроило $\delta = 0.007$. Здесь рассмотрим более лёгкий в вычислительном плане случай. Расстояния между концентрическими окружностями возьмём 0.01. Это значит, что $\delta \approx 0.02$. В этом случае D_6 будет состоять из

$$101 \cdot 20201^5 = 339770537321572210601101$$

точек сетки или вычислений значений функции $|h_6|$, а вычисление h_6 есть очень затратная операция. На процессорах современных компьютеров эти вычисления займут годы. Как вариант, можно использовать суперкомпьютер или как минимум вычисления на графических ускорителях.

Заметим, что в этом примере мы взяли равномерное разбиение по всем переменным. Если уменьшать количество точек в разбиениях x_1, z_2, \dots, z_5 по мере роста номера переменной, то вычислений будет необходимо значительно меньше.

С другой стороны, взяв менее подробную сетку, но проводя в каждой её точке локальный поиск задавая эту точку как отправную для локального поиска и сравнивая результат локального поиска с текущим максимальным значением, можно получить очень хорошие результаты, так как вероятность попадания во все области притяжения экстремальных точек достаточно большая.

В любом случае, вычисления всегда заканчиваются локальным поиском при каждом значении параметра t , начальными точками для которого служат точки, найденные перебором. Здесь используется метод М. Дж. Д. Пауэлла [34], также известный как метод сопряжённых направлений. Метод не требует вычисления производных, что хорошо, так как в нашем случае целевая функция содержит модуль.

Заметим, что этот метод не относится к методам условной оптимизации, поэтому применяются специальные ухищрения. В частности, редукция размерности точки с целью превращения граничной точки Δ_6 во внутреннюю точку Δ_k , $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, а также обработка события выхода точки за границу (штрафы).

Расчёты производятся параллельно. Для распараллеливания сетка на Δ_6 разбивается на “кубики”.

10. Результаты вычислений

Все вычисления, описанные в этой работе проведены на компьютере автора. Результаты вычислений будут представлены в графическом виде. Ради полноты изложения приведём результаты для $n = 1$ и $n = 2$. На рисунке 2 изображены 2 кривые $|\{F\}_1(t)|$ и $\max_t (|\{F\}_1(t)|, |\{F\}_2(t)|)$ на промежутке $[0, 7]$. Как известно [25]

$$|\{f\}_1| \leq |\{F\}_1|, \quad |\{f\}_2| \leq \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|), \quad f \in B_t, \quad t > 0.$$

Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_2|$ совпадают на промежутке $[0, 2]$.

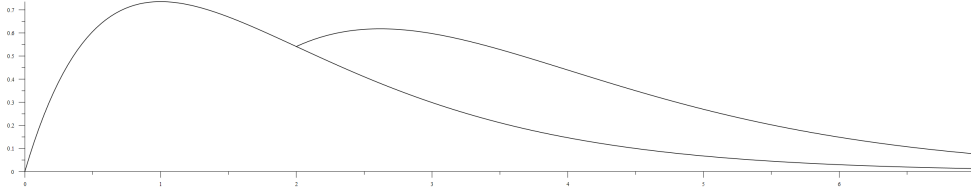


Рис. 2: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_1|$, $\max_{B_t} |\{f\}_2|$ на промежутке $[0, 7]$.

10.1. Случай $n = 3$.

Имеет место следующий результат [20]

Теорема 6 (Прохоров, Шиналь). *Если $f \in B_t$, то справедлива следующая точная оценка*

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{t}, & t \in [t_1, t_2], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{2t^2 - 6t + 3}{t} \sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, & t \in [t_2, t_3], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2 + 6t - 6}}, & t \in [t_3, t_4], \\ \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3), & t \geq t_4, \end{cases} \quad (2)$$

где $t_1 = 1.65 \dots$, $t_2 = 3.22 \dots$, $t_3 = 3.47 \dots$, $t_4 = 3.82 \dots$

Автор в статье [11] доказал, что справедлива

Теорема 7. *Если $f \in B_t^*$, то справедлива следующая точная оценка*

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{t}, & t \in [t_1, t_2], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2 + 6t - 6}}, & t \in [t_2, t_3], \\ \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3), & t \geq t_3, \end{cases} \quad (3)$$

где $t_1 = 1.65 \dots$, $t_2 = 3.30 \dots$, $t_3 = 3.82 \dots$

Удивительно, но формула (2) отличается от формулы (3) только на интервале $(3.20 \dots, 4.48 \dots)$. На рисунке 3 изображены сразу две кривые. Отличие между ними показано крупным планом в масштабе 1:1 на рисунке 4.

Переходим к численным вычислениям. На рисунке 5 показана кривая, заданная формулой (2) и её приближение, найденное полным перебором на промежутке $[t_1(3), t_2(3)]$. Разбиение по $t - 0.98$, а по $z - 1/3$. Мы видим, что результат вычислений местами далёк от истины.

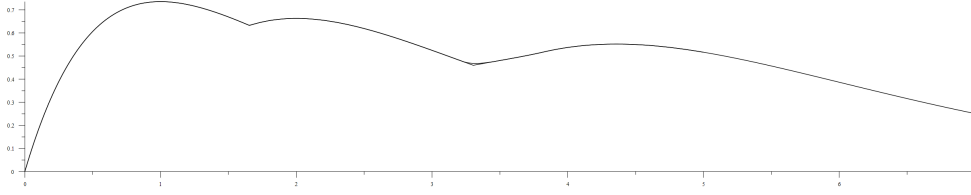


Рис. 3: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_3|$, $\max_{B_t^r} |\{f\}_3|$ на промежутке $[0, 7]$.

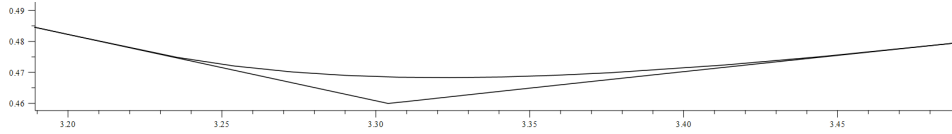


Рис. 4: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_3|$, $\max_{B_t^r} |\{f\}_3|$ на промежутке $[3.2, 3.5]$.

На рисунке 6 показана ломаная линия, аппроксимирующая кривую (2), полученная локальным поиском. В качестве отправных точек для локального поиска взяты все точки сетки, упомянутой в предыдущем абзаце. Все узловые точки полученной ломаной лежат на искомой кривой. Следовательно, для каждого t на сетке нашлась точка, лежащая в области притяжения точки глобального максимума.

Итак, весьма скромными вычислениями получено очень хорошее приближение при $n = 3$. В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_3|$ совпадают на промежутке $[0, 1.654]$. Верхняя граница указана приблизительно.

10.2. Случай $n = 4$.

Для случая $n = 4$ точной оценки коэффициентов не найдено. Если взять разбиение по $t = 0.01$, а по $z = 0.01$, то мы получим очень хорошее приближение к кривой $\max_{B_t} |\{f\}_4|$.

Возьмём теперь сетку, полученную достаточно грубым разбиением по $t = 0.98$, а по $z = 0.25$. Выполним локальный поиск в каждой точке получившейся сетки. Все узловые точки полученной таким образом ломаной линии лежат на кривой, изображенной на рисунке 7. Следовательно, при каждом t на этой сетке была найдена точка, лежащая в области притяжения точки глобального максимума.

Как и в случае $n = 3$, весьма скромными вычислениями получено очень хорошее приближение при $n = 4$. В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Отличие между кривыми в случае действительных и комплексных коэффициентов показано крупным планом в масштабе 1:1 на рисунке 8.

Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_4|$ совпадают на промежутке $[0, 1.506]$. Верхняя граница указана приблизительно.

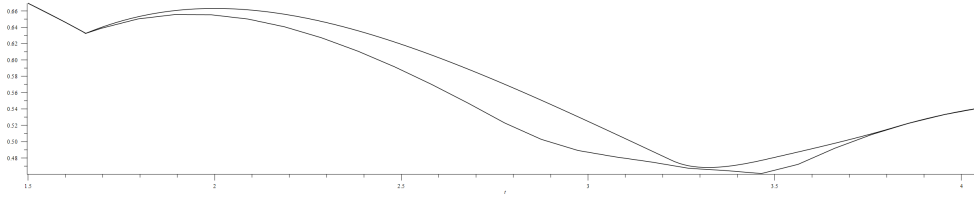


Рис. 5: Кривая $\max_{B_t} |\{f\}_3|$ и её грубое приближение.

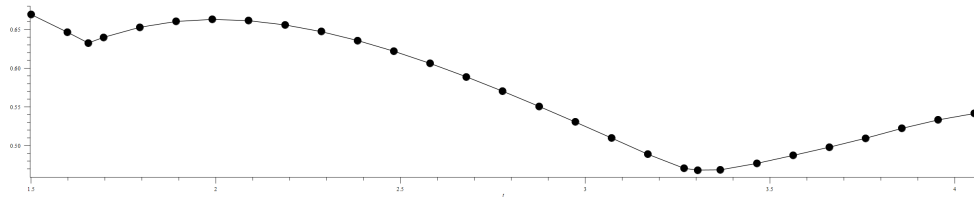


Рис. 6: Приближение к кривой $\max_{B_t} |\{f\}_3|$.

На рисунке 9 показаны кривые $\max_{B_t} |\{f\}_2|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_4|$. Видно, что они совпадают на промежутках $[0, 1.5]$ и $[2.3752, 3]$. Границы второго промежутка указаны не точно.

10.3. Случай $n = 5$.

Для случая $n = 5$ точной оценки коэффициентов не найдено. Если взять разбиение по $t = 0.01$, а по $z = 0.033$, то мы получим очень хорошее приближение к кривой $\max_{B_t} |\{f\}_5|$.

Возьмём теперь сетку, полученную достаточно грубым разбиением по $t = 0.98$, а по $z = 0.2$. Выполним локальный поиск в каждой точке получившейся сетки. Все узловые точки полученной таким образом ломаной линии лежат на кривой, изображенной на рисунке 10. Следовательно, при каждом t на этой сетке была найдена точка, лежащая в области притяжения точки глобального максимума.

Как и в случае $n = 4$, весьма скромными вычислениями получено очень хорошее приближение при $n = 4$. В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Отличие между кривыми в случае действительных и комплексных коэффициентов показано крупным планом в масштабе 1:1 на рисунке 11.

Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_5|$ совпадают на промежутке $[0, 1.421]$.

10.4. Случай $n = 6$.

Для случая $n = 6$ точной оценки коэффициентов не найдено. Если взять разбиение по $t = 0.02$, а по $z = 0.02$, то мы получим очень хорошее приближение к кривой $\max_{B_t} |\{f\}_6|$.

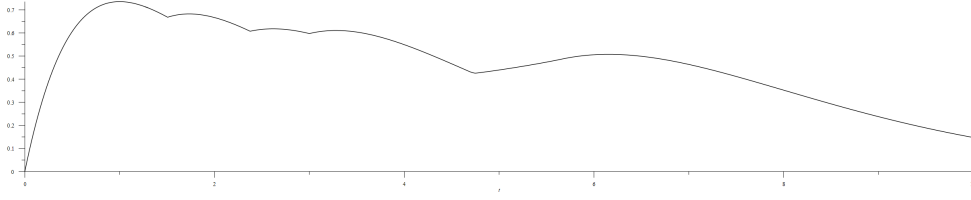


Рис. 7: Хорошее приближение к кривой $\max_{B_t} |\{f\}_4|$.

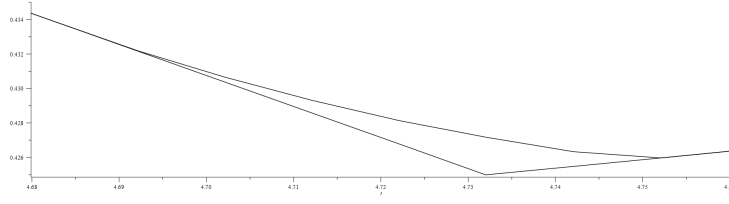


Рис. 8: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_4|$, $\max_{B_t^r} |\{f\}_4|$ на промежутке $[4.68, 4.76]$.

В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Отличие между кривыми в случае действительных и комплексных коэффициентов показано на рисунке 12.

Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_6|$ совпадают на промежутке $[0, 1.367]$ (рисунок 12). Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_2|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_6|$ совпадают на промежутке $[3.155, 3.305]$. Это показано на рисунке 13. Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_3|$ и $\max_{B_t} |\{f\}_6|$ совпадают на промежутке $[1.902, 2.257]$. Это показано на рисунке 14. Здесь все границы приближительные.

11. Экстремальные функции

В пункте 5 упоминалось, что

$$\max_{B_t} |\{f\}_n| = \max_{B_t} |\{f\}_1| = |\{F\}_1(t)|, \quad t \in [0, t_1(n)], \quad n = 1, \dots, 6.$$

Как упоминалось в предыдущем пункте, кривая $\max_{B_t} |\{f\}_1|$ совпадает с каждой из кривых $\max_{B_t} |\{f\}_n|$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$ на промежутках $[0, t_1^*(n)]$, где $t_1^*(2) = 2$, $t_1^*(3) = 1.654$, $t_1^*(4) = 1.506$, $t_1^*(5) = 1.421$, $t_1^*(6) = 1.367$. Следовательно, нам известно (см. пункты 4 и 5), что

$$\max_{B_t} |\{f\}_n| = |\{F\}_1(t)|, \quad t \in [0, t_1^*(n)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сопоставляя эти факты видим, что $t_1(n) < t_1^*(n)$. Напрашивается следующая гипотеза:

$$t_1^*(n) > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

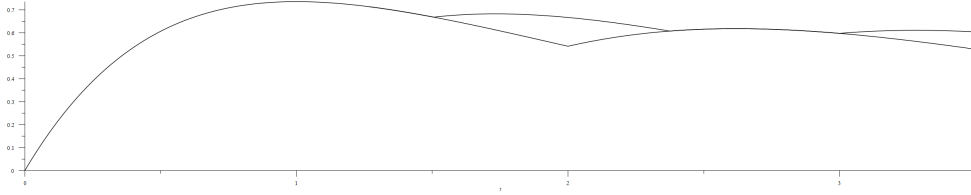


Рис. 9: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_2|$, $\max_{B_t} |\{f\}_4|$ на промежутке $[0, 3.5]$.

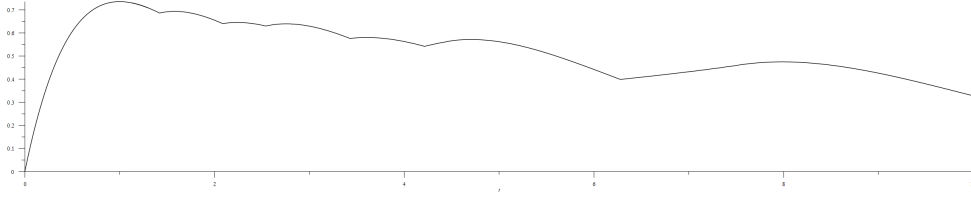


Рис. 10: Хорошее приближение к кривой $\max_{B_t} |\{f\}_5|$.

Возможно также, что $t_1^*(n) \rightarrow 1$, при $n \rightarrow \infty$.

Судя по результатам пункта 10, если $t_1^*(n) > 1$, $n \in \mathbb{N}$, то гипотеза Кшижа скорее всего верна. С другой стороны, численный метод, описанный здесь хорошо подходит для опровержения этой гипотезы. Действительно, если гипотеза Кшижа не верна например при $n = N$, то зная экстремальную точку, в которой $h_N > 2/e$ мы сможем предъявить функцию класса B_t , такую, что $|\{f\}_N| > 2/e$. Как это можно сделать описано в статьях [9, 15].

В пунктах 4 и 5 упоминалось также, что

$$\max_{B_t} |\{f\}_n| = |\{F\}_n(t)|, \quad t \geq t_2(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

и приводились значения $t_2(n)$, $n = 1, \dots, 6$. Эти значения тоже не наименьшие, также как и $t_1(n)$ не наибольшие. Например, $t_2(6) \approx 9.786$, а $t_2^*(6) \approx 9.405$.

Из подпункта 10.2 следует, что

$$\max_{B_t} |\{f\}_4| = \max_{B_t} |\{f\}_2| = |\{F\}_2(t)|, \quad t \in [2.3752, 3].$$

Из подпункта 10.4 следует, что

$$\max_{B_t} |\{f\}_6| = \max_{B_t} |\{f\}_2| = |\{F\}_2(t)|, \quad t \in [3.155, 3.305],$$

и

$$\max_{B_t} |\{f\}_6| = \max_{B_t} |\{f\}_3| = 2 \frac{\sqrt{2}}{3} e^t \sqrt{(2t-1)^3}, \quad t \in [1.902, 2.257].$$

При $t \in [1.902, 2.257]$ экстремальной является функция

$$f(z) := e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}},$$

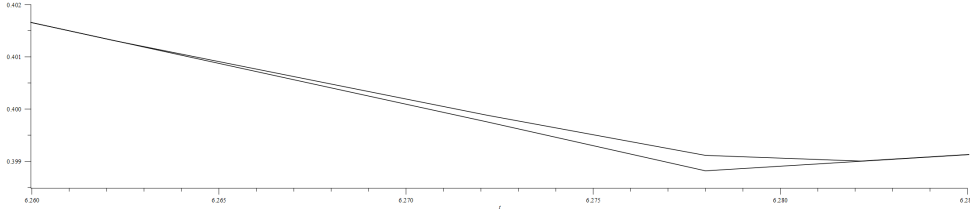


Рис. 11: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_5|$, $\max_{B_t^r} |\{f\}_5|$ на промежутке $[6.26, 6.285]$.

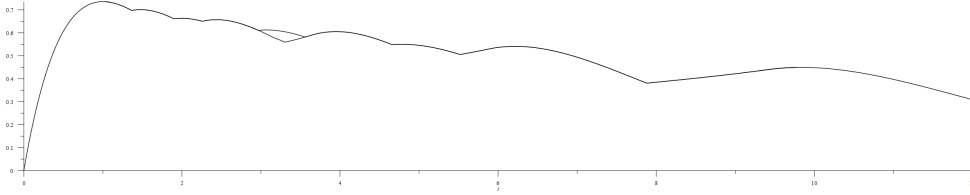


Рис. 12: Хорошее приближение к кривым $\max_{B_t} |\{f\}_6|$ и $\max_{B_t^r} |\{f\}_6|$.

где

$$\omega(z) = z \frac{x^* - z}{1 - x^* z}, \quad x^* := \sqrt{\frac{1}{3} \frac{1 + \mu}{1 + \nu}}, \quad \mu := \frac{\{F\}_1}{2te^{-t}}, \quad \nu := \frac{\{F\}_2}{2te^{-t}}$$

с точностью до вращений в плоскости переменной z .

На оставшихся промежутках данный численный метод не позволяет найти точный вид экстремальных функций. Да и с проверкой угаданных экстремальных функций на отрезках промежутков $[t_1(4), t_2(4)]$ и $[t_1(6), t_2(6)]$ тоже не всё гладко. Ведь вычисления проведены с некоторой погрешностью, пусть и не большой. Мы можем установить, что указанная функция лежит на границе n -го тела коэффициента класса B_t или B_t^r , но как показать, что функция является экстремальной не ясно. Есть, конечно некоторые признаки экстремальности, однако они только необходимые, но не достаточные [25, 28]. Ещё возможно удастся доказать локальную экстремальность угаданных функций [16, 17].

Заметим, что оценка 1-го коэффициента на B_t и на B_t^r совпадают. Оценка 2-го коэффициента на B_t и на B_t^r также совпадают. В случае $n = 3, 4, 5$ отличия не велики. Случай $n = 6$ несколько выбивается из этого ряда, но и здесь отличие есть на относительно небольшом интервале. Таким образом, если провести оценку на B_t^r , то можно получить вид экстремальных функций для большей части промежутков $[t_1(n), t_2(n)]$, $n = 4, 5, 6$.

Если предположение о том, что $t_1^*(6) \approx 1.367$ верно, то при $t > t_1^*(6)$ численные вычисления дают глобальный максимум $m_6 \approx 0.7008$, который достигается при $t \approx 1.4768$. Получается, для строгого доказательства гипотезы Кшижа при $n = 6$ методом полного перебора нам достаточно построить сетку с шагом не более чем ε_6/L_6 , где $\varepsilon_6 := 2/e - m$. То есть, если $L_6 = 5$, то шаг сетки δ_6 должен быть не больше чем 0.007.

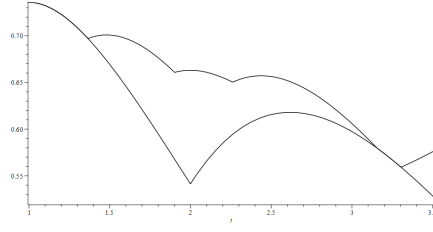


Рис. 13: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_2|$, $\max_{B_t^r} |\{f\}_6|$ на промежутке $[1, 3.5]$.

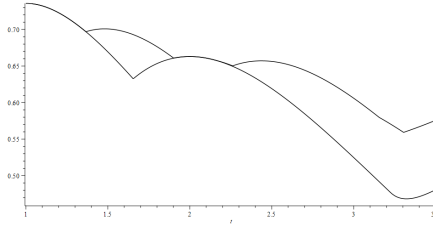


Рис. 14: Кривые $\max_{B_t} |\{f\}_3|$, $\max_{B_t^r} |\{f\}_6|$ на промежутке $[1, 3.5]$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t \in (t_1(n), t_2(n))$. Заметим, что экстремальные функции для функционала $\{f\}_n$ на B_t можно искать в виде (по этому поводу см. [9, 25]):

$$f(z) := e^{-t \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 - ze^{i\varphi_k}}{1 + ze^{i\varphi_k}}}, \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \quad \varphi_k \in [0, 2\pi), \quad \varphi_j \neq \varphi_k, \quad j \neq k.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n \leq 2\pi$. Более того, так как B_t инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z , то можно считать, что $\varphi_1 = 0$. Заметим ещё, что $f(z) = \prod_{k=1}^n F(ze^{i\varphi_k}, \alpha_k t)$.

12. Краткий исторический обзор по начальным коэффициентам

Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [24].

Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [4]. В статье [25] оценки $|\{f\}_1| \leq 2/e$ и $|\{f\}_2| \leq 2/e$ были найдены методом структурных формул, параметрическим методом и методом подчинения.

Я. Кшиж, располагая точными оценками $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$, высказал свою гипотезу в 1968 году [2].

В 1977 году, появилась работа Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [25], в которой при помощи вариационного метода, перенесённого с класса Каратеодори, задача о максимизации функционала была сведена к задаче о максимизации функции благодаря чему была впервые найдена оценка $|\{f\}_3| \leq 2/e$. Точная оценка $|\{f\}_3|$ дана этими авторами не для всех $t > 0$, однако ими доказано, что глобальный максимум $|\{f\}_3|$ достигается при $t = 1$.

Спустя 10 лет, Дж. Браун в [19] написал, что получил точно такой же результат как и в [25], но другим методом. Точнее, в [19] приведена функция, которую нужно исследовать на максимум, причём точно такая же как и в работе [25]. По всей видимости, для получения упомянутой функции использовалось кроме прочего неравенство треугольника. Исследование на максимум в [19] отсутствует.

Точная оценка $|\{f\}_3|$, при каждом t , была получена позднее Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем [20] при помощи неравенств Каратеодори-Тёплица.

Оценка $|\{f\}_3|$, полученная автором в работе [12], совпадает с [25], но получена другим методом. Автор также получил точную оценку $|\{f\}_3|$ для функций с действительными коэффициентами в работе [11].

Кроме того, стоит отметить результат Р. Переца [30], который доказал оценку $|\{f\}_3| \leq 2/e$ используя то, что отрезок ряда Тейлора $\{f\}_0 + \dots + \{f\}_3 z^3$ любой функции из B можно продолжить до функции класса Каратеодори. Доказательство Р. Эрмерс [28] имеет алгебраическую форму, а сама оценка состоит всего из трёх формул.

Доказательство того, что $|\{f\}_4| \leq 2/e$ в 1983 году появилось у Д. Тана в работе [26], но его рассуждения, основанные на принципе подчинения и лемме Шварца-Пика, не были полными [21]. В том же году появилось доказательство П. Н. Пронина [27], основанное на том же самом вариационном методе, который использовался в [25] при получении оценки $|\{f\}_3|$. Позже, в 1987 году, Дж. Браун [19] опубликовал свой вариант подхода к доказательствам оценок $|\{f\}_n| \leq 2/e$ для $n = \overline{1, 4}$. Он использовал то, что

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1 \{\omega^1\}_n + \dots + \{F\}_n \{\omega^n\}_n \leq |\{F\}_1 \{\omega^1\}_n| + \dots + |\{F\}_n \{\omega^n\}_n| \leq 2/e.$$

Однако, последнее из этих неравенств справедливо только при $n < 5$. Р. Эрмерс [28] предоставил более обстоятельное доказательство, проведённое при помощи алгебраического метода, восходящего к И. Шуру. Как отмечается в [21], наиболее убедительным стало доказательство В. Шапеля [29].

Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [3].

Автор данной статьи в работе [10] при помощи метода Шапеля получил оценки $|\{f\}_n| \leq 2/e$, $n = \overline{1, 5}$, а также оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.001163$. Интересно, что при $n = 2$ оценка получилась точной при всех t , а при $n = 3$ оценка, полученная автором этой статьи совпала с оценкой Р. Эрмерс [28]. В. Шапель в [29] задал вопрос: до какого номера n применим его метод? Похоже, что ответ таков: $n = 6$.

Доказательство Шапеля [29], как и доказательство Самариса [3] нельзя считать строгим, так как оно основывается только на графиках. Обоснование того, что эти графики нарисованы корректно отсутствует. Отсутствует также оценка погрешности. Для обоснования корректности графиков можно например использовать оценку дилатации. Этим же недостатком грешит и статья автора [10].

Исследования по проблеме Кшижа не ограничиваются оценками модулей начальных тейлоровских коэффициентов. Обзор по тематике коэффициентов голоморфных функций, в частности по гипотезе Кшижа, имеется в статьях [12, 21].

13. Заключение

В настоящей статье описан подход к решению задачи получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов $\{f\}_1, \dots, \{f\}_6$ на классах B_t , $t \geq 0$.

Доказана корректность этого подхода в строгом математическом смысле.

В работе используются результаты, основанные на решении классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0 [15], а также результаты, полученные методом подчинения [30].

В работе [15] решена задача перехода от функционала $|\{f\}_n|$ на классе B_t , к функционалу над классом Ω_0 . Далее задача сведена к задаче о поиске условного максимума действительнзначной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что в принципе позволяет даже применять стандартные методы дифференциального исчисления. Здесь однако мы пользовались численными методами глобальной липшицевой оптимизации.

Графики точных при каждом $t \geq 0$ оценок функционалов $|\{f\}_n|$, $n = 1, \dots, 6$ на классах B_t получены на интервалах $(t_1(n), t_2(n))$ численным методом, однако точность не указана.

Собранные данные также привели к уточнению гипотезы Кшижа (см. начало пункта 11). Также все собранные данные говорят о том, что гипотеза скорее всего справедлива. Тем не менее, в том же пункте 11 изложен вполне адекватный метод опровержения этой гипотезы.

Все изложенные здесь подходы можно применять не только на классах B_t , а также и на других классах подчинённых функций.

Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе B , а также на других классах голоморфных функций. Задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Список литературы

- [1] Krzyz J. G. Problem 1, posed in Fourth Conference on Analytic Functions. // Ann. Polon. Math. 1967–1968. V. 20. P. 314.
- [2] Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.
- [3] Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. // Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753–766.
- [4] Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. // Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48–82.
- [5] Schur I. Über potenzreihen, die in Innern des Einheitskrieses Beschränkt Sind. // J. Reine Angew. Math., 1917. V. 147. P. 205–232. English translation in: Schur I. Methods in Operator Theory and Signal Processing, I. Gohberg, ed., Birkhauser. 1986. P. 31–89.
- [6] Carathéodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. // Mathematische Annalen. 1907, V. 64. P. 95–115.

- [7] Carathéodory C. Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 193–217.
- [8] Töplitz O. Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen. // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 191–192.
- [9] Ступин Д. Л. Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщённый круг и задача Каратеодори-Фейера. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2012. С. 45–74.
- [10] Ступин Д. Л. Теория меры и оценка модулей первых шести коэффициентов в проблеме Кшижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2015. С. 36–49.
- [11] Ступин Д. Л. Точная оценка модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций с действительными коэффициентами. // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы III Всероссийской научно-практ. конф. (24–26 марта 2022 года, г. Тверь) // под ред. Ю. В. Чемариной, А. А. Голубева. — Тверь: Тверской государственный университет, 2022. С. 205–209.
- [12] Ступин Д. Л. 2022. Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$. PREPRINTS.RU. <https://doi.org/10.24108/preprints-3112533>
- [13] Ступин Д. Л. Точные оценки коэффициентов в проблеме Кшижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2010. С. 52–60.
- [14] Stupin D. L. The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz's problem. // Electronic archive / Cornell University Library. 2011.
- [15] Ступин Д. Л. 2022. Проблема коэффициентов для ограниченных функций и её приложения. PREPRINTS.RU. <https://doi.org/10.24108/preprints-3112522>
- [16] Ступин Д. Л., Шеретов В. Г., Доказательство локальной гипотезы Кшижа. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. Тверь. 2005. № 6. С. 122–125.
- [17] Ступин Д. Л. Доказательство локального принципа подчинения и локальной справедливости гипотезы Кшижа. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2008. С. 70–72.
- [18] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [19] Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. // Compl. Var. 1987. V. 9. P. 143–152.
- [20] Prokhorov D. V., Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981. V. 29. N. 5-6. P. 223–230.
- [21] Прохоров Д. В. Коэффициенты голоморфных функций. // Комплексный анализ и теория представлений. Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Москва. ВИНТИ. 2000. Т. 71.

- [22] Прохоров Д. В., Романова С. В. Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей. // Известия РАН, Серия математическая. 2006. Т. 70. № 4. С. 209–224.
- [23] Романова С. В. Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения. // Известия вузов. Математика. 2002. № 11. С. 83–85.
- [24] Levin V. I., Fenchel W., Reissner E. Lösung der Aufgabe 163. // Jahresber. DM. 1934. V. 44. N. 2. P. 80–83.
- [25] Hummel J. A., Scheinberg S., Zalcman L. A. A coefficient problem for bounded nonvanishing functions. // J.d'Analyse Mathématique 1977. V 31. P. 169–190.
- [26] Tan Delin. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Chinese Ann. Math. 1983. V. A4. P. 97–104.
- [27] Пронин П. Н. Достаточные условия однолиственности различных операторов и экстремальные задачи на классе ограниченных функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов: Саратовский гос. ун-т. 1983. 105 с.
- [28] Ermers R. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. // Wibro Dissertatiedrukkerij. Helmond. 1990.
- [29] Szapiel W. A new approach to the Krzyz conjecture. // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A. 1994. V. 48. P. 169–192.
- [30] Peretz R. Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions. // Compl. Var. 1992. V. 17. Issue 3-4. P. 213–222.
- [31] Lindelöf E. Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. // Acta Soc. Sci. Fenn. 1909. V. 35. N. 7. P. 1–35.
- [32] Littlewood J. E. Lectures on the theory of functions. Oxford university press. 1947.
- [33] Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981.
- [34] Powell M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. // Computer Journal. 1964. V. 7. N. 2. P. 155–162.
- [35] Галанин М. П., Щеглов И. А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2006. №. 10. 32 с.